Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Some results on fuzzy semi maximal filters in BL-algebras

Akbar Paad[1]

1. Department of Mathematical, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

E-mail: akbar.paad@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
8 July 2020
Revised form:
1 March 2021
Accepted:
14 March 2021
Published online:
21 November 2022

Keywords:
BL-algebra;
fuzzy semi maximal filter;
semi simple BL-algebra.

ABSTRACT

Introduction

BL-algebras are the algebraic structure for Hajek basic logic in order to investigate many valued logic by algebraic means. His motivations for introducing BL-algebras were of two kinds. The first one was providing an algebraic counterpart of a propositional logic, called Basic Logic, which embodies a fragment common to some of the most important many-valued logics, namely Lukasiewicz Logic, Godel Logic and Product Logic. This Basic Logic (BL for short) is proposed as "the most general "many-valued logic with truth values in [0,1] and BL-algebras are the corresponding Lindenbaum-Tarski algebras. The second one was to provide an algebraic mean for the study of continuous t-norms (or triangular norms) on [0, 1]. Most familiar example of a BL-algebra is the unit interval [0,1] endowed with the structure induced by a continuous t-norm.

The filter theory plays a fundamental role in the general development of BL-algebras. From a logical point of view, various filters correspond to various sets of provable formulas. Some types of filters in BL-algebras based on logical algebras have been widely studied. For example, Turunen introduced the notions of implicative filters and Boolean filters and proved that these notions are equivalent in BL-algebras. Boolean filters are important class of filters, because the quotient BL-algebra induced by these filters are Boolean algebras. Heveshki and Eslami introduced the notions of n-fold implicative filters and n-

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

fold positive implicative filters and they prove some relations between these filters and construct quotient algebras via these filters in 2008. Also, Motamed and Borumand Saeid introduced the notion of n-fold obstinate filters in 2011. Moreover, the Lele studied the notions of fuzzy n-fold (positive) implicative filters and fuzzy n-fold obstinate filters in BL-algebras. In 2019, Paad and Borzooei introduced the notion of semi maximal filters and in BL-algebras and obtained some properties of this filters in BL-algebras.

Results

In this paper, firstly, the concept of the fuzzy semi maximal filters in BL-algebras has been introduced, then several properties of fuzzy semi maximal filters have been studied and its relationship with other type fuzzy filters including fuzzy (positive)implicative fuzzy filters and fuzzy fantastic filters are investigated. In the following, by using the level subsets of fuzzy sets in a BL-algebra, fuzzy semi maximal filters have been studied. It has also been proved that a fuzzy filter is a fuzzy semi maximal filters if and only if all nonempty level subsets are semi maximal filters. In addition, it proves that the preimage of a semi maximal fuzzy filter under the BL-homomorphism and the image of a fuzzy semi maximal filter under the BL-isomorphism, is also a fuzzy semi maximal filter. Also, the extension property has been proved for fuzzy semi maximal filters in BL-algebras. Finally, the relationships between the fuzzy semi maximal filters and semi simple BL-algebras have been studied.

How to cite: Paad, A., (2022) Some results on fuzzy semi maximal filters in BL-algebras. *Mathematical Researches*, 8 (3), 27-43

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نتایجی بر فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها

اکبر پاد[1] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران. پست الکترونیکی: akbar.paad@gmail.com

اطلاعات مقاله **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
BL- جبر،
فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی،
BL- جبر نیم‌ساده،
BL- همریختی.

در این مقاله ابتدا مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها معرفی شده، سپس چندین ویژگی از فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی وارتباط آن با سایر فیلترهای فازی ازجمله فیلترهای استلزامی (مثبت)n-لایهٔ فازی و خارق‌العاده n-لایه فازی بیان شده است. در ادامه با استفاده از زیرمجموعه‌های برش از مجموعه‌های فازی در یکBL-جبر، فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی مورد بررسی قرار داده شده است. همچنین در ادامه ثابت می‌شود که یک فیلتر فازی یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است اگر و تنها اگر تمام زیر مجموعه‌های برش ناتهی از آن فیلتر نیم‌ماکسیمال باشند. به‌علاوه، ثابت می‌شود که تصویر وارون یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت همریختی BL-جبرها یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است. به علاوه تصویریک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت یکریختی BL-جبرها، نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است. همچنین خاصیت توسیع برای فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی درBL-جبرها نیز ثابت شده است.سرانجام روابط بین فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی وBL-جبرهای نیم‌ساده مطالعه شده است.

استناد: پاد، اکبر؛ (۱۴۰۱). نتایجی بر فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۴۳-۲۷.

© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

مقدمه

BL-جبرها اولین بار توسط هایک [۱۲] مطرح شدند. انگیزهٔ او برای معرفیBL-جبرها، از دو دیدگاه قابل بررسی بود. اولین انگیزهٔ او ارائه یک ساختار جبری متناظر با منطق گزاره‌ای آن بود که منطق پایهٔ (به اختصار BL) نامیده می‌شد و اکثر منطق‌های چند ارزشی مهم از قبیل لوکاسویچ، منطق گودل و منطق ضرب را شامل می‌شد. دیدگاه دوم او به ارائه یک مدل جبری، برای مطالعه t-نرم‌های پیوسته (یا نرم‌های مثلثی) روی بازهٔ [0,1] مربوط می‌شد. در سال ۱۹۵۸، چانگ [۲] مفهوم MV-جبرها را معرفی کرد که یک زیرکلاس از BL-جبرها است. تورنن [۱۵،۱۶] نظریهٔ فیلترها در BL-جبرها را مورد مطالعه قرار داد و مفهوم فیلترهای استلزامی و فیلترهای بولی را معرفی کرد. فیلترهای بولی از آن جهت مهم هستند که BL-جبر خارج قسمتی القا شده به وسیلهٔ آنها، یک جبر بولی است. هاوشکی و اسلامی [۶] مفاهیم فیلتر استلزامی n-لایه و فیلتر استلزامی مثبت n-لایه را معرفی کردند و جبرخارج قسمتی القا شده توسط این فیلترها را در BL-جبرها مورد مطالعه قراردادند. همچنین، معتمد و برومند سعید [۴] مفهوم فیلتر سرسخت n-لایه را در سال ۲۰۱۱ معرفی کردند. به علاوه، له‌له [۸،۹] مفهوم فیلتر استلزامی (مثبت) n-لایه فازی و فیلتر سرسخت n-لایه فازی را در BL-جبرها معرفی ومورد مطالعه قرار داد. در سال ۲۰۱۲، برزویی و پاد[۱۳] مفهوم فیلترهای صحیح n-لایه، BL-جبرهای n-لایه و BL-جبرهای سرسخت n-لایه را معرفی و مورد مطالعه قرار دادند. دراین مقاله ابتدا مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها را معرفی کرده، سپس چندین ویژگی از فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی را بیان می‌کنیم. در ادامه با استفاده از زیرمجموعه‌های برش از مجموعه‌های فازی در یک BL-جبر، فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه، ثابت می‌کنیم که تصویر وارون یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت همریختی BL-جبرها و همچنین تصویر یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت یکریختی BL-جبرها، نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است. سرانجام روابط بین فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و BL-جبرهای نیم‌ساده را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

پیش‌نیازها

این بخش شامل تعاریف، قضایا و نتایجی است که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز داریم و از مراجع [۳،۱۲] آورده شده است.

تعریف۱. یک جبر $(L,\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,0,1)$، از نوع(۲،۲،۲،۲،۰،۰) یک BL-جبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x,y,z\in L$ در شرایط زیر صدق کند:

(BL1)$(L,\vee,\wedge,0,1)$ یک مشبکه کران‌دار باشد،

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

(BL2) $(L,\odot,1)$ یک تکواره تعویض‌پذیر باشد،

(BL3) $z\le x\to y$ اگر و تنها اگر $x\odot z\le y$،

(BL4) $x\wedge y = x\odot(x\to y)$،

(BL5) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$.

فرض کنید n یک عدد طبیعی و $x,y\in L$ باشد. در این صورت منظور از x^n عبارت $\overbrace{x\odot x\odot\dots\odot x}^{n-\text{بار}}$ و $x^- = x\to 0$ است و همچنین عبارت $\underbrace{(x\to(\dots(x\to(x\to y))\dots)}_{n-\text{بار}}$ را با نماد $x^n\to y$ نشان می‌دهیم. به علاوه عنصر $x\in L$ پوچ توان نامیده می‌شود هرگاه عدد طبیعی m موجود باشد به طوری‌که $x^m=0$.

یک BL-جبر L، یک جبر گودل نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x\in L$، $x^2=x\odot x=x$ و همچنین L یک BL-جبرخطی نامیده می‌شود هرگاه L یک زنجیر باشد به عبارت دیگر هر دو عضو آن قابل مقایسه باشند.

گزارهٔ ۲. در هر BL-جبر L خواص زیر برای هر $x,y,z\in L$ برقرار هستند:

(BL6) $x\le y$ اگر و تنها اگر $x\to y=1$،

(BL7) $x^{n+1}\le x^n$، برای هر $n\in\mathbb{N}$،

(BL8) اگر $x\le y$، آن‌گاه $y\to z\le x\to z$ و $z\to x\le z\to y$،

(BL9) $0\le x$، $1\to x=x$ و $x\to x=1$.

قضایا و تعاریف زیر از مراجع [۱،۲،۳،۵،۷،۹،۱۱،۱۳،۱۴] آورده شده‌اند و خواننده برای اطلاعات بیشتر به آنها رجوع کند.

تعریف ۳. فرض کنید L یک BL-جبر و F یک زیرمجموعهٔ ناتهی از L و $n\in\mathbb{N}$ باشد. در این صورت

۱) F یک فیلتر از L نامیده می‌شود، هرگاه $x\odot y\in F$، برای هر $x,y\in F$ و اگر $x\in F$ و $x\le y$، آن‌گاه $y\in F$، برای هر $x,y\in L$.

۲) F یک فیلتر استلزامی n-لایه از L نامیده می‌شود، هرگاه $1\in F$ و برای هر $x,y,z\in L$، اگر $x^n\to y\in F$ و $(x^n\to y)\to z\in F$، آن‌گاه $x^n\to z\in F$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

۳) F یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه از L نامیده می‌شود، هرگاه $1 \in F$ وبرای هر $x, y, z \in L$، اگر $x \in F$ و $x \to ((y^n \to z) \to y) \in F$، آن‌گاه $y \in F$.

۴) F یک فیلتر خارق‌العاده n-لایه از L نامیده می‌شود، هرگاه $1 \in F$ و برای هر $x, y, z \in L$، اگر $z \to (y \to x) \in F$ و $z \in F$، آن‌گاه $(((x^n \to y) \to y) \to x) \in F$.

۵) فرض کنید F یک فیلترسره از L باشد. در این صورت اشتراک همه فیلترهای ماکسیمال شامل F رادیکال فیلتر F نامیده و با نماد $Rad(F)$ نشان داده می‌شود و به علاوه ثابت می‌شود:

$$Rad(F) = \{x \in L | (x^n)^- \to x \in F, \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

لازم به ذکر است $F \subseteq Rad(F)$ و در صورتی که $F = L$ آن‌گاه $Rad(L) = L$.

۶) فیلتر F یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L نامیده می‌شود، هرگاه. $F = Rad(F)$

قضیهٔ ۴. فرض کنید F یک فیلتر از BL-جبر L باشد. در این صورت رابطهٔ دوتایی $\equiv_F$ روی L که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک رابطهٔ هم‌نهشتی روی L است.

$$x \equiv_F y \text{ اگر و تنها اگر } x \to y \in F \text{ و } y \to x \in F$$

به علاوه اگر روی $\frac{L}{F}$ که مجموعهٔ همهٔ کلاس‌های هم‌نهشتی ایجاد شده توسط فیلتر F است اعمال دوتایی $\cdot$، $\rightharpoonup$، $\sqcup$ و $\sqcap$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$[x].[y] = [x \odot y], \qquad [x] \rightharpoonup [y] = [x \to y], [x] \sqcup [y] = [x \vee y],$$
$$[x] \sqcap [y] = [x \wedge y]$$

در این صورت $(\frac{L}{F}, \cdot, \rightharpoonup, \sqcup, \sqcap, [0], [1])$ یک BL-جبر است که BL-جبرخارج قسمتی روی F نامیده می‌شود.

تعریف ۵. فرض کنید L یک BL-جبر و $n \in \mathbb{N}$ باشد. در این صورت

۱) L یک BL-جبر سرسخت n-لایه نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in L$، $(x^-)^- = x$، و همچنین برای هر $x \in L \backslash \{1\}$، $x^n = 0$.

۲) L یک BL-جبر نیم ساده نامیده می‌شود، هرگاه

$$Rad(\{1\}) = \{1\}$$

قضیهٔ ۶. فرض کنید F یک فیلتر از BL-جبر L و $n \in \mathbb{N}$ دلخواه باشد.

۱) اگر F یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه از L باشد، آن‌گاه F یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

۲) اگر F یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L باشد، آن‌گاه F یک فیلتر خارق العاده از L است.

۳) اگر L یک جبر گودل و F یک فیلتر خارق العاده از L باشد، آن‌گاه F یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است.

۴) اگر L خطی و F یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L باشد، آن‌گاه F یک فیلتر ماکسیمال از L است.

۵) F یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است اگروتنها اگر $\frac{L}{F}$ یک BL-جبر نیم ساده باشد.

تعریف۷. فرض کنید L_1 و L_2 دو BL-جبر باشند. دراین‌صورت نگاشت $f: L_1 \to L_2$ یک BL-همریختی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر نگاشت f برای هر $x, y \in L_1$ ،در شرایط زیر صدق کنند:

۱) $f(0) = 0$،

۲) $f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$،

۳) $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$.

به علاوه اگر f دوسویی باشد، آن‌گاه همریختی f ،یک BL-یکریختی نامیده می‌شود و به صورت $L_1 \cong L_2$ نشان داده می‌شود. همچنین هستهٔ همریختی f نیز به صورت $ker(f) = \{x \in L_1 | f(x) = 1\}$ تعریف می‌شود.

در ادامه به بیان برخی از نتایج فازی که از مراجع [۸،۱۱،۱۲] آورده شده است می‌پردازیم.

تعریف۸ . ۱) فرض کنید L_1 و L_2 دو مجموعه، μ یک زیرمجموعهٔ فازی از L_1، η یک زیرمجموعهٔ فازی از L_2 و $f: L_1 \to L_2$ یک همریختی باشند. در این صورت تصویر μ تحت f یک مجموعهٔ فازی از L_2 است و با $f(\mu)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر برای هر $y \in L_2$. تعریف می‌شود:

اگر $f^{-1}(y) \neq \emptyset$، آن‌گاه $f(\mu)(y) = sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x)$

و اگر $f^{-1}(y) = \emptyset$، آن‌گاه $f(\mu)(y) = 0$.

تصویر وارون η تحت f نیز یک مجموعهٔ فازی از L_1 است و با $f^{-1}(\eta)$ نشان داده می‌شود و برای هر $x \in L_1$ به صورت $f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$ تعریف می‌شود.

۲) مجموعهٔ فازی μ از L_1،دارای خاصیت سوپریمم (***sup***) است، هرگاه برای هر زیر مجموعهٔ ناتهی Y از L_1 عنصری مانند $y_0 \in Y$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\mu(y_0) = sup_{y \in Y} \mu(y)$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

۳) برای مجموعۀ فازی μ از L_1، مجموعه $\mu_t = \{x \in L_1 | \mu(x) \geq t\}$، ($t \in [0,1]$) مجموعۀ تراز نامیده می‌شود. به علاوه اگر ν, λ دو مجموعۀ فازی L_1 از باشند که $\nu \subseteq \lambda$، آن‌گاه که $\nu_t \subseteq \lambda_t$، برای هر $t \in [0,1]$.

تعریف۹. فرض کنید L یک BL-جبر و $\mu: L \to [0,1]$ یک مجموعۀ فازی روی L باشد. در این صورت:

۱) μ یک فیلتر فازی از L نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in L$:

الف) $\mu(x) \leq \mu(1)$،

ب) $\mu(x \to y) \wedge \mu(x) \leq \mu(y)$.

۲) μ یک فیلتر استلزامی n-لایه فازی از L نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر $x, y, z \in L$:

الف) $\mu(x) \leq \mu(1)$،

ب) $\mu(x^n \to (y \to z)) \wedge \mu(x^n \to y) \leq \mu(x^n \to z)$.

در یک جبر گودل مفاهیم فیلترهای فازی، و فیلترهای استلزامی فازی بر هم منطبق هستند.

۳) μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی از L نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر $x, y, z \in L$،

الف) $\mu(x) \leq \mu(1)$ ،

ب) $\mu\left(x \to \left((y^n \to z) \to y\right)\right) \wedge \mu(x) \leq \mu(y)$.

۴) فیلتر فازی μ یک فیلتر سرسخت n-لایه فازی از L نامیده می‌شود، اگروتنهااگر برای هر $x, y \in L$ ،

$$min\{\mu(x^n \to y), \mu(y^n \to x)\} \geq min\{1 - \mu(x), 1 - \mu(y)\}$$

لم۱۰. فرض کنید L یک BL-جبر و μ یک فیلتر فازی از L باشد. دراین‌صورت شرایط زیر برای هر $x, y \in L$ برقرار هستند:

۱) اگر $x \leq y$، آن‌گاه $\mu(x) \leq \mu(y)$، به عبارت دیگر μ حافظ ترتیب است.

۲) اگر $\mu(x \to y) = \mu(1)$، آن‌گاه $\mu(x) \leq \mu(y)$.

قضیۀ۱۱. فرض کنید L یک BL-جبر، $n \in \mathbb{N}$ و μ یک مجموعۀ فازی از L باشد.دراین صورت:

۱) μ یک فیلتر فازی از L است اگر و تنها اگر $\emptyset \neq \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$، یک فیلتر از L باشد.

۲) μ یک فیلتر خارق‌العاده(استلزامی مثبت) n-لایه فازی از L است اگروتنهااگر $\emptyset \neq \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$، یک فیلتر خارق‌العاده (استلزامی مثبت) n-لایه از L باشد.

۳) μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی از L است اگر و تنها اگر μ یک فیلتر فازی باشد و برای هر $x \in L$ ،

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

$$\mu((x^n \to 0) \to x) \le \mu(x).$$

۴) اگر μ یک فیلتر خارق‌العاده n-لایه فازی از L باشد، آن‌گاه μ یک فیلتر خارق‌العاده (n+1)-لایه فازی از L است.

۵) μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی از L است اگر و تنها اگر μ یک فیلتر استلزامی n-لایهٔ فازی و خارق‌العاده n-لایه فازی از L باشد.

نکته. همهٔ احکام قضیهٔ ۱۱ در حالتی که $n = 1$ باشد نیز برقرار است. لازم به ذکر است که از این به بعد درسراسر این مقاله فرض می‌کنیم L یک BL-جبر است مگر خلاف آن بیان شود.

فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها

در این بخش، ما مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی را معرفی می‌کنیم و به مطالعهٔ خواص آنها می‌پردازیم.

تعریف۱۲. فرض کنید μ یک فیلتر فازی از L باشد. دراین‌صورت μ یک فیلتر **نیم‌ماکسیمال فازی** نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in L$، در شرط زیر صدق کند:

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x) | \, n \in \mathbb{N}\} \le \mu(x)$$

مثال ۱۳. فرض کنید $L = \{0, a, b, 1\}$ یک زنجیر با رابطهٔ $0 < a < b < 1$ و $x \wedge y = min\{x, y\}$، $x \vee y = max\{x, y\}$ و همچنین اعمال دوتایی $\to$ و $\odot$ را نیز به کمک جداول زیر تعریف کنیم:

جدول ۱.

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	a	b
1	0	a	b	1

جدول۲.

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	b	1	1
1	0	a	b	1

در این صورت $(L, \vee, \wedge, \odot, \to, 0, 1)$ یک BL-جبراست. اکنون فرض کنید مجموعهٔ فازی μ از L به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu(0) = t_1, \mu(1) = \mu(a) = \mu(b) = t_2$$

$$0 \le t_1 \le t_2 \le 1$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

دراین‌صورت μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

قضیهٔ ۱۴. *فرض کنید μ یک فیلتر فازی از L باشد. در این صورت μ فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است اگر و تنها اگر برای هر $t \in [0,1]$، $\mu_t \neq \emptyset$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L باشد.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد و $\mu_t \neq \emptyset$،$t \in [0,1]$. در این صورت بنابر قضیهٔ ۱۱(۱)، μ_t یک فیلتر از L است، و لذا بنابر تعریف ۳، $\mu_t \subseteq Rad(\mu_t)$. حال فرض کنید $x \in Rad(\mu_t)$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(x^n)^- \to x \in \mu_t$. بنابراین $\mu((x^n)^- \to x) \geq t$، برای هر $n \in \mathbb{N}$. در نتیجه

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x) | n \in \mathbb{N}\} \geq t$$

حال چون μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است. پس $inf\{\mu((x^n)^- \to x) | n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$. لذا $\mu(x) \geq t$. در نتیجه خواهیم داشت $x \in \mu_t$ و بنابراین $Rad(\mu_t) \subseteq \mu_t$. لذا $\mu_t = Rad(\mu_t)$ و در نتیجه μ_t برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است.

برعکس، فرض کنید برای هر $t \in [0,1]$، $\mu_t \neq \emptyset$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال باشد. دراین‌صورت نشان می‌دهیم μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است. فرض کنید چنین نباشد، به‌عبارت دیگر عنصر $a \in L$ وجود دارد به طوری‌که

$$inf\{\mu((a^n)^- \to a) | n \in \mathbb{N}\} > \mu(a)$$

قرار دهید:

$$\beta = inf\{\mu((a^n)^- \to a) | n \in \mathbb{N}\}$$

لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت $\mu(a) < \beta \leq \mu((a^n)^- \to a)$. حال فرض کنید $t_0 = \frac{1}{2}\{\beta + \mu(a)\}$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu(a) < t_0 \leq \mu((a^n)^- \to a)$. درنتیجه $(a^n)^- \to a \in \mu_{t_0}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$. بنابراین $a \in Rad(\mu_{t_0})$. حال چون μ_{t_0} یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است، لذا خواهیم داشت:

$Rad(\mu_{t_0}) = \mu_{t_0}$، پس $a \in \mu_{t_0}$. درنتیجه $\mu(a) > t_0$، که یک تناقض است. بنابراین برای هر $x \in L$،

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x) | n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

در نتیجه، μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

قضیهٔ ۱۵. *فرض کنید μ یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از L باشد. در این صورت μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از L باشد. دراین‌صورت μ یک فیلتر استلزامی مثبت 1-لایه فازی است و لذابنابر قضیهٔ ۱۱(۳) به ازای $n = 1$ نتیجه می‌گیریم $\mu(x^- \to x) = \mu((x^1 \to 0) \to x) \leq \mu(x)$، برای هر $x \in$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

L.حال چون بنابر $(BL7)$، $x \le x^n$، برای هر $n \in \mathbb{N}$،لذا بنابر $(BL8)$، $x^- \le (x^n)^-$ ودر نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(x^n)^- \to x \le x^- \to x$. از طرفی چون μ یک فیلتر فازی است، لذا بنابر لم۱۰(۱)، $\mu((x^n)^- \to x) \le$ $\mu(x^- \to x)$، برای هر $n \in \mathbb{N}$. درنتیجه

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x)|\, n \in \mathbb{N}\} \le \mu(x^- \to x)$$

چون $\mu(x^- \to x) \le \mu(x)$ ،درنتیجه

$$in\, f\{\mu((x^n)^- \to x)|\, n \in \mathbb{N}\} \le \mu(x)$$

بنابراین μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

قضیهٔ ۱۶. *فرض کنید μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی از L باشد. در این صورت μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی از L باشد. در این صورت بنابر قضیهٔ ۱۱(۲)، $\emptyset \ne \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه از L است. در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۶ (۱) ، $\emptyset \ne \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است و لذا بنابر قضیهٔ ۱۴، μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

نکته . با درنظر گرفتن $n = 1$ در قضیهٔ ۱۶ نتیجه می‌گیریم که هر فیلتر استلزامی مثبت فازی نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است.

قضیهٔ ۱۷. *فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد. در این‌صورت μ یک فیلتر خارق‌العاده فازی از L است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد. دراین‌صورت بنا بر قضیهٔ ۱۴، $\emptyset \ne \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است. درنتیجه بنابر قضیهٔ ۶ (۲)،$\emptyset \ne \mu_t$ برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر خارق‌العاده از L است و بنابراین بنابر قضیهٔ ۱۱(۲)، μ یک فیلتر خارق‌العاده فازی از L است.

نتیجهٔ ۱۸. *هر فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L، یک فیلتر خارق‌العاده n-لایه فازی از L است.*

برهان: از قضیهٔ۱۱(۴) و قضیهٔ۱۷، حکم برقرار می‌شود.

قضیهٔ ۱۹. *فرض کنید L یک جبر گودل و μ یک فیلتر فازی از L باشد. در این صورت μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است اگر و تنها اگر μ یک فیلتر خارق‌العاده فازی از L باشد.*

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد.در این صورت بنا بر قضیهٔ۱۷، μ یک فیلتر خارق‌العاده فازی از L است. برعکس، فرض کنید μ یک فیلتر خارق‌العاده فازی از L باشد. دراین‌صورت بنابر قضیهٔ۱۱(۲)، $\emptyset \neq \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر خارق‌العاده از L است. حالچون L یک جبر گودلاست، دراین‌صورت بنابر قضیهٔ۶(۳)، $\emptyset \neq \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است. در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۱۴، μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

قضیهٔ۲۰. *فرض کنید L یک جبر گودلو μ یک فیلتر فازی از L باشد. در این صورت μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است اگر و تنها اگر μ یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از L باشد.*

برهان: فرض کنید L یک جبر گودل و μ یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از L باشد. در این صورت بنابر قضیهٔ ۱۶،μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است. برعکس، فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد. در این صورت بنا بر قضیهٔ ۱۹،μ یک فیلتر خارق‌العاده فازی از L است و چون L یک جبر گودل است، پس هر فیلتر فازی از L یک فیلتر استلزامی فازی است. بنابراین بنا بر قضیهٔ۱۱(۵)، μ یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از L است.

قضیهٔ ۲۱. ***(خاصیت توسیع برای فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی)*** *فرض کنید μ و η فیلترهای فازی غیر بدیهی از BL-جبرخطی L باشند به طوری که $\mu \subseteq \eta$ و $\mu(1) = \eta(1)$. در این صورت اگر μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی باشد، آن‌گاه η نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از BL-جبر خطی L باشد. در این صورت بنا بر قضیهٔ ۱۴، $\emptyset \neq \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است و چون $\mu \subseteq \eta$، لذا $\mu_t \subseteq \eta_t$، برای هر $t \in [0,1]$. چون μ_t یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از BL-جبرخطی L است، در این صورت بنا بر قضیهٔ۶ (۴)،$\emptyset \neq \mu_t$، برای هر $t \in [0,1]$یک فیلتر ماکسیمال است. بنابراین $\mu_t = \eta_t$ یا $\eta_t = L$. حال اگر $\mu_t = \eta_t$ ، آن‌گاه چون μ_t یک فیلتر نیم‌ماکسیمال است، پس $Rad(\eta_t) = Rad(\mu_t) = \mu_t = \eta_t$ و اگر هم $\eta_t = L$، آن‌گاه $L = Rad(L)$. در نتیجه $\emptyset \neq \eta_t$، برای هر $t \in [0,1]$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از L است. لذا بنا بر قضیهٔ۱۴، η یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

قضیهٔ ۲۲. *فرض کنید μ یک فیلتر فازی از L باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:*

۱) *μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی است؛*

۲) *μ یک فیلتر استلزامی n-لایه فازی و خارق‌العاده n-لایهٔ فازی است؛*

۳) *μ یک فیلتر استلزامی n-لایه فازی و نیم‌ماکسیمال فازی است.*

برهان: (۲)$\Leftrightarrow$(۱):بنابر قضیهٔ۱۱(۵)، حکم برقرار است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

(۳)⇒(۲): فرض کنید μ یک فیلتر استلزامی n-لایه فازی و فیلتر خارق‌العاده n-لایه فازی از L باشد. در این صورت بنابر قضیهٔ۱۱(۶)، μ یک فیلتر استلزامی مثبت n-لایه فازی از L است. لذا بنابر قضیهٔ ۱۶، μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

(۲)⇒(۳): بنابر نتیجه ۱۸، حکم برقرار است.

نتیجهٔ ۲۳. *فرض کنید μ یک فیلتر فازی از L باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:*

۱) *μ یک فیلتر استلزامی مثبت فازی است؛*

۲) *μ یک فیلتر استلزامی فازی و فیلتر خارق‌العاده فازی است؛*

۳) *μ یک فیلتر استلزامی فازی و فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است.*

برهان: فرض کنید در قضیهٔ۲۲، $n = 1$ باشد. در این صورت حکم برقرار است.

قضیهٔ ۲۴. *فرض کنید $f: L_1 \to L_2$ یک BL-همریختی و μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_2 باشد. در این صورت $f^{-1}(\mu)$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_1 است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_2 باشد و $x \in L_1$. در این صورت بنا بر تعریف همریختی f

$$inf\{f^{-1}(\mu)((x^n)^- \to x) \mid n \in \mathbb{N}\} = inf\{\mu\big(f((x^n)^- \to x)\big)\big| \, n \in \mathbb{N}\}$$
$$= inf\left\{\mu\left(\left(\left(f(x)\right)^n\right)^- \to f(x)\right)\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \leq \mu(f(x)) = f^{-1}(\mu)(x)$$

بنابراین، $f^{-1}(\mu)$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_1 است.

قضیهٔ ۲۵. *فرض کنید $f: L_1 \to L_2$ یک BL-یکریختی و μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_1 با خاصیت سوپریمم (**sup**) باشد.در این صورت $f(\mu)$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_2 است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_2، $y \in L_2$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد. در این صورت چون f یک BL-یکریختی است و μ خاصیت سوپریمم دارد، لذا عناصر $x_1 \in f^{-1}((y^n)^- \to y)$ و $x_2 \in f^{-1}(y)$ وجود دارد به طوری که

$$f(\mu)((y^n)^- \to y) = \sup_{t \in f^{-1}((y^n)^- \to y)} \mu(t) = \mu(x_1)$$

$f(\mu)(y) = \sup_{k \in f^{-1}(y)} \mu(k) = \mu(x_2)$. به علاوه، چون $x_1 \in f^{-1}((y^n)^- \to y)$ و $x_2 \in f^{-1}(y)$، لذا

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

$f(x_1) = (y^n)^- \to y$ و $f(x_2) = y$. بنابراین، خواهیم داشت:

$$f(x_1) = (y^n)^- \to y = ((f(x_2))^n)^- \to f(x_2) = f(((x_2)^n)^-) \to f(x_2) = f((x_2^n)^- \to x_2).$$

حال چون f یک BL-یکریختی است، پس $x_1 = (x_2^n)^- \to x_2$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. در نتیجه

$$f(\mu)((y^n)^- \to y) = \mu(x_1) = \mu((x_2^n)^- \to x_2)$$

و چون μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_1 است، لذا

$$inf\{f(\mu)(y^n)^- \to y) \mid n \in \mathbb{N}\} = inf\{\mu((x_2^n)^- \to x_2) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x_2) = f(\mu)(y)$$

بنابراین، $f(\mu)$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از $L_۲$ است.

گزارهٔ ۲۶. فرض کنید $f: A \to B$ یک BL-همریختی و μ یک فیلترفازی از A باشد. در این‌صورت A_μ یک فیلتر از A است.

$$A_\mu = \{x \in A | \mu(x) = \mu(1)\}$$

برهان. بنابر تعریف۳ و قضیهٔ ۱۱حکم برقرار است.

نکته. در قضیهٔ ۲۵ شرایط زیادی وجود دارد تا تصویر یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی شود، لذا در قضیهٔ بعدی اندکی این شرایط را کاهش می‌دهیم.

قضیهٔ ۲۷. *فرض کنید $f: L_1 \to L_2$ یک BL-همریختی پوشا و μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_1 باشد به‌طوری‌که $ker(f) \subseteq A_\mu$. در این صورت $f(\mu)$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_2 است.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $f(\mu)$ یک فیلتر فازی از L_2 است. فرض کنید $y \in L_2$. در این صورت چون f پوشا است پس $x \in L_1$

موجود است به طوری‌که $f(x) = y$ و همچنین

$$f(\mu)(y) = \sup_{t \in f^{-1}(y)} \mu(t)$$

حال چون μ یک فیلتر فازی از $L_۱$ است، پس برای هر $a \in L_1$، $\mu(a) \leq \mu(1)$ و بنابراین

$$f(\mu)(y) = \sup_{t \in f^{-1}(y)} \mu(t) \leq \mu(1)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

از طرفی چون $f(\mu)(1) = \mu(1)$، پس $f(\mu)(y) \le f(\mu)(1)$ ، برای هر $y \in L_2$. حال فرض کنید $z, w \in L_2$ موجودند به طوری‌که

$$f(\mu)(z \to w) \wedge f(\mu)(z) > f(\mu)(w)$$

بنار پوشایی f، عناصر $a, b \in L_1$، موجودند به طوری‌که $f(a) = z$ و $f(b) = w$ و در نتیجه $f(a \to b) = z \to w$. حال اگر $t \in f^{-1}(z \to w)$، آن‌گاه $f(t) = z \to w$ و بنابراین $f(a \to b) = f(t)$. حال چون f یک همریختی است، پس $f((a \to b) \to t) = f(1)$ و $f(t \to (a \to b)) = f(1)$. در نتیجه، $(a \to b) \to t \in \ker(f)$ و $t \to (a \to b) \in \ker(f)$ و چون بنابر فرض $\ker(f) \subseteq A_\mu$، پس $\mu((a \to b) \to t) = \mu(1)$ و $\mu(t \to (a \to b)) = \mu(1)$. حال بنابر لم ۱۰(۲)، $\mu(a \to b) \le \mu(t)$ و $\mu(a \to b) \ge \mu(t)$ و بنابراین $\mu(t) = \mu(a \to b)$. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر $t \in f^{-1}(z \to w)$، خواهیم داشت $\mu(t) = \mu(a \to b)$ به‌طوری‌که $f(a \to b) = z \to w$. بنابراین،

$$f(\mu)(z \to w) = \sup_{t \in f^{-1}(z \to w)} \mu(t) = \mu(a \to b)$$

اکنون چون f پوشا است و $b \in f^{-1}(w)$، $a \in f^{-1}(z)$ و $\ker(f) \subseteq A_\mu$، با استدلالی مشابه، نتیجه می‌گیریم که

$$f(\mu)(w) = \sup_{u \in f^{-1}(w)} \mu(u) = \mu(b), f(\mu)(z) = \sup_{l \in f^{-1}(z)} \mu(l) = \mu(a).$$

در نتیجه بنا بر نامساوی $f(\mu)(z \to w) \wedge f(\mu)(z) > f(\mu)(w)$ خواهیم داشت $\mu(a \to b) \wedge \mu(a) > \mu(b)$، که این مطلب با فیلتر فازی بودن μ در تناقض است. بنابراین $f(\mu)$ یک فیلتر فازی از L_2 است. حال نشان می‌دهیم $f(\mu)$ یک فیلترنیم‌ماکسیمال فازی از L_2 است. فرض کنید $y \in L_2$. دراین‌صورت چون f پوشا است پس $x \in L_1$ موجود است به طوری‌که $f(x) = y$ ، به علاوه با توجه به این‌که $ker(f) \subseteq A_\mu$ و $x \in f^{-1}(y)$ و این‌که برای هر عدد طبیعی n، $(x^n)^- \to x \in f^{-1}((y^n)^- \to y)$، مطابق استدلال فوق خواهیم داشت:

$$f(\mu)(y) = \sup_{r \in f^{-1}((y^n)^- \to y)} \mu(r) = \mu(x)$$

$$f(\mu)((y^n)^- \to y) = \sup_{s \in f^{-1}((y^n)^- \to y)} \mu(s) = \mu((x^n)^- \to x)$$

و چون μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_1 است، پس

$$inf\{f(\mu)(y^n)^- \to y) \mid n \in \mathbb{N}\} = inf\{\mu((x^n)^- \to x) \mid n \in \mathbb{N}\} \le \mu(x) = f(\mu)(y)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

بنابراین،$f(\mu)$ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L_2 است.

فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و BL-جبرهای نیم‌ساده

در این بخش، ما روابط بین فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و BL-جبرهای نیم‌ساده را مطالعه می‌کنیم.

قضیهٔ۲۸. *فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد. در این صورت برای هر* $x \in Rad(\{1\})$ ،

$$\mu(x) = \mu(1).$$

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی ازLو$x \in Rad(\{1\})$ باشد. دراین‌صورت $(x^n)^- \to x = 1$، برای هر $n \in \mathbb{N}$. بنابراین $\mu((x^n)^- \to x) = \mu(1)$، برای هر $n \in \mathbb{N}$. در نتیجه

$$\mu(1) = inf\{\mu((x^n)^- \to x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

به علاوه، چون μ یک فیلتر فازیازLاست، در این صورت $\mu(x) \leq \mu(1)$. بنابراین برای هر $x \in Rad(\{1\})$، $\mu(x) = \mu(1)$.

قضیهٔ ۲۹. *فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L و نیزμ یک نگاشت یک به یک باشد. در این صورت L یک BL-جبر نیم‌ساده است.*

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L و $x \in Rad(\{1\})$ باشد. در این صورت بنا بر قضیهٔ ۲۸، $\mu(x) = \mu(1)$. حال چون μ یک نگاشت یک‌به‌یک است، در این صورت $x = 1$، لذا $Rad(\{1\}) = \{1\}$. بنابراین L یک BL-جبر نیم‌ساده است.

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط یک به یک بودن یک شرط ضروری است.

مثال ۳۰. فرض کنید L، BL-جبر مثال ۱۲ باشد. در این صورت با توجه به تعریف، μ یک نگاشت یک به یک نیست. از طرفی L یک جبر نیم ساده هم نیست، زیرا $1 \neq a \in Rad(\{1\})$ و بنابراین،$Rad(\{1\}) \neq \{1\}$.

قضیهٔ۳۱. *فرض کنید μ یک فیلتر فازی از L و هر عنصر غیر از 1 پوچ توان باشد. در این صورت μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.*

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

برهان: فرض کنید μ یک فیلتر فازی از L باشد و $1 \neq x \in L$. در این صورت چون x پوچ توان است، پس عدد طبیعی m وجود دارد به‌طوری‌که $x^m = 0$. بنابراین $x^{m+k} = 0$، برای هر $k \in \mathbb{N}$. حال با توجه به تعریف اینفیمو (BL9) داریم:

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x) | \, n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \mu(x^- \to x) \wedge \ldots \wedge \mu((x^{m-1})^- \to x) \wedge \mu(((x^m)^- \to x) \wedge \mu((x^{m+1})^- \to x) \wedge \ldots$$

$$= \mu(x^- \to x) \wedge \ldots \wedge \mu((x^{m-1})^- \to x) \wedge \mu((0)^- \to x) \wedge \mu((0)^- \to x) \wedge \ldots$$

$$= \mu(x^- \to x) \wedge \ldots \wedge \mu((x^{m-1})^- \to x) \wedge \mu(x) \wedge \mu(x) \wedge \ldots$$

$$\leq \mu(x)$$

به علاوه اگر $x = 1$ ، آن‌گاه

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x) | \; n \in \mathbb{N}\} = inf\{\mu((1^n)^- \to 1) | \; n \in \mathbb{N}\} = \mu(1) \leq \mu(1)$$

بنابراین، μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

نتیجهٔ ۳۲. *فرض کنید L یک BL-جبر سرسخت n-لایه باشد. در این صورت هر فیلتر فازی از L یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.*

برهان: بنابر تعریف۵ و قضیهٔ ۳۰حکم برقرار است.

قضیهٔ ۳۳. فرض کنید A و B دو BL-جبر باشند به‌طوری‌که $B \cong A$ و A یک BL-جبر نیم‌ساده باشد. دراین‌صورت Bنیز یک BL-جبر نیم‌ساده است.

برهان: با توجه به تعریف۵، مستقیما ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳۴. *فرض کنید μ یک مجموعهٔ فازی از L باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

۱) L یک BL-جبر نیم‌ساده است؛

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

۲) *μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.*

برهان: (۲)⇐(۱): فرض کنید L یک BL-جبر نیم‌ساده باشد. در این صورت $Rad(\{1\}) = \{1\}$. واضح است که μ یک فیلتر فازی است. حال می‌خواهیم نشان دهیم برای هر $x \in L$،

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x)|\, n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. اگر $x \in L$ وجود داشته باشد به طوری‌که $(x^n)^- \to x = 1$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه $x \in Rad(\{1\})$. بنابراین $x = 1$. به‌علاوه، $\mu(x) = 1$. لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu((x^n)^- \to x) = 1$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x)|\, n \in \mathbb{N}\} = \mu(x) = 1$$

حالت دوم. اگر $x \in L$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(x^m)^- \to x \neq 1$، برای برخی $m \in \mathbb{N}$، آن‌گاه برای برخی $m \in \mathbb{N}$ $\mu((x^m)^- \to x) = 0$. در نتیجه

$$inf\{\mu((x^n)^- \to x)|\ n \in \mathbb{N}\} = 0 \leq \mu(x)$$

بنابراین، μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L است.

(۱)⇐(۲): فرض کنید μ یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از L باشد. در این صورت بنابر قضیهٔ ۱۴،

$$\mu_1 = \{x \in L|\mu(x) \geq 1\} = \{1\}$$

یک فیلتر نیم‌ماکسیمال است. بنابراین بنابر قضیهٔ۶ (۵)، $\frac{L}{\{1\}}$ یک BL-جبر نیم‌ساده است. حال چون $L \cong \frac{L}{\{1\}}$، پس بنا برقضیهٔ ۳۰، L یک BL-جبر نیم‌ساده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا مفهوم فیلتر های نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرهای معرفی شد و پس مطالعهٔ خواص آنها، ارتباط این نوع از فیلترهای فازی با سایر فیلترهای فازی دیگر مانند فیلترهای استلزامی n-لایه فازی، خارق العاده n-لایه فازی،... مورد بحث و بررسی قرار گرفت . از آن‌جا که استفاده از ساختارهای فازی بر روی فیلترها یا ایده‌آل‌ها در ساختار جبری منطقی تقریبا روندی مشابه دارند، لذا در این مقاله از اینفیموم نامتناهی برای تعریف این نوع فیلترها استفاده شد که در نوع خود

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

جدید و نیز با مفهوم برش‌ها در مجموعه‌های فازی نیز سازگار است و در قضایا بدان اشاره شد. در ادامه به کمک این نوع از فیلترهای فازی به مطالعه BL-جبرهای نیم ساده پرداخته شد. برای کارهای آینده به نظر می‌رسد استفاده از این نوع ساختار می‌توان برای تعریف فیلترهای(ایده‌آل‌های) نیم ماکسیمال فازی در دیگر ساختارهای جبری منطقی مانند EQ- جبرها، RL-جبرها، MV-جبرها، جبرهای هوپ و... استفاده نمود و همچنین مطالعهٔ برخی از این جبرهای منطقی به کمک این نوع از فیلترهای فازی از اهداف تحقیقاتی آینده خواهد بود.

قدردانی

از داوران محترم برای همهٔ نکات و توضیحاتی که ارائه کردند تا نسخهٔ اولیه از نظر کیفیت ارتقا پیدا کند و نگارش بهتری را داشته باشم نهایت سپاسگزاری و تشکر را دارم.

References

1. Borzooei R. A., Paad A., "Integral filters and Integral BL-algebras", Italian J. Pure Appl. Math. 30 (2013) 303-316.

2. Chang C. C., "Algebraic analysis of many valued logics ", Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958)467-490.

3. Di Nola A., Leustean L., "Compact representations of BL-algebras ", Department of Computer Science, University Aarhus. BRICS Report Series (2002).

4. Motamed S., Borumand Saeid A., "n-Fold obstinate filters in BL-algebras", Neural Comput and Applic, 20 (2011) 427-461.

5. Haveshki M., Borumand Saeid A., Eslami E., "Some types of filters in BL-algebras ", Soft Comput, 10 (2006) 657-664.

6. Haveshki M., Eslami E., "n-Fold filters in BL-algebras ", Math. Log. Quart. 54(2) (2008) 178-186.

7. Hájek P.," Metamathematics of fuzzy logic", Klower Academic Publishers, Dordrecht 1999.

8. Lele C., "Folding theory of positive implicative/fuzzy positive implicative filters in BL-algebras ", J. Fuzzy Math. 17(2), 633-641 (2009).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]

9. Lele C., "Fuzzy n-fold obstinate filters in BL-algebras ", Afr. Mat, 24(2013)127-133.

10. Lele C., Hyland M., "Folding theory for fantastic filters in BL-algebras ", Int.J. Art. Life Research, 2(4) (2011) 32-42 .

11. Liu L., Li K., "Fuzzy filters of BL-algebras ", Information Sciences 173 (2005) 141-154.

12. Liu L., Li K., "Fuzzy Boolean and positive implicative filters of BL-algebras ", Fuzzy Sets and Systems, 152 (2005) 141-154.

13. Paad A., Borzooei R. A., "Generalization of integral filters in BL-algebras and n-fold integral BL-algebras ",Afr. Mat. 26 (7-8) (2015) 1299-1311.

14. Paad A., Borzooei R. A., "On semi maximal filters in BL-algebras", Journal of Algebraic Systems,6(2) (2019) 101-116.

15. Turunen E., "BL-algebras and basic fuzzy logic ", Mathware Soft Comput, 6 (1999) 49-61.

16. Turunen E., " Mathematics behind fuzzy logic ", Physica Verlag 1999.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-19]