




Kharazmi University

## Some results on fuzzy semi maximal filters in BL-algebras

Akbar Paad<sup>1</sup> 

1. Department of Mathematical, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

✉ E-mail: [akbar.paad@gmail.com](mailto:akbar.paad@gmail.com)

---

---

### Article Info

### ABSTRACT

---

---

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received:  
8 July 2020  
Revised form:  
1 March 2021  
Accepted:  
14 March 2021  
Published online:  
21 November 2022

#### Keywords:

BL-algebra;  
fuzzy semi  
maximal  
filter;  
semi simple  
BL-algebra.

#### Introduction

BL-algebras are the algebraic structure for Hajek basic logic in order to investigate many valued logic by algebraic means. His motivations for introducing BL-algebras were of two kinds. The first one was providing an algebraic counterpart of a propositional logic, called Basic Logic, which embodies a fragment common to some of the most important many-valued logics, namely Lukasiewicz Logic, Godel Logic and Product Logic. This Basic Logic (BL for short) is proposed as "the most general "many-valued logic with truth values in  $[0,1]$  and BL-algebras are the corresponding Lindenbaum-Tarski algebras. The second one was to provide an algebraic mean for the study of continuous t-norms (or triangular norms) on  $[0, 1]$ . Most familiar example of a BL-algebra is the unit interval  $[0,1]$  endowed with the structure induced by a continuous t-norm.

The filter theory plays a fundamental role in the general development of BL-algebras. From a logical point of view, various filters correspond to various sets of provable formulas. Some types of filters in BL-algebras based on logical algebras have been widely studied. For example, Turunen introduced the notions of implicative filters and Boolean filters and proved that these notions are equivalent in BL-algebras. Boolean filters are important class of filters, because the quotient BL-algebra induced by these filters are Boolean algebras. Heveshki and Eslami introduced the notions of n-fold implicative filters and n-

---

---

---

fold positive implicative filters and they prove some relations between these filters and construct quotient algebras via these filters in 2008. Also, Motamed and Borumand Saeid introduced the notion of n-fold obstinate filters in 2011. Moreover, the Lele studied the notions of fuzzy n-fold (positive) implicative filters and fuzzy n-fold obstinate filters in BL-algebras. In 2019, Paad and Borzooei introduced the notion of semi maximal filters and in BL-algebras and obtained some properties of this filters in BL-algebras.

### Results

In this paper, firstly, the concept of the fuzzy semi maximal filters in BL-algebras has been introduced, then several properties of fuzzy semi maximal filters have been studied and its relationship with other type fuzzy filters including fuzzy (positive)implicative fuzzy filters and fuzzy fantastic filters are investigated. In the following, by using the level subsets of fuzzy sets in a BL-algebra, fuzzy semi maximal filters have been studied. It has also been proved that a fuzzy filter is a fuzzy semi maximal filters if and only if all nonempty level subsets are semi maximal filters. In addition, it proves that the preimage of a semi maximal fuzzy filter under the BL-homomorphism and the image of a fuzzy semi maximal filter under the BL-isomorphism, is also a fuzzy semi maximal filter. Also, the extension property has been proved for fuzzy semi maximal filters in BL-algebras. Finally, the relationships between the fuzzy semi maximal filters and semi simple BL-algebras have been studied.

---

**How to cite:** Paad, A., (2022) Some results on fuzzy semi maximal filters in BL-algebras. *Mathematical Researches*, 8 (3), 27-43



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi

University

---

## نتایجی بر فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها

اکبر پادا<sup>۱</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران. پست الکترونیکی: [akbar.paad@gmail.com](mailto:akbar.paad@gmail.com)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

### واژه‌های کلیدی:

BL-جبر،

فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی،

BL-جبر نیم‌ساده،

BL-همریختی.

در این مقاله ابتدا مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها معرفی شده، سپس چندین ویژگی از فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و ارتباط آن با سایر فیلترهای فازی از جمله فیلترهای استلزامی (مثبت)  $\pi$ -لایه فازی و خارق‌العاده  $\pi$ -لایه فازی بیان شده است. در ادامه با استفاده از زیرمجموعه‌های برش از مجموعه‌های فازی در یک BL-جبر، فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی مورد بررسی قرار داده شده است. همچنین در ادامه ثابت می‌شود که یک فیلتر فازی یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است اگر و تنها اگر تمام زیر مجموعه‌های برش ناتپی از آن فیلتر نیم‌ماکسیمال باشند. به علاوه، ثابت می‌شود که تصویر وارون یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت همریختی BL-جبرها یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است. به علاوه تصویر یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت یکریختی BL-جبرها، نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است. همچنین خاصیت توسعه برای فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها نیز ثابت شده است. سرانجام روابط بین فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و BL-جبرهای نیم‌ساده مطالعه شده است.

استناد: پادا، اکبر؛ (۱۴۰۱). نتایجی بر فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۴۳-۲۷.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

BL-جبرها اولین بار توسط هایک [۱۲] مطرح شدند. انگیزهٔ او برای معرفی BL-جبرها، از دو دیدگاه قابل بررسی بود. اولین انگیزهٔ او ارائه یک ساختار جبری متناظر با منطق گزاره‌ای آن بود که منطق پایه (به اختصار BL) نامیده می‌شد و اکثر منطق‌های چند ارزشی مهم از قبیل لوکاسویچ، منطق گودل و منطق ضرب را شامل می‌شد. دیدگاه دوم او به ارائه یک مدل جبری، برای مطالعه  $t$ -نرم‌های پیوسته (یا نرم‌های مثلثی) روی بازه  $[0,1]$  مربوط می‌شد. در سال ۱۹۵۸، چانگ [۲] مفهوم MV-جبرها را معرفی کرد که یک زیرکلاس از BL-جبرها است. تورنن [۱۵،۱۶] نظریهٔ فیلترها در BL-جبرها را مورد مطالعه قرار داد و مفهوم فیلترهای استلزامی و فیلترهای بولی را معرفی کرد. فیلترهای بولی از آن جهت مهم هستند که BL-جبر خارج قسمتی القا شده به وسیلهٔ آنها، یک جبر بولی است. هاوشکی و اسلامی [۶] مفاهیم فیلتر استلزامی  $n$ -لایه و فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه را معرفی کردند و جبر خارج قسمتی القا شده توسط این فیلترها را در BL-جبرها مورد مطالعه قرار دادند. همچنین، معتمد و برومند سعید [۴] مفهوم فیلتر سرسخت  $n$ -لایه را در سال ۲۰۱۱ معرفی کردند. به علاوه، لهله [۸،۹] مفهوم فیلتر استلزامی (مثبت)  $n$ -لایه فازی و فیلتر سرسخت  $n$ -لایه فازی را در BL-جبرها معرفی و مورد مطالعه قرار داد. در سال ۲۰۱۲، برزویی و پاد [۱۳] مفهوم فیلترهای صحیح  $n$ -لایه، BL-جبرهای  $n$ -لایه و BL-جبرهای سرسخت  $n$ -لایه را معرفی و مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله ابتدا مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها را معرفی کرده، سپس چندین ویژگی از فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی را بیان می‌کنیم. در ادامه با استفاده از زیرمجموعه‌های برش از مجموعه‌های فازی در یک BL-جبر، فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه، ثابت می‌کنیم که تصویر وارون یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت همریختی BL-جبرها و همچنین تصویر یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی تحت یگریختی BL-جبرها، نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است. سرانجام روابط بین فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و BL-جبرهای نیم‌ساده را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

## پیش‌نیازها

این بخش شامل تعاریف، قضایا و نتایجی است که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز داریم و از مراجع [۳،۱۲] آورده شده است.

**تعریف ۱.** یک جبر  $(L, \rightarrow, 0, 1)$ ، از نوع  $(L, \vee, \wedge, \odot)$ ، از نوع  $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$  یک BL-جبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر  $x, y, z \in L$  در شرایط زیر صدق کند:

$$(BL1) (L, \vee, \wedge, 0, 1) \text{ یک شبکه کران‌دار باشد،}$$

(BL2)(L, ⊙, 1) یک تکواره تعویض پذیر باشد،

(BL3)  $z \leq x \rightarrow y$  اگر و تنها اگر  $x \odot z \leq y$

(BL4)  $x \wedge y = x \odot (x \rightarrow y)$

(BL5)  $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$

فرض کنید  $n$  یک عدد طبیعی و  $x, y \in L$  باشد. در این صورت منظور از عبارت  $x^n$  عبارت  $\overbrace{x \odot x \odot \dots \odot x}^{n\text{-بار}}$  و  $x^- = x \rightarrow 0$  است و همچنین عبارت  $(x \rightarrow (\dots (x \rightarrow (x \rightarrow y)) \dots))$  را با نماد  $x^n \rightarrow y$  نشان می‌دهیم. به علاوه عنصر  $x \in L$  پوچ توان نامیده می‌شود هرگاه عدد طبیعی  $m$  موجود باشد به طوری که  $x^m = 0$ .

یک جبر BL-جبر  $L$ ، یک جبر گودل نامیده می‌شود، هرگاه برای هر  $x \in L$ ،  $x^2 = x \odot x = x$  و همچنین  $L$  یک BL-جبر خطی نامیده می‌شود هرگاه  $L$  یک زنجیر باشد به عبارت دیگر هر دو عضو آن قابل مقایسه باشند.

گزاره ۲. در هر BL-جبر  $L$  خواص زیر برای هر  $x, y, z \in L$  برقرار هستند:

(BL6)  $x \leq y$  اگر و تنها اگر  $x \rightarrow y = 1$

(BL7)  $x^{n+1} \leq x^n$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$

(BL8) اگر  $x \leq y$ ، آن‌گاه  $x \rightarrow z \leq y \rightarrow z$  و  $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$

(BL9)  $0 \leq x$  و  $1 \rightarrow x = x$  و  $\rightarrow x = 1x$

قضایا و تعاریف زیر از مراجع [۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۴] آورده شده‌اند و خواننده برای اطلاعات بیشتر به آنها رجوع کند.

تعریف ۳. فرض کنید  $L$  یک BL-جبر و  $F$  یک زیرمجموعه ناتهی از  $L$  و  $n \in \mathbb{N}$  باشد. در این صورت

(۱)  $F$  یک فیلتر از  $L$  نامیده می‌شود، هرگاه  $x \odot y \in F$  برای هر  $x, y \in F$  و اگر  $x \in F$  و  $x \leq y$ ، آن‌گاه  $y \in F$

برای هر  $x, y \in L$ .

(۲)  $F$  یک فیلتر استلزامی  $n$ -لایه از  $L$  نامیده می‌شود، هرگاه  $1 \in F$  و برای هر  $x, y, z \in L$ ، اگر  $x^n \rightarrow y \in F$

و  $(x^n \rightarrow y) \rightarrow z \in F$ ، آن‌گاه  $x^n \rightarrow z \in F$

(۳)  $F$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه از  $L$  نامیده می‌شود، هرگاه  $1 \in F$  و برای هر  $x, y, z \in L$  اگر  $x \rightarrow y \in F$  و  $(y^n \rightarrow z) \rightarrow y \in F$  آن‌گاه  $y \in F$ .

(۴)  $F$  یک فیلتر خارق‌العاده  $n$ -لایه از  $L$  نامیده می‌شود، هرگاه  $1 \in F$  و برای هر  $x, y, z \in L$  اگر  $(y \rightarrow x) \in F$  و  $z \in F$  و  $F$  آن‌گاه  $((x^n \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \in F$ .

(۵) فرض کنید  $F$  یک فیلترسره از  $L$  باشد. در این صورت اشتراک همه فیلترهای ماکسیمال شامل  $F$  رادیکال فیلتر  $F$  نامیده و با نماد  $Rad(F)$  نشان داده می‌شود و به علاوه ثابت می‌شود:

$$Rad(F) = \{x \in L \mid (x^n)^- \rightarrow x \in F, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

لازم به ذکر است  $F \subseteq Rad(F)$  و در صورتی که  $F = L$  آن‌گاه  $Rad(L) = L$ .

(۶) فیلتر  $F$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  نامیده می‌شود، هرگاه  $F = Rad(F)$ .

قضیه ۴. فرض کنید  $F$  یک فیلتر از BL-جبر  $L$  باشد. در این صورت رابطه دوتایی  $\equiv_F$  روی  $L$  که به صورت زیر تعریف می‌شود یک رابطه هم‌نهشتی روی  $L$  است.

$$x \equiv_F y \text{ اگر و تنها اگر } x \rightarrow y \in F \text{ و } y \rightarrow x \in F$$

به علاوه اگر روی  $\frac{L}{F}$  که مجموعه همه کلاس‌های هم‌نهشتی ایجاد شده توسط فیلتر  $F$  است اعمال دوتایی  $\rightarrow, \cup, \cap$  و  $\Pi$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$[x] \cdot [y] = [x \odot y], \quad [x] \rightarrow [y] = [x \rightarrow y], [x] \cup [y] = [x \vee y],$$

$$[x] \cap [y] = [x \wedge y]$$

در این صورت  $([0], [1], \rightarrow, \cup, \cap, \cdot)$  یک BL-جبر است که BL-جبر خارج قسمتی روی  $F$  نامیده می‌شود.

تعریف ۵. فرض کنید  $L$  یک BL-جبر و  $n \in \mathbb{N}$  باشد. در این صورت

(۱)  $L$  یک BL-جبر سرسخت  $n$ -لایه نامیده می‌شود، هرگاه برای هر  $x \in L$   $(x^-)^- = x$  و همچنین برای هر

$$x^n = 0 \quad x \in L \setminus \{1\}$$

(۲)  $L$  یک BL-جبر نیم ساده نامیده می‌شود، هرگاه

$$Rad(\{1\}) = \{1\}$$

قضیه ۶. فرض کنید  $F$  یک فیلتر از BL-جبر  $L$  و  $n \in \mathbb{N}$  دلخواه باشد.

(۱) اگر  $F$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه از  $L$  باشد، آن‌گاه  $F$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است.

(۲) اگر  $F$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  باشد، آن‌گاه  $F$  یک فیلتر خارق‌العاده از  $L$  است.

(۳) اگر  $L$  یک جبر گودل و  $F$  یک فیلتر خارق‌العاده از  $L$  باشد، آن‌گاه  $F$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است.

(۴) اگر  $L$  خطی و  $F$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  باشد، آن‌گاه  $F$  یک فیلتر ماکسیمال از  $L$  است.

(۵)  $F$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است اگر و تنها اگر  $\frac{L}{F}$  یک BL-جبر نیم ساده باشد.

**تعریف ۷.** فرض کنید  $L_1$  و  $L_2$  دو BL-جبر باشند. در این صورت نگاشت  $f: L_1 \rightarrow L_2$  یک BL-همریختی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر نگاشت  $f$  برای هر  $x, y \in L_1$ ، در شرایط زیر صدق کند:

$$f(0) = 0 \quad (۱)$$

$$f(x \odot y) = f(x) \odot f(y) \quad (۲)$$

$$f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y) \quad (۳)$$

به علاوه اگر  $f$  دوسویی باشد، آن‌گاه همریختی  $f$ ، یک BL-یکریختی نامیده می‌شود و به صورت  $L_1 \cong L_2$  نشان داده می‌شود. همچنین هسته همریختی  $f$  نیز به صورت  $\ker(f) = \{x \in L_1 \mid f(x) = 1\}$  تعریف می‌شود.

در ادامه به بیان برخی از نتایج فازی که از مراجع [۸، ۱۱، ۱۲] آورده شده است می‌پردازیم.

**تعریف ۸.** (۱) فرض کنید  $L_1$  و  $L_2$  دو مجموعه،  $\mu$  یک زیرمجموعه فازی از  $L_1$ ،  $\eta$  یک زیرمجموعه فازی از  $L_2$  و  $f: L_1 \rightarrow L_2$  یک همریختی باشند. در این صورت تصویر  $\mu$  تحت  $f$  یک مجموعه فازی از  $L_2$  است و با  $f(\mu)$  نشان داده می‌شود به صورت زیر برای هر  $y \in L_2$  تعریف می‌شود:

$$f(\mu)(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) \quad \text{اگر } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \text{ آن‌گاه}$$

$$\text{و اگر } f^{-1}(y) = \emptyset, \text{ آن‌گاه } f(\mu)(y) = 0.$$

تصویر وارون  $\eta$  تحت  $f$  نیز یک مجموعه فازی از  $L_1$  است و با  $f^{-1}(\eta)$  نشان داده می‌شود و برای هر  $x \in L_1$  به صورت  $f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$  تعریف می‌شود.

(۲) مجموعه فازی  $\mu$  از  $L_1$  دارای خاصیت سوپریمم ( $\sup$ ) است، هرگاه برای هر زیرمجموعه ناتهی  $Y$  از  $L_1$  عنصری مانند  $y_0 \in Y$  وجود داشته باشد به طوری که  $\mu(y_0) = \sup_{y \in Y} \mu(y)$ .

(۳) برای مجموعه فازی  $\mu$  از  $L_1$ ، مجموعه  $\mu_t = \{x \in L_1 \mid \mu(x) \geq t\}$  (تراز نامیده می‌شود) به علاوه اگر  $\lambda, \nu$  دو مجموعه فازی از  $L_1$  باشند که  $\nu \subseteq \lambda$ ، آن‌گاه که  $\nu_t \subseteq \lambda_t$  برای هر  $t \in [0, 1]$ .

**تعریف ۹.** فرض کنید  $L$  یک BL-جبر و  $\mu: L \rightarrow [0, 1]$  یک مجموعه فازی روی  $L$  باشد. در این صورت:

$$(۱) \quad \mu \text{ یک فیلتر فازی از } L \text{ نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر } x, y \in L \\ \mu(x) \leq \mu(1) \text{ (الف)}$$

$$\mu(x \rightarrow y) \wedge \mu(x) \leq \mu(y) \text{ (ب)}$$

(۲) یک فیلتر استلزامی  $n$ -لایه فازی از  $L$  نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر  $x, y, z \in L$ :

$$\mu(x) \leq \mu(1) \text{ (الف)}$$

$$\mu(x^n \rightarrow (y \rightarrow z)) \wedge \mu(x^n \rightarrow y) \leq \mu(x^n \rightarrow z) \text{ (ب)}$$

در یک جبر گودل مفاهیم فیلترهای فازی، و فیلترهای استلزامی فازی بر هم منطبق هستند.

(۳) یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی از  $L$  نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر  $x, y, z \in L$ :

$$\mu(x) \leq \mu(1) \text{ (الف)}$$

$$\mu(x \rightarrow ((y^n \rightarrow z) \rightarrow y)) \wedge \mu(x) \leq \mu(y) \text{ (ب)}$$

(۴) فیلتر فازی  $\mu$  یک فیلتر سرسخت  $n$ -لایه فازی از  $L$  نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر  $x, y \in L$ :

$$\min\{\mu(x^n \rightarrow y), \mu(y^n \rightarrow x)\} \geq \min\{1 - \mu(x), 1 - \mu(y)\}$$

**لم ۱۰.** فرض کنید  $L$  یک BL-جبر و  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت شرایط زیر برای هر  $x, y \in L$  برقرار هستند:

$$(۱) \quad \text{اگر } x \leq y \text{ آن‌گاه } \mu(x) \leq \mu(y) \text{، به عبارت دیگر } \mu \text{ حافظ ترتیب است.}$$

$$(۲) \quad \text{اگر } \mu(x \rightarrow y) = \mu(1) \text{، آن‌گاه } \mu(x) \leq \mu(y) \text{.}$$

**قضیه ۱۱.** فرض کنید  $L$  یک BL-جبر،  $n \in \mathbb{N}$  و  $\mu$  یک مجموعه فازی از  $L$  باشد. در این صورت:

$$(۱) \quad \mu \text{ یک فیلتر فازی از } L \text{ است اگر و تنها اگر } \mu_t \neq \emptyset \text{، برای هر } t \in [0, 1] \text{، یک فیلتر از } L \text{ باشد.}$$

(۲)  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده (استلزامی مثبت)  $n$ -لایه فازی از  $L$  است اگر و تنها اگر  $\mu_t \neq \emptyset$ ، برای هر  $t \in [0, 1]$ ، یک

فیلتر خارق‌العاده (استلزامی مثبت)  $n$ -لایه از  $L$  باشد.

(۳)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی از  $L$  است اگر و تنها اگر  $\mu$  یک فیلتر فازی باشد و برای هر  $x \in L$ :



$$\mu((x^n \rightarrow 0) \rightarrow x) \leq \mu(x)$$

(۴) اگر  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده  $n$ -لایه فازی از  $L$  باشد، آن‌گاه  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده  $(n+1)$ -لایه فازی از  $L$  است.

(۵)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی از  $L$  است اگر و تنها اگر  $\mu$  یک فیلتر استلزامی  $n$ -لایه فازی و خارق‌العاده  $n$ -لایه فازی از  $L$  باشد.

نکته. همه احکام قضیه ۱۱ در حالتی که  $n = 1$  باشد نیز برقرار است. لازم به ذکر است که از این به بعد در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم  $L$  یک BL-جبر است مگر خلاف آن بیان شود.

### فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرها

در این بخش، ما مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی را معرفی می‌کنیم و به مطالعه خواص آنها می‌پردازیم.

تعریف ۱۲. فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی نامیده می‌شود اگر برای هر  $x \in L$ ، در شرط زیر صدق کند:

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

مثال ۱۳. فرض کنید  $L = \{0, a, b, 1\}$  یک زنجیر با رابطه  $x \wedge y = \min\{x, y\}$  و  $0 < a < b < 1$ ،  $x \vee y = 0$ ،  $\odot$  و  $\rightarrow$  را نیز به کمک جداول زیر تعریف کنیم:

جدول ۱.

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	a	b
1	0	a	b	1

جدول ۲.

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	b	1	1
1	0	a	b	1

در این صورت  $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$  یک BL-جبر است. اکنون فرض کنید مجموعه فازی  $\mu$  از  $L$  به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu(0) = t_1, \mu(1) = \mu(a) = \mu(b) = t_2$$

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$$

در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**قضیه ۱۴.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است اگر و تنها اگر برای هر  $t \in [0, 1]$   $\mu_t \neq \emptyset$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  باشد.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد و  $t \in [0, 1]$ ،  $\mu_t \neq \emptyset$ . در این صورت بنا بر قضیه ۱۱(۱)،  $\mu_t$  یک فیلتر از  $L$  است، و لذا بنا بر تعریف ۳،  $\mu_t \subseteq Rad(\mu_t)$ . حال فرض کنید  $x \in Rad(\mu_t)$  در این صورت برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $(x^n)^- \rightarrow x \in \mu_t$  بنا بر این  $t \geq \mu((x^n)^- \rightarrow x)$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  در نتیجه

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \geq t$$

حال چون  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است. پس  $\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$  لذا  $\mu(x) \geq t$ . در نتیجه خواهیم داشت  $x \in \mu_t$  و بنا بر این  $Rad(\mu_t) \subseteq \mu_t$  لذا  $Rad(\mu_t) = \mu_t$  و در نتیجه برای هر  $t \in [0, 1]$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است.

برعکس، فرض کنید برای هر  $t \in [0, 1]$   $\mu_t \neq \emptyset$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال باشد. در این صورت نشان می‌دهیم  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است. فرض کنید چنین نباشد، به عبارت دیگر عنصر  $a \in L$  وجود دارد به طوری که

$$\inf\{\mu((a^n)^- \rightarrow a) \mid n \in \mathbb{N}\} > \mu(a)$$

قرار دهید:

$$\beta = \inf\{\mu((a^n)^- \rightarrow a) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

لذا برای هر  $n \in \mathbb{N}$  خواهیم داشت  $\mu(a) < \beta \leq \mu((a^n)^- \rightarrow a)$  حال فرض کنید  $t_0 = \frac{1}{2}\{\beta + \mu(a)\}$  در این صورت برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $\mu(a) < t_0 \leq \mu((a^n)^- \rightarrow a)$  در نتیجه  $(a^n)^- \rightarrow a \in \mu_{t_0}$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  بنا بر این  $a \in Rad(\mu_{t_0})$  حال چون  $\mu_{t_0}$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است، لذا خواهیم داشت:

$$Rad(\mu_{t_0}) = \mu_{t_0} \text{ پس } a \in \mu_{t_0} \text{ در نتیجه } \mu(a) > t_0 \text{، که یک تناقض است. بنا بر این برای هر } x \in L$$

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

در نتیجه،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**قضیه ۱۵.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت 1-لایه فازی است و لذا بنا بر قضیه ۱۱(۳) به ازای  $n = 1$  نتیجه می‌گیریم  $\mu(x^1 \rightarrow 0) \rightarrow x \leq \mu(x)$ ، برای هر  $x \in L$

$L$  حال چون بنابر (BL7)،  $x^n \leq x$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  لذا بنابر (BL8)،  $x^- \leq (x^n)^-$  و در نتیجه برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $\mu((x^n)^- \rightarrow x) \leq \mu(x^- \rightarrow x)$ ، از طرفی چون  $\mu$  یک فیلتر فازی است، لذا بنابر لم ۱۰(۱)،  $\mu((x^n)^- \rightarrow x) \leq \mu(x^- \rightarrow x)$  در نتیجه

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x^- \rightarrow x)$$

چون  $\mu(x^- \rightarrow x) \leq \mu(x)$  در نتیجه

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

بنابراین  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**قضیه ۱۶.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنابر قضیه ۱۱(۲)،  $\emptyset \neq \mu_t$ ، برای هر  $t \in [0, 1]$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه از  $L$  است. در نتیجه بنا بر قضیه ۶(۱)،  $\emptyset \neq \mu_t$ ، برای هر  $t \in [0, 1]$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است و لذا بنابر قضیه ۱۴،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**نکته.** با در نظر گرفتن  $n = 1$  در قضیه ۱۶ نتیجه می‌گیریم که هر فیلتر استلزامی مثبت فازی نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است.

**قضیه ۱۷.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده فازی از  $L$  است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱۴،  $\emptyset \neq \mu_t$ ، برای هر  $t \in [0, 1]$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است. در نتیجه بنابر قضیه ۶(۲)،  $\emptyset \neq \mu_t$ ، برای هر  $t \in [0, 1]$  یک فیلتر خارق‌العاده از  $L$  است و بنابراین بنابر قضیه ۱۱(۲)،  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده فازی از  $L$  است.

**نتیجه ۱۸.** هر فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$ ، یک فیلتر خارق‌العاده  $n$ -لایه فازی از  $L$  است.

**برهان:** از قضیه ۱۱(۴) و قضیه ۱۷، حکم برقرار می‌شود.

**قضیه ۱۹.** فرض کنید  $L$  یک جبر گودل و  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است اگر و تنها اگر  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده فازی از  $L$  باشد.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱۷،  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده فازی از  $L$  است. برعکس، فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱۱(۲)،  $\mu_t \neq \emptyset$ ، برای هر  $t \in [0,1]$  یک فیلتر خارق‌العاده از  $L$  است. حال چون  $L$  یک جبر گودلاست، در این صورت بنا بر قضیه ۶(۳)،  $\mu_t \neq \emptyset$ ، برای هر  $t \in [0,1]$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است. در نتیجه بنا بر قضیه ۱۴،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**قضیه ۲۰.** فرض کنید  $L$  یک جبر گودلو  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است اگر و تنها اگر  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از  $L$  باشد.

**برهان:** فرض کنید  $L$  یک جبر گودل و  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱۶،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است. برعکس، فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱۹،  $\mu$  یک فیلتر خارق‌العاده فازی از  $L$  است و چون  $L$  یک جبر گودل است، پس هر فیلتر فازی از  $L$  یک فیلتر استلزامی فازی است. بنابراین بنا بر قضیه ۱۱(۵)،  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت فازی از  $L$  است.

**قضیه ۲۱.** (خاصیت توسیع برای فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی) فرض کنید  $\mu$  و  $\eta$  فیلترهای فازی غیر بدیهی از  $BL$ -جبرخطی  $L$  باشند به طوری که  $\mu \subseteq \eta$  و  $\mu(1) = \eta(1)$ . در این صورت اگر  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی باشد، آن‌گاه  $\eta$  نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $BL$ -جبر خطی  $L$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱۴،  $\mu_t \neq \emptyset$ ، برای هر  $t \in [0,1]$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است و چون  $\mu \subseteq \eta$ ، لذا  $\mu_t \subseteq \eta_t$ ، برای هر  $t \in [0,1]$ . چون  $\mu_t$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $BL$ -جبرخطی  $L$  است، در این صورت بنا بر قضیه ۶(۴)،  $\mu_t \neq \emptyset$ ، برای هر  $t \in [0,1]$  یک فیلتر ماکسیمال است. بنابراین  $\mu_t = \eta_t$  یا  $\eta_t = L$ . حال اگر  $\eta_t = L$ ، آن‌گاه چون  $\mu_t$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال است، پس  $Rad(\eta_t) = Rad(\mu_t) = \mu_t = \eta_t$  و اگر هم  $\eta_t = L$ ، آن‌گاه  $L = Rad(L)$ . در نتیجه  $\eta_t \neq \emptyset$ ، برای هر  $t \in [0,1]$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال از  $L$  است. لذا بنا بر قضیه ۱۴،  $\eta$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**قضیه ۲۲.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

(۱)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی است؛

(۲)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی  $n$ -لایه فازی و خارق‌العاده  $n$ -لایه فازی است؛

(۳)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی  $n$ -لایه فازی و نیم‌ماکسیمال فازی است.

**برهان:** (۲)  $\Leftrightarrow$  (۱): بنا بر قضیه ۱۱(۵)، حکم برقرار است.

(۳)  $\Rightarrow$  (۲): فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر استلزامی  $n$ -لایه فازی و فیلتر خارق‌العاده  $n$ -لایه فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنابر قضیه ۱۱ (۶)،  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت  $n$ -لایه فازی از  $L$  است. لذا بنابر قضیه ۱۶،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

(۲)  $\Rightarrow$  (۳): بنابر نتیجه ۱۸، حکم برقرار است.

**نتیجه ۲۳.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

(۱)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی مثبت فازی است؛

(۲)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی فازی و فیلتر خارق‌العاده فازی است؛

(۳)  $\mu$  یک فیلتر استلزامی فازی و فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی است.

**برهان:** فرض کنید در قضیه ۲۲،  $n = 1$  باشد. در این صورت حکم برقرار است.

**قضیه ۲۴.** فرض کنید  $f: L_1 \rightarrow L_2$  یک BL-همریختی و  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  باشد. در این صورت  $f^{-1}(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_1$  است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  باشد و  $x \in L_1$  در این صورت بنا بر تعریف همریختی  $f$

$$\begin{aligned} \inf\{f^{-1}(\mu)((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} &= \inf\{\mu(f((x^n)^- \rightarrow x)) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{\mu(((f(x))^n)^- \rightarrow f(x)) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(f(x)) = f^{-1}(\mu)(x) \end{aligned}$$

بنابراین،  $f^{-1}(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_1$  است.

**قضیه ۲۵.** فرض کنید  $f: L_1 \rightarrow L_2$  یک BL-یکریختی و  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_1$  با خاصیت سوپریمم ( $sup$ ) باشد. در این صورت  $f(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$ ،  $y \in L_2$  و  $n \in \mathbb{N}$  باشد. در این صورت چون  $f$  یک BL-یکریختی است و  $\mu$  خاصیت سوپریمم دارد، لذا عناصر  $x_1 \in f^{-1}((y^n)^- \rightarrow y)$  و  $x_2 \in f^{-1}(y)$  وجود دارد به طوری که

$$f(\mu)((y^n)^- \rightarrow y) = \sup_{t \in f^{-1}((y^n)^- \rightarrow y)} \mu(t) = \mu(x_1)$$

لذا  $x_2 \in f^{-1}(y)$  و  $x_1 \in f^{-1}((y^n)^- \rightarrow y)$  چون  $f(\mu)(y) = \sup_{k \in f^{-1}(y)} \mu(k) = \mu(x_2)$  به علاوه،

بنابراین، خواهیم داشت:  $f(x_2) = y$  و  $f(x_1) = (y^n)^- \rightarrow y$

$$f(x_1) = (y^n)^- \rightarrow y = ((f(x_2))^n)^- \rightarrow f(x_2) = f(((x_2)^n)^-) \rightarrow f(x_2) = f((x_2^n)^- \rightarrow x_2)$$

حال چون  $f$  یک BL-یکریختی است، پس  $x_1 = (x_2^n)^- \rightarrow x_2$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  در نتیجه

$$f(\mu)((y^n)^- \rightarrow y) = \mu(x_1) = \mu((x_2^n)^- \rightarrow x_2)$$

و چون  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_1$  است، لذا

$$\inf\{f(\mu)((y^n)^- \rightarrow y) \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\mu((x_2^n)^- \rightarrow x_2) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x_2) = f(\mu)(y)$$

بنابراین،  $f(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  است.

گزاره ۲۶. فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک BL-همریختی و  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $A$  باشد. در این صورت  $A_\mu$  یک فیلتر از  $A$  است.

$$A_\mu = \{x \in A \mid \mu(x) = \mu(1)\}$$

برهان. بنابر تعریف ۳ و قضیه ۱۱ حکم برقرار است.

نکته. در قضیه ۲۵ شرایط زیادی وجود دارد تا تصویر یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی نیز یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی شود،

لذا در قضیه بعدی اندکی این شرایط را کاهش می‌دهیم.

قضیه ۲۷. فرض کنید  $f: L_1 \rightarrow L_2$  یک BL-همریختی پوشا و  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_1$  باشد

به طوری که  $ker(f) \subseteq A_\mu$ . در این صورت  $f(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم  $f(\mu)$  یک فیلتر فازی از  $L_2$  است. فرض کنید  $y \in L_2$ . در این صورت چون  $f$  پوشا است پس

$$x \in L_1$$

موجود است به طوری که  $f(x) = y$  و همچنین

$$f(\mu)(y) = \sup_{t \in f^{-1}(y)} \mu(t)$$

حال چون  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L_1$  است، پس برای هر  $a \in L_1$  و  $\mu(a) \leq \mu(1)$  و بنابراین

$$f(\mu)(y) = \sup_{t \in f^{-1}(y)} \mu(t) \leq \mu(1)$$

از طرفی چون  $f(\mu)(1) = \mu(1)$ ، پس  $f(\mu)(y) \leq f(\mu)(1)$ ، برای هر  $y \in L_2$  حال فرض کنید  $z, w \in L_2$  موجودند به طوری که

$$f(\mu)(z \rightarrow w) \wedge f(\mu)(z) > f(\mu)(w)$$

بنابر پوشایی  $f$ ، عناصر  $a, b \in L_1$  موجودند به طوری که  $f(a) = z$  و  $f(b) = w$  و در نتیجه  $f(a \rightarrow b) = z \rightarrow w$  حال اگر  $t \in f^{-1}(z \rightarrow w)$ ، آن‌گاه  $f(t) = z \rightarrow w$  و بنابراین  $f(a \rightarrow b) = f(t)$  حال چون  $f$  یک هم‌ریختی است، پس  $f((a \rightarrow b) \rightarrow t) = f(1)$  و  $f(t \rightarrow (a \rightarrow b)) = f(1)$  در نتیجه،  $(a \rightarrow b) \rightarrow t \in \ker(f)$  و  $t \rightarrow (a \rightarrow b) \in \ker(f)$  چون بنابر فرض  $\ker(f) \subseteq A_\mu$  پس  $\mu((a \rightarrow b) \rightarrow t) = \mu(1)$  و  $\mu(t \rightarrow (a \rightarrow b)) = \mu(1)$  حال بنابر لم ۱۰(۲)،  $\mu(a \rightarrow b) \leq \mu(t)$  و  $\mu(a \rightarrow b) \geq \mu(t)$  و بنابراین  $\mu(t) = \mu(a \rightarrow b)$  پس نتیجه می‌گیریم که برای هر  $t \in f^{-1}(z \rightarrow w)$  خواهیم داشت  $\mu(t) = \mu(a \rightarrow b)$  به طوری که  $f(a \rightarrow b) = z \rightarrow w$  بنابراین،

$$f(\mu)(z \rightarrow w) = \sup_{t \in f^{-1}(z \rightarrow w)} \mu(t) = \mu(a \rightarrow b)$$

اکنون چون  $f$  پوشا است و  $b \in f^{-1}(w)$ ،  $a \in f^{-1}(z)$  و  $\ker(f) \subseteq A_\mu$  با استدلالی مشابه، نتیجه می‌گیریم که

$$f(\mu)(w) = \sup_{u \in f^{-1}(w)} \mu(u) = \mu(b), f(\mu)(z) = \sup_{l \in f^{-1}(z)} \mu(l) = \mu(a)$$

در نتیجه بنا بر نامساوی  $f(\mu)(z \rightarrow w) \wedge f(\mu)(z) > f(\mu)(w)$  خواهیم داشت  $\mu(a \rightarrow b) \wedge \mu(a) > \mu(b)$  که این مطلب با فیلتر فازی بودن  $\mu$  در تناقض است. بنابراین  $f(\mu)$  یک فیلتر فازی از  $L_2$  است. حال نشان می‌دهیم  $f(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  است. فرض کنید  $y \in L_2$  در این صورت چون  $f$  پوشا است پس  $x \in L_1$  موجود است به طوری که  $f(x) = y$ ، به علاوه با توجه به این که  $\ker(f) \subseteq A_\mu$  و  $x \in f^{-1}(y)$  و این که برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $(x^n)^- \rightarrow x \in f^{-1}((y^n)^- \rightarrow y)$  مطابق استدلال فوق خواهیم داشت:

$$f(\mu)(y) = \sup_{r \in f^{-1}((y^n)^- \rightarrow y)} \mu(r) = \mu(x)$$

$$f(\mu)((y^n)^- \rightarrow y) = \sup_{s \in f^{-1}((y^n)^- \rightarrow y)} \mu(s) = \mu((x^n)^- \rightarrow x)$$

و چون  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_1$  است، پس

$$\inf\{f(\mu)((y^n)^- \rightarrow y) \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x) = f(\mu)(y)$$

بنابراین،  $f(\mu)$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L_2$  است.

### فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و $BL$ -جبرهای نیم‌ساده

در این بخش، ما روابط بین فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی و  $BL$ -جبرهای نیم‌ساده را مطالعه می‌کنیم.

**قضیه ۲۸.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد. در این صورت برای هر  $x \in Rad(\{1\})$ ،

$$\mu(x) = \mu(1).$$

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  و  $x \in Rad(\{1\})$  باشد. در این صورت  $x = 1 \rightarrow (x^n)^-$ ، برای

هر  $n \in \mathbb{N}$ ، بنابراین  $\mu((x^n)^- \rightarrow x) = \mu(1)$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  در نتیجه

$$\mu(1) = \inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

به علاوه، چون  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  است، در این صورت  $\mu(x) \leq \mu(1)$ . بنابراین برای هر  $x \in Rad(\{1\})$ ،  $\mu(x) = \mu(1)$ .

**قضیه ۲۹.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  و نیز  $\mu$  یک نگاشت یک به یک باشد. در این صورت  $L$  یک  $BL$ -جبر نیم‌ساده است.

**برهان:** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  و  $x \in Rad(\{1\})$  باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۲۸،  $\mu(x) = \mu(1)$ . حال چون  $\mu$  یک نگاشت یک به یک است، در این صورت  $x = 1$ ، لذا  $Rad(\{1\}) = \{1\}$ . بنابراین  $L$  یک  $BL$ -جبر نیم‌ساده است.

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط یک به یک بودن یک شرط ضروری است.

**مثال ۳۰.** فرض کنید  $L$ ،  $BL$ -جبر مثال ۱۲ باشد. در این صورت با توجه به تعریف،  $\mu$  یک نگاشت یک به یک نیست. از طرفی  $L$  یک جبر نیم‌ساده هم نیست، زیرا  $a \in Rad(\{1\})$  و  $1 \neq a$  و بنابراین،  $Rad(\{1\}) \neq \{1\}$ .

**قضیه ۳۱.** فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  و هر عنصر غیر از ۱ پوچ توان باشد. در این صورت  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.



برهان: فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر فازی از  $L$  باشد و  $x \in L$  و  $1 \neq x$ . در این صورت چون  $x$  پوچ توان است، پس عدد طبیعی  $m$  وجود دارد به طوری که  $x^m = 0$  بنابراین  $x^{m+k} = 0$  برای هر  $k \in \mathbb{N}$ . حال با توجه به تعریف اینفیموم (BL9) داریم:

$$\begin{aligned} & \inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \mu(x^- \rightarrow x) \wedge \dots \wedge \mu((x^{m-1})^- \rightarrow x) \wedge \mu((x^m)^- \rightarrow x) \wedge \mu((x^{m+1})^- \rightarrow x) \wedge \dots \\ &= \mu(x^- \rightarrow x) \wedge \dots \wedge \mu((x^{m-1})^- \rightarrow x) \wedge \mu((0)^- \rightarrow x) \wedge \mu((0)^- \rightarrow x) \wedge \dots \\ &= \mu(x^- \rightarrow x) \wedge \dots \wedge \mu((x^{m-1})^- \rightarrow x) \wedge \mu(x) \wedge \mu(x) \wedge \dots \\ &\leq \mu(x) \end{aligned}$$

به علاوه اگر  $x = 1$ ، آن‌گاه

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\mu((1^n)^- \rightarrow 1) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mu(1) \leq \mu(1)$$

بنابراین،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**نتیجه ۳۲.** فرض کنید  $L$  یک  $BL$ -جبر سرسخت  $n$ -لایه باشد. در این صورت هر فیلتر فازی از  $L$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

**برهان:** بنابر تعریف ۵ و قضیه ۳۰ حکم برقرار است.

**قضیه ۳۳.** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو  $BL$ -جبر باشند به طوری که  $A \cong B$  و  $A$  یک  $BL$ -جبر نیم‌ساده باشد. در این صورت  $B$  نیز یک  $BL$ -جبر نیم‌ساده است.

**برهان:** با توجه به تعریف ۵، مستقیماً ثابت می‌شود.

**قضیه ۳۴.** فرض کنید  $\mu$  یک مجموعه فازی از  $L$  باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

(۱)  $L$  یک  $BL$ -جبر نیم‌ساده است؛

(۲)  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

برهان: (۱)  $\Rightarrow$  (۲): فرض کنید  $L$  یک BL-جبر نیم‌ساده باشد. در این صورت  $Rad(\{1\}) = \{1\}$  واضح است که  $\mu$  یک فیلتر فازی است. حال می‌خواهیم نشان دهیم برای هر  $x \in L$

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \mu(x)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. اگر  $x \in L$  وجود داشته باشد به طوری که  $(x^n)^- \rightarrow x = 1$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$  آن‌گاه  $x \in Rad(\{1\})$  بنابراین  $x = 1$ . به علاوه،  $\mu(x) = 1$ ، لذا برای هر  $n \in \mathbb{N}$   $\mu((x^n)^- \rightarrow x) = 1$  در نتیجه خواهیم داشت:

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mu(x) = 1$$

حالت دوم. اگر  $x \in L$  وجود داشته باشد به طوری که  $(x^m)^- \rightarrow x \neq 1$ ، برای برخی  $m \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه برای برخی  $m \in \mathbb{N}$   $\mu((x^m)^- \rightarrow x) = 0$  در نتیجه

$$\inf\{\mu((x^n)^- \rightarrow x) \mid n \in \mathbb{N}\} = 0 \leq \mu(x)$$

بنابراین،  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  است.

(۱)  $\Rightarrow$  (۲): فرض کنید  $\mu$  یک فیلتر نیم‌ماکسیمال فازی از  $L$  باشد. در این صورت بنابر قضیه ۱۴،

$$\mu_1 = \{x \in L \mid \mu(x) \geq 1\} = \{1\}$$

یک فیلتر نیم‌ماکسیمال است. بنابراین بنابر قضیه ۶ (۵)،  $\frac{L}{\{1\}}$  یک BL-جبر نیم‌ساده است. حال چون  $\frac{L}{\{1\}} \cong L$ ، پس بنا بر قضیه ۳۰،  $L$  یک BL-جبر نیم‌ساده است.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا مفهوم فیلترهای نیم‌ماکسیمال فازی در BL-جبرهای معرفی شد و پس مطالعه خواص آنها، ارتباط این نوع از فیلترهای فازی با سایر فیلترهای فازی دیگر مانند فیلترهای استلزامی  $n$ -لایه فازی، خارق العاده  $n$ -لایه فازی،... مورد بحث و بررسی قرار گرفت. از آن‌جا که استفاده از ساختارهای فازی بر روی فیلترها یا ایده‌آل‌ها در ساختار جبری منطقی تقریباً روندی مشابه دارند، لذا در این مقاله از اینفیموم نامتناهی برای تعریف این نوع فیلترها استفاده شد که در نوع خود

جدید و نیز با مفهوم برش‌ها در مجموعه‌های فازی نیز سازگار است و در قضایا بدان اشاره شد. در ادامه به کمک این نوع از فیلترهای فازی به مطالعه BL-جبرهای نیم ساده پرداخته شد. برای کارهای آینده به نظر می‌رسد استفاده از این نوع ساختار می‌توان برای تعریف فیلترهای (ایده‌آل‌های) نیم ماکسیمال فازی در دیگر ساختارهای جبری منطقی مانند EQ-جبرها، RL-جبرها، MV-جبرها، جبرهای هوپ و... استفاده نمود و همچنین مطالعه برخی از این جبرهای منطقی به کمک این نوع از فیلترهای فازی از اهداف تحقیقاتی آینده خواهد بود.

## قدردانی

از داوران محترم برای همه نکات و توضیحاتی که ارائه کردند تا نسخه اولیه از نظر کیفیت ارتقا پیدا کند و نگارش بهتری را داشته باشم نهایت سپاسگزاری و تشکر را دارم.

## References

1. Borzooei R. A., Paad A., "Integral filters and Integral BL-algebras", Italian J. Pure Appl. Math. 30 (2013) 303-316.
2. Chang C. C., "Algebraic analysis of many valued logics ", Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958)467-490.
3. Di Nola A., Leustean L., "Compact representations of BL-algebras ", Department of Computer Science, University Aarhus. BRICS Report Series (2002).
4. Motamed S., Borumand Saeid A., "n-Fold obstinate filters in BL-algebras", Neural Comput and Applic, 20 (2011) 427-461.
5. Haveski M., Borumand Saeid A., Eslami E., "Some types of filters in BL-algebras ", Soft Comput, 10 (2006) 657-664.
6. Haveski M., Eslami E., "n-Fold filters in BL-algebras ", Math. Log. Quart. 54(2) (2008) 178-186.
7. Hájek P., "Metamathematics of fuzzy logic", Klower Academic Publishers, Dordrecht 1999.
8. Lele C., "Folding theory of positive implicative/fuzzy positive implicative filters in BL-algebras ", J. Fuzzy Math. 17(2), 633-641 (2009).

9. Lele C., "Fuzzy n-fold obstinate filters in BL-algebras ", Afr. Mat, 24(2013)127-133.
10. Lele C., Hyland M., "Folding theory for fantastic filters in BL-algebras ", Int.J. Art. Life Research, 2(4) (2011) 32-42 .
11. Liu L., Li K., "Fuzzy filters of BL-algebras ", Information Sciences 173 (2005) 141-154.
12. Liu L., Li K., "Fuzzy Boolean and positive implicative filters of BL-algebras ", Fuzzy Sets and Systems, 152 (2005) 141-154.
13. Paad A., Borzooei R. A., "Generalization of integral filters in BL-algebras and n-fold integral BL-algebras ", Afr. Mat. 26 (7-8) (2015) 1299-1311.
14. Paad A., Borzooei R. A., "On semi maximal filters in BL-algebras", Journal of Algebraic Systems, 6( 2) (2019) 101-116.
15. Turunen E., "BL-algebras and basic fuzzy logic ", Mathware Soft Comput, 6 (1999) 49-61.
16. Turunen E., " Mathematics behind fuzzy logic ", Physica Verlag 1999.