Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# Generalized matrix functions, determinant and permanent

Mohammad Hossein Jafari[1] ✉, Ali Reza Madadi[2]

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

✉E-mail: jafari@tabrizu.ac.ir

2. Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

E-mail: a-madadi@tabrizu.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**

Research Article

**Article history:**

Received:
12 July 2020
Revised form:
4 November 2020
Accepted:
14 November 2020
Published online:
21 May 2022

**Keywords**:

Generalized matrix function;
Determinant;
Permanent;
Permutation matrix;
Symmetric matrix;
Irreducible character;
Class function.

**ABSTRACT**

**Introduction**

Since linear and multilinear algebra has many applications in different branches of sciences, the attention of many mathematicians has been attracted to it in recent decades. The determinant and the permanent are the most important functions in linear algebra and so a generalized matrix function, which is a generalization of the determinant and the permanent, becomes significant. Generalized matrix functions connect some branches of mathematics such as theory of finite groups, representation theory of groups, graph theory and combinatorics, and linear and multilinear algebra.

Let $\mathbb{S}_n$ be the symmetric group of degree $n$, $G$ be a subgroup of $\mathbb{S}_n$, and $\chi : G \to \mathbb{C}$ be a function. The function

$$d_\chi^G : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

given by

$$d_\chi^G(A) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

is called the generalized matrix function associated to $G$ and $\chi$. Note that if $G = \mathbb{S}_n$ and $\chi = 1_G$, the principal character of $G$, then $d_\chi^G = \mathbf{per}$ is the permanent and if $G = \mathbb{S}_n$ and $\chi = \varepsilon$, the alternating character of $G$, then $d_\chi^G = \mathbf{det}$ is the determinant.

**Results**

In this paper, using permutation matrices or symmetric matrices, necessary and sufficient conditions are given for a generalized matrix function to be the determinant or the permanent. We prove that a generalized matrix function is the determinant or the permanent if and only if it preserves the product of symmetric permutation matrices. Also we show that a generalized matrix function is the determinant if and only if it preserves the product of symmetric matrices. To be precise, we show that:

If $G \leqslant \mathbb{S}_n$ and $\chi : G \to \mathbb{C}$ is a nonzero function, then the following are equivalent:

1) $d_\chi^G = \mathbf{det}$ or $d_\chi^G = \mathbf{per}$;

2) $\forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}_n,\ d_\chi^G(A_\sigma A_\tau) = d_\chi^G(A_\sigma) d_\chi^G(A_\tau)$;

3) $\forall \sigma, \tau \in \mathbb{T}_n,\ d_\chi^G(A_\sigma A_\tau) = d_\chi^G(A_\sigma) d_\chi^G(A_\tau)$;

where $A_\sigma$ is the permutation matrix induced by $\sigma \in \mathbb{S}_n$ and $\mathbb{T}_n = \{\sigma \in \mathbb{S}_n \mid \sigma^{۲} = ۱\}$.

Also if $G \leqslant \mathbb{S}_n$ and $\chi : G \to \mathbb{C}$ is a nonzero function, then $d_\chi^G = \mathbf{det}$ if and only if for all symmetric matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(A) d_\chi^G(B)$.

**How to cite:** Jafari, M.h., Madadi, A.R.; (2022) Generalized matrix functions, determinant and permanent. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-13



Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# توابع ماتریسی تعمیم‌یافته، دترمینان و پرمننت

**محمد حسین جعفری[1]✉، علیرضا مددی[2]**

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: jafari@tabrizu.ac.ir

۲. گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: a-madadi@tabrizu.ac.ir

**اطلاعات مقاله** **چکیده**

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۹/۰۴/۲۲
**تاریخ بازنگری:** ۱۳۹۹/۰۸/۱۴
**تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹/۰۸/۲۴
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

**واژه‌های کلیدی:**
تابع ماتریسی تعمیم‌یافته،
دترمینان،
پرمننت،
ماتریس جایگشتی،
ماتریس متقارن،
کاراکتر تحویل‌ناپذیر،
تابع کلاسی.

در این مقاله با استفاده از ماتریس‌های جایگشتی یا ماتریس‌های متقارن شرایط لازم و کافی برای اینکه یک تابع ماتریسی تعمیم‌یافته دترمینان یا پرمننت باشد، ارائه می‌شود. ثابت می‌کنیم که یک تابع ماتریسی تعمیم‌یافته، دترمینان یا پرمننت است اگر و فقط اگر حافظ ضرب ماتریس‌های جایگشتی متقارن باشد. همچنین نشان می‌دهیم که یک تابع ماتریسی تعمیم‌یافته، دترمینان است اگر و فقط اگر حافظ ضرب ماتریس‌های متقارن باشد.

**استناد**: جعفری، محمد حسین؛ مددی، علیرضا؛ (۱۴۰۱). توابع ماتریسی تعمیم‌یافته، دترمینان و پرمننت. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۳-۱.



ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

با توجه به اینکه جبر خطی و جبر چندخطی دارای کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف علوم می‌باشند، در دهه‌های اخیر توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها به این شاخه از ریاضیات جلب شده است و کتب و مقالات با ارزشی در این زمینه چاپ شده است. از آنجا که تابع دترمینان و پرمننت در جبرخطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، بنابراین بررسی خواص توابع ماتریسی تعمیم‌یافته که تابع دترمینان و تابع پرمننت حالت خاصی از این گونه توابع هستند به همان اندازه از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار خواهد بود. مهمترین ویژگی توابع ماتریسی تعمیم‌یافته این است که چند شاخه از ریاضیات را به هم پیوند می‌دهد، شاخه‌هایی مانند نظریهٔ گروههای متناهی، نظریهٔ نمایش، نظریهٔ گراف، نظریهٔ ترکیبیات، جبر خطی و جبر چندخطی. هدف اصلی این مقاله، مطالعه و بررسی آن دسته از توابع ماتریسی تعمیم‌یافته می‌باشد که ضرب ماتریس‌های متقارن یا ضرب ماتریس‌های جایگشتی را حفظ می‌کنند. این مقاله در دو بخش تنظیم شده است. بخش اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه است. بخش دوم نیز به نتایج اصلی اختصاص دارد که در آن با استفاده از ماتریس‌های جایگشتی یا ماتریس‌های متقارن به مشخصه‌سازی توابع ماتریسی تعمیم‌یافته با یک ویژگی خاص پرداخته می‌شود.

## ۲.تعاریف و پیش نیازها

در سراسر این مقاله همهٔ گروه‌ها متناهی هستند و گروه متقارن و گروه متناوب از درجهٔ $n$ به ترتیب با نمادهای $\mathbb{S}_n$ و $\mathbb{A}_n$ نشان داده می‌شوند. همچنین $M_n(\mathbb{C})$ نمایانگر مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ روی $\mathbb{C}$ و $GL_n(\mathbb{C})$ نیز نشان دهندهٔ مجموعهٔ ماتریس‌های وارون‌پذیر $n\times n$ روی $\mathbb{C}$ است.

**تعریف:** برای جایگشت $\sigma\in\mathbb{S}_n$، ماتریس $A_\sigma=(\delta_{\sigma(i)j})\in M_n(\mathbb{C})$ را ماتریس جایگشتی متناظر با $\sigma$ می‌نامند.

بدیهی است که اگر $\sigma=1$ جایگشت همانی باشد آنگاه $A_\sigma=I_n$ و برعکس. همچنین تعداد ماتریس‌های جایگشتی $n\times n$ متناهی بوده و برابر با $n!$ می‌باشد.

قضیهٔ سادهٔ زیر برخی خواص ماتریس‌های جایگشتی را بیان می‌کند.

**قضیه ۱.** فرض کنید $\sigma,\tau\in\mathbb{S}_n$. در این صورت

الف) $A_\sigma A_\tau=A_{\sigma\tau}$.

ب) $\det A_\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)$.

ج) $A_\sigma$ وارون‌پذیر است و $(A_\sigma)^{-1}=A_{\sigma^{-1}}=(A_\sigma)^t$.

د) $A_\sigma$ متقارن است اگر و فقط اگر $\sigma^2=1$.

**اثبات.** رجوع شود به فصل چهارم از مرجع ۷ .

با توجه به قضیهٔ فوق، مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های جایگشتی $n\times n$ زیرگروهی از $GL_n(\mathbb{C})$ یکریخت با $\mathbb{S}_n$ است.

در ادامه، مطالبی از نظریهٔ نمایش گروهها بیان می‌شود که برای جزئیات بیشتر، خواننده به مرجع ۲ ارجاع داده می‌شود.

**تعریف:** الف) یک نمایش از گروه $G$ یک همریختی مانند $\mathfrak{X}:G\to GL_n(\mathbb{C})$ می‌باشد.

ب) تابع $\chi:G\to\mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\chi(g)=\mathrm{tr}\mathfrak{X}(g)$ را کاراکتر $G$ پیشنهاد شده توسط نمایش $\mathfrak{X}$ می‌نامند و عدد طبیعی $\chi(1)=\mathrm{tr}\mathfrak{X}(1)=n$ را درجهٔ کاراکتر $\chi$ می‌نامند. همچنین هر کاراکتر از درجهٔ ۱، کاراکتر خطی نامیده می‌شود.

به آسانی می‌توان دید که کاراکترهای خطی یک گروه در هیچ عضوی از آن گروه صفر نیستند و بنابراین کاراکتر $\chi$ از گروه $G$ خطی است اگر و فقط اگر $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ همریختی باشد که $\mathbb{C}^*$ گروه ضربی $\mathbb{C}$ است. در حالت خاص، تابع $1_G$ که هر عضو $G$ را به ۱ می‌نگارد، یک کاراکتر خطی است که آن را کاراکتر اصلی می‌نامند. همچنین اگر $G \leqslant \mathbb{S}_m$ آنگاه تابع $\varepsilon$ که جایگشت‌های زوج را به ۱ و جایگشت‌های فرد را به ۱− می‌نگارد، یک کاراکتر خطی است که آن را کاراکتر متناوب می‌نامند. در حقیقت برای هر $\sigma \in G$ داریم، $\varepsilon(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

حال فرض کنید $\chi$ و $\psi$ دو کاراکتر از $G$ باشند که به ترتیب توسط نمایش‌های $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ پیشنهاد شده‌اند و $n = \chi(1) + \psi(1)$. در این صورت تابع $\mathcal{Z} : G \to GL_n(\mathbb{C})$ با ضابطهٔ

$$\mathcal{Z}(g) = \begin{bmatrix} \mathcal{X}(g) & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}(g) \end{bmatrix}$$

یک نمایش از $G$ است. بدیهی است که

$$(\chi + \psi)(g) = \chi(g) + \psi(g) = \mathrm{tr}\mathcal{Z}(g) \ .$$

بنابراین $\chi + \psi$ کاراکتری از $G$ پیشنهاد شده توسط نمایش $\mathcal{Z}$ می‌باشد. این نتیجه می‌دهد که مجموع کاراکترها نیز یک کاراکتر است. یک کاراکتر را تحویل‌ناپذیر گویند هرگاه نتوان آن را بصورت مجموع دو کاراکتر نوشت. بدیهی است که هر کاراکتر خطی تحویل‌ناپذیر است.

قضیهٔ زیر اطلاعاتی در مورد کاراکترهای یک گروه ارائه می‌دهد.

**قضیه ۲.** فرض کنید $G$ یک گروه و $\chi$ کاراکتری از آن باشد. در این صورت

الف) $\chi$ یک تابع کلاسی است، یعنی روی هر کلاس تزویج $G$ مقدار ثابتی دارد.

ب) برای هر $g \in G$، $|\chi(g)| \leq \chi(1)$ و $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.

ج) تعداد کاراکترهای تحویل‌ناپذیر $G$ برابر است با تعداد کلاس‌های تزویج $G$.

د) گروه $G$ آبلی است اگر و فقط اگر هر کاراکتر تحویل‌ناپذیر $G$ خطی باشد.

ه ) تعداد کاراکترهای خطی $G$ برابر است با $|G : G'|$، که در آن $G'$ زیرگروه مشتق $G$ است.

**اثبات.** رجوع شود به فصل دوم از مرجع ۲ .

چون زیرگروه مشتق گروه متقارن $\mathbb{S}_n$ برابر زیرگروه متناوب $\mathbb{A}_n$ است لذا نتیجهٔ زیر از قضیهٔ قبل حاصل می‌شود.

**نتیجه ۳.** کاراکتر اصلی و کاراکتر متناوب تنها کاراکترهای خطی گروه $\mathbb{S}_n$ می‌باشند.

قضیه‌ای منسوب به برنساید[1] در مورد کاراکترهای غیرخطی به صورت زیر وجود دارد.

**قضیه ۴.** هر کاراکتر تحویل‌ناپذیر غیرخطی در یک عضو از گروه صفر است.

**اثبات.** رجوع شود به فصل سوم از مرجع ۲ .

در ادامهٔ این بخش توابعی را معرفی می‌کنیم که تعمیمی از تابع دترمینان هستند.

**تعریف:** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع باشد. تابع

$$d_\chi^G : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

با ضابطهٔ

[1] Burnside

$$d_{\chi}^{G}(A)=\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

را تابع ماتریسی تعمیم‌یافته نسبت به $G$ و $\chi$ می‌نامند که $A=(a_{ij})$.

بدیهی است که اگر $\chi$ و $\psi$دو تابع مختلط روی $G$ باشند و $\lambda\in\mathbb{C}$ آنگاه $d^{G}_{\chi+\lambda\varphi}=d^{G}_{\chi}+\lambda d^{G}_{\varphi}$. همچنین برای هر تابع $\chi:G\to\mathbb{C}$، تابع $\hat{\chi}:\mathbb{S}_n\to\mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$\hat{\chi}(g)=\begin{cases}\chi(g) & g\in G\\ 0 & g\in\mathbb{S}_n-G\end{cases}$$

توسیعی از $\chi$ به $\mathbb{S}_n$ می‌باشد که خارج $G$ صفر است. بدیهی است که $d^{G}_{\chi}=d^{\mathbb{S}_n}_{\hat{\chi}}$ و برای هر ماتریس جایگشتی $A_\sigma$ داریم، $\hat{\chi}(\sigma)=d^{G}_{\chi}(A_\sigma)$. این بدین معنی است که یک تابع ماتریسی تعمیم‌یافته با استفاده از ماتریس‌های جایگشتی به طور کامل مشخص می‌شود.

**مثال:** فرض کنید $G=\mathbb{S}_n$.

الف) اگر $\chi=1_G$ کاراکتر اصلی $G$ باشد آنگاه $d^{G}_{\chi}=\mathbf{per}$ همان تابع معروف پرمننت می‌باشد.

ب) اگر $\chi=\varepsilon$ کاراکتر متناوب $G$ باشد آنگاه $d^{G}_{\chi}=\det$ همان تابع معروف دترمینان می‌باشد.

مارکوس[1] در مرجع ۶ ثابت کرد که اگر $\chi$ کاراکتر خطی $G$ باشد، که $G\leqslant\mathbb{S}_n$، و $d^{G}_{\chi}$ روی ماتریس‌های وارون‌ناپذیر صفر شود آنگاه $G=\mathbb{S}_n$ و $\chi=\varepsilon$. به عبارت دیگر، $d^{G}_{\chi}=\det$. مریس[2] نیز به حالت دوگان مسالهٔ مارکوس توجه کرد. او در مراجع ۷ و ۸ ثابت کرد که اگر $\chi$ کاراکتر تحویل‌ناپذیری از $G$ باشد و $d^{G}_{\chi}$ روی ماتریس‌های وارون‌پذیر غیرصفر باشد آنگاه $G=\mathbb{S}_n$ و $\chi=\varepsilon$. در نتیجه $d^{G}_{\chi}=\det$. قضیهٔ بعدی، که توسط نویسندگان مقالهٔ حاضر با دو روش متفاوت در مراجع ۳ و ۴ ثابت شده است، تعمیمی از نتایج مارکوس و مریس می‌باشد که نشان می‌دهد مضارب دترمینان تنها توابع ماتریسی تعمیم‌یافته هستند که شبیه دترمینان رفتار می‌کنند. در ادامه برای تطبیق با نمادهای مراجع ۳ و ۴ ، مجموعهٔ ماتریس‌های وارون‌پذیر و مجموعهٔ ماتریس‌های وارون‌ناپذیر از $M_n(\mathbb{C})$ را به ترتیب با $\mathcal{N}$ و $\mathcal{S}$ نشان می‌دهیم.

**قضیه ۵.** فرض کنید $G\leqslant\mathbb{S}_n$ و $\chi:G\to\mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\forall A\in\mathcal{N},\ d^{G}_{\chi}(A)\neq 0$.

ب) $\forall A\in\mathcal{S},\ d^{G}_{\chi}(A)=0$.

ج) $G=\mathbb{S}_n$ و $\chi=\chi(1)\varepsilon$.

**اثبات.** رجوع شود به قضیهٔ **۱.۲** از مرجع ۳ یا قضیهٔ **۱.۲** از مرجع ۴ .

به عنوان کاربردی از قضیهٔ فوق، نویسندگان حاضر علاوه بر نتایج دیگر، یک شرط معادل برای تساوی دو تابع ماتریسی تعمیم‌یافته روی $\mathcal{N}$ یا روی $\mathcal{S}$ به صورت زیر بدست آوردند.

**قضیه ۶.** فرض کنید $H,K\leqslant\mathbb{S}_n$. اگر $\varphi:H\to\mathbb{C}$ و $\psi:K\to\mathbb{C}$ دو تابع باشند آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) $\forall A\in\mathcal{N},\ d^{H}_{\varphi}(A)=d^{K}_{\psi}(A)$.

ب) $\forall A\in\mathcal{S},\ d^{H}_{\varphi}(A)=d^{K}_{\psi}(A)$ و $\varphi(1)=\psi(1)$.

ج) توابع $\varphi$ و $\psi$ روی $H\cap K$ برابر و خارج $H\cap K$ صفر هستند.

---
[1] Marcus
[2] Merris

**اثبات.** رجوع شود به قضیهٔ **۲.۲** از مرجع ۳ .

لازم به ذکر است که قضایای **۵** و **۶** در مرجع ۵ به صورت دیگر تعمیم داده شده‌اند. همچنین سانگوانگ[1] و رادتس[2] در مرجع ۹ با تاثیر از مراجع ۳ و ۴ ، به یک شرط معادل برای تساوی دو تابع ماتریسی تعمیم‌یافته روی ماتریس‌های متقارن دست یافتند.

می‌دانیم که دترمینان حافظ ضرب ماتریس‌ها و تشابه ماتریس‌ها است. قضیهٔ زیر و دو نتیجهٔ آن نشان می‌دهند که تنها توابع ماتریسی تعمیم‌یافته که حافظ ضرب ماتریس‌ها و تشابه ماتریس‌ها می‌باشند مضاربی از دترمینان هستند.

**قضیه ۷.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\forall A, B \in \mathcal{S},\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(BA)$.

ب) $\forall A, B \in \mathcal{N},\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(BA)$.

ج) $\forall A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{N},\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(BA)$.

د) $\forall A, B \in \mathcal{N},\ d_\chi^G(B^{-1}AB) = d_\chi^G(A)$.

ه) $\forall A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{N},\ d_\chi^G(B^{-1}AB) = d_\chi^G(A)$.

و) $G = \mathbb{S}_n$ و $\chi = \chi(1)\varepsilon$.

**اثبات.** رجوع شود به قضیهٔ **۲.۲** از مرجع ۴ .

**نتیجه ۸.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\forall A, B \in \mathcal{S},\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(A)d_\chi^G(B)$.

ب) $\forall A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{N},\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(A)d_\chi^G(B)$.

ج) $G = \mathbb{S}_n$ و $\chi = \chi(1)\varepsilon$.

**اثبات.** رجوع شود به نتیجهٔ **۳.۲** از مرجع ۴ .

**نتیجه ۹.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\forall A, B \in \mathcal{N},\ d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(A)d_\chi^G(B)$.

ب) $G = \mathbb{S}_n$ و $\chi = \varepsilon$.

**اثبات.** رجوع شود به نتیجهٔ **۴.۲** از مرجع ۴ .

## ۳. نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از ماتریس‌های جایگشتی و ماتریس‌های متقارن رفتارهای توابع ماتریسی تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار می‌گیرند. در حقیقت برخی از نتایج بخش قبل را نسبت به ماتریس‌های جایگشتی یا ماتریس‌های متقارن مورد مطالعه قرار داده و نتایج جدیدی را بدست می‌آوریم.

ابتدا با قضیهٔ زیر شروع می‌کنیم که یک معیار برای تابع کلاسی بودن ارائه می‌دهد.

**قضیه ۱۰.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$. در این صورت تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع کلاسی است اگر و فقط اگر

[1] Sanguanwong
[2] Rodtes

$$\forall \alpha,\beta \in G,\ d_\chi^G(A_\alpha A_\beta)=d_\chi^G(A_\beta A_\alpha)$$

**اثبات.** $\Leftarrow$ ابتدا فرض کنیم $\chi$ یک تابع کلاسی و $\alpha,\beta\in G$ دلخواه باشند. در این صورت از قضیهٔ ۱ داریم،

$$\begin{aligned} d_\chi^G(A_\alpha A_\beta) &= d_\chi^G(A_{\alpha\beta}) \\ &= \chi(\alpha\beta) \\ &= \chi(\alpha^{-1}(\alpha\beta)\alpha) \\ &= \chi(\beta\alpha) \\ &= d_\chi^G(A_{\beta\alpha}) \\ &= d_\chi^G(A_\beta A_\alpha). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ برعکس نشان می‌دهیم $\chi$ تابع کلاسی است. پس اگر $\alpha,\beta\in G$ دلخواه باشند آنگاه از فرض و قضیهٔ ۱ داریم،

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) &= d_\chi^G(A_\alpha) \\ &= d_\chi^G(A_{(\alpha\beta)\beta^{-1}}) \\ &= d_\chi^G(A_{\alpha\beta}A_{\beta^{-1}}) \\ &= d_\chi^G(A_{\beta^{-1}}A_{\alpha\beta}) \\ &= d_\chi^G(A_{\beta^{-1}\alpha\beta}) \\ &= \chi(\beta^{-1}\alpha\beta). \end{aligned}$$

**نتیجه ۱۱.** فرض کنید $n\leqslant 5$، $1\neq G\leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi: G\to\mathbb{C}$ تابعی باشد که به ازای برخی $1\neq\sigma\in G$، $\chi(\sigma)\neq 0$. در این صورت اگر

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{S}_n,\ d_\chi^G(A_\alpha A_\beta)=d_\chi^G(A_\beta A_\alpha)$$

آنگاه $G=\mathbb{S}_n$ یا $G=\mathbb{A}_n$.

**اثبات.** از فرض برای هر $\alpha,\beta\in\mathbb{S}_n$ داریم $d_{\hat\chi}^{\mathbb{S}_n}(A_\alpha A_\beta)=d_{\hat\chi}^{\mathbb{S}_n}(A_\beta A_\alpha)$ زیرا $d_\chi^G=d_{\hat\chi}^{\mathbb{S}_n}$. بنابراین از قضیهٔ ۱۰، $\hat\chi$ یک تابع کلاسی $\mathbb{S}_n$ است و این نتیجه می‌دهد که $\hat\chi$ روی $\sigma^{\mathbb{S}_n}$، کلاس تزویج $\sigma$ در $\mathbb{S}_n$، غیرصفر است زیرا $\hat\chi(\sigma)=\chi(\sigma)\neq 0$. پس $\sigma^{\mathbb{S}_n}\subseteq G$ و لذا $N=<\sigma^{\mathbb{S}_n}>\subseteq G$. اما $N$ یک زیرگروه نرمال و غیربدیهی از $\mathbb{S}_n$ است و چون $n\leqslant 5$ بنابراین $N=\mathbb{S}_n$ یا $N=\mathbb{A}_n$ و حکم بدست می‌آید.

برای بدست آوردن نتایج جالب دیگر در مورد توابع ماتریسی تعمیم‌یافته، نیاز داریم که لمی را به صورت زیر در مورد گروه‌های متقارن بیان و اثبات کنیم.

**لم ۱۲.** فرض کنید $\sigma\in\mathbb{S}_n$ یک جایگشت غیر همانی و غیر ترانهش باشد. در این صورت جایگشت‌های $\alpha,\beta\in\mathbb{S}_n$ وجود دارند به طوری که

الف) $\alpha$ و $\beta$ هر دو به صورت حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا هستند.

ب) نقاط متحرک $\alpha$ و $\beta$ زیرمجموعهٔ نقاط متحرک $\sigma$ است.

ج) $\sigma=\alpha\beta$.

**اثبات.** ابتدا فرض کنیم $\sigma=(a_1a_2\dots a_k)$ یک $k$ - دور باشد که $k\leqslant 3$.

اگر $k=2l$ زوج باشد آنگاه جایگشت‌های

$$\alpha = (a_1 a_k)(a_2 a_{k-1}) \cdots (a_{l-1} a_{l+2})(a_l a_{l+1})$$
$$\beta = (a_2 a_k)(a_3 a_{k-1}) \cdots (a_{l-1} a_{l+3})(a_l a_{l+2})$$

هر دو به صورت حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا هستند و داریم $\sigma = \alpha\beta$.

همچنین اگر $k = 2l + 1$ فرد باشد آنگاه جایگشت‌های

$$\alpha = (a_1 a_k)(a_2 a_{k-1}) \cdots (a_{l-1} a_{l+3})(a_l a_{l+2})$$
$$\beta = (a_2 a_k)(a_3 a_{k-1}) \cdots (a_{l-1} a_{l+4})(a_l a_{l+3})$$

هر دو به صورت حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا هستند و داریم $\sigma = \alpha\beta$.

اما می‌دانیم که هر جایگشت به صورت حاصل‌ضرب دورهای مجزا نوشته می‌شود بنابراین اگر

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s$$

تجزیهٔ $\sigma$ به دورهای مجزا باشد که در آن $\tau_i$ها ترانهش و $\sigma_i$ها دورهای به طول حداقل ۳ هستند آنگاه برای هر $1 \leqslant i \leqslant s$، جایگشت‌های $\alpha_i$ و $\beta_i$ وجود دارند به طوری که $\alpha_i$ و $\beta_i$ هر دو به صورت حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا هستند، نقاط متحرک $\alpha_i$ و $\beta_i$ زیرمجموعهٔ نقاط متحرک $\sigma_i$ است و $\sigma_i = \alpha_i \beta_i$. حال جایگشت‌های

$$\alpha = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s$$
$$\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$$

به صورت حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا هستند، نقاط متحرک $\alpha$ و $\beta$ زیرمجموعهٔ نقاط متحرک $\sigma$ است و $\sigma = \alpha\beta$. بنابراین حکم اثبات می‌شود.

در ادامه فرض کنیم $\mathbb{T}_n = \{\sigma \in \mathbb{S}_n \mid \sigma^2 = 1\}$. واضح است که $\sigma \in \mathbb{T}_n$ اگر و فقط اگر $\sigma$ به صورت حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا نوشته شود. به عبارت دیگر، $\sigma \in \mathbb{T}_n$ اگر و فقط اگر ماتریس جایگشتی $A_\sigma$ متقارن باشد. با این نمادگذاری، قضیهٔ فوق بیان می‌کند که هر عضو از $\mathbb{S}_n$ به صورت حاصل‌ضرب دو عضو از $\mathbb{T}_n$ است.

در مراجع ۶ و ۷ ، معادل بودن بندهای (الف) و (ج) از قضیهٔ زیر به عنوان یک مساله بیان شده است. قضیهٔ ۱۴.۳ از مرجع ۹ نیز بیان می‌کند که بندهای (الف)، (ج) و (د) معادلند. قضیهٔ زیر از آن جهت حائز اهمیت است که یک شرط معادل دیگر یعنی بند (ه) به آن اضافه شده است. همچنین در مرجع ۹ برای اثبات حالت (د) $\Leftarrow$ (الف)، قضیه‌ای منسوب به فروبنیوس[1] بکار برده شده است که بیان می‌کند هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو ماتریس متقارن نوشت. لازم به ذکر است که بوش[2] اثباتی مقدماتی برای قضیهٔ فروبنیوس در مرجع ۱ داده است. در اثبات قضیهٔ زیر، هیچ استفاده‌ای از قضیهٔ فروبنیوس نخواهد شد.

**قضیه ۱۳.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\forall \sigma \in G, \chi(\sigma) = \chi(\sigma^{-1})$

ب) $\forall \sigma \in G, d_\chi^G(A_\sigma) = d_\chi^G(A_{\sigma^{-1}})$

ج) $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), d_\chi^G(A) = d_\chi^G(A^t)$

د) برای هر دو ماتریس متقارن $A, B \in M_n(\mathbb{C})$، $d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(BA)$.

[1] Frobenius
[2] Bosch

ه) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}_n, d_\chi^G(A_\alpha A_\beta) = d_\chi^G(A_\beta A_\alpha)$

**اثبات.** واضح است که (الف) و (ب) معادلند زیرا برای هر $\alpha \in G$، $d_\chi^G(A_\alpha) = \chi(\alpha)$.

الف $\Leftarrow$ ج: اگر $A = (a_{ij})$ و $A^t = (b_{ij})$ آنگاه از فرض داریم،

$$\begin{aligned} d_\chi^G(A) &= \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j)j} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n b_{j\sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \prod_{j=1}^n b_{j\tau(j)} \\ &= d_\chi^G(A^t) \end{aligned}$$

ج $\Leftarrow$ د: برای هر دو ماتریس متقارن $A$ و $B$ از فرض داریم،

$$d_\chi^G(AB) = d_\chi^G((AB)^t) = d_\chi^G(B^t A^t) = d_\chi^G(BA)$$

د $\Leftarrow$ ه : بدیهی است.

ه $\Leftarrow$ الف: فرض کنیم $\sigma \in G$ دلخواه باشد. اگر $\sigma^2 = 1$ آنگاه حکم بدیهی است. پس فرض کنیم $\sigma^2 \neq 1$. بنابراین از لم ۱۲، جایگشت‌های $\alpha, \beta \in \mathbb{T}_n$ وجود دارند به طوری که $\sigma = \alpha\beta$. لذا از فرض و قضیهٔ ۱ داریم،

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) &= d_\chi^G(A_\sigma) \\ &= d_\chi^G(A_\alpha A_\beta) \\ &= d_\chi^G(A_\beta A_\alpha) \\ &= d_\chi^G(A_{\beta\alpha}) \\ &= d_\chi^G(A_{\sigma^{-1}}) \\ &= \chi(\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

**تذکر:** اگر $\chi$ کاراکتر باشد آنگاه بنابه قضیهٔ ۲، برای هر $\sigma \in G$، $\chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)}$ و لذا بند (الف) از قضیهٔ ۱۳ معادل با این است که $\chi$ حقیقی مقدار باشد.

می‌دانیم که ماتریس‌های جایگشتی وارون‌پذیر هستند. در قضیهٔ ۵ هم دیدیم که مضارب دترمینان تنها توابعی ماتریسی تعمیم‌یافته هستند که روی ماتریس‌های وارون‌پذیر غیرصفرند. حال اگر در قضیهٔ ۵ به جای ماتریس‌های وارون‌پذیر فقط از ماتریس‌های جایگشتی استفاده کنیم آنگاه قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

**قضیه ۱۴.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi$ یک کاراکتر تحویل‌ناپذیر $G$ باشد. در این صورت $d_\chi^G = \det$ یا $d_\chi^G = \mathrm{per}$ اگر و فقط اگر برای هر $\sigma \in \mathbb{S}_n$، $d_\chi^G(A_\sigma) \neq 0$.

**اثبات.** $\Leftarrow$ چون برای هر $\sigma \in \mathbb{S}_n$ داریم، $\det(A_\sigma) = \varepsilon(\sigma) = \pm 1$ و $\mathrm{per}(A_\sigma) = 1$ پس حکم بدست می‌آید.

$\Rightarrow$ اگر $\sigma \in \mathbb{S}_n$ آنگاه بنابه فرض داریم، $\hat{\chi}(\sigma) = d_\chi^G(A_\sigma) \neq ۰$. بنابراین $\sigma \in G$ و $\chi(\sigma) = \hat{\chi}(\sigma) \neq ۰$. این ایجاب می‌کند $G = \mathbb{S}_n$ و $\chi$ یک کاراکتر تحویل‌ناپذیر $\mathbb{S}_n$ است که در هیچ عضوی از $\mathbb{S}_n$ صفر نیست. از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود که $\chi$ کاراکتر خطی است و بنابه نتیجهٔ ۳، چون $\varepsilon$ و $1_{\mathbb{S}_n}$ تنها کاراکترهای خطی $\mathbb{S}_n$ هستند پس $\chi = \varepsilon$ یا $\chi = 1_{\mathbb{S}_n}$. به عبارت دیگر، $d_\chi^G = \mathbf{det}$ یا $d_\chi^G = \mathbf{per}$.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که تحویل‌ناپذیری کاراکتر در قضیهٔ فوق ضروری است.

**مثال:** چون مجموع کاراکترها، کاراکتر است پس $\chi = 1_{\mathbb{S}_۲} + ۲\varepsilon$ کاراکتری از $\mathbb{S}_۲$ است که تحویل‌ناپذیر نیست و برای هر $\sigma \in \mathbb{S}_۲$ داریم،

$$d_\chi^{\mathbb{S}_۲}(A_\sigma) = \chi(\sigma) = ۱ + ۲\varepsilon(\sigma) \neq ۰$$

همچنین برای جایگشت $\sigma = ۱$ داریم،

$$d_\chi^{\mathbb{S}_۲}(A_\sigma) = \chi(\sigma) = ۳$$
$$\mathbf{per}(A_\sigma) = 1_G(\sigma) = ۱$$
$$\mathbf{det}(A_\sigma) = \varepsilon(\sigma) = ۱$$

بنابراین $d_\chi^{\mathbb{S}_۲} \neq \mathbf{det}$ و $d_\chi^{\mathbb{S}_۲} \neq \mathbf{per}$.

با توجه به نتیجهٔ ۹، دترمینان تنها تابع ماتریسی تعمیم‌یافته است که حافظ ضرب ماتریس‌ها است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که دترمینان و پرمننت تنها توابع ماتریسی تعمیم‌یافته هستند که حافظ ضرب ماتریس‌های جایگشتی هستند.

**قضیه ۱۵.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت $d_\chi^G = \mathbf{det}$ یا $d_\chi^G = \mathbf{per}$ اگر و فقط اگر

$$\forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}_n,\ d_\chi^G(A_\sigma A_\tau) = d_\chi^G(A_\sigma) d_\chi^G(A_\tau).$$

**اثبات.** $\Leftarrow$ چون دترمینان حافظ ضرب ماتریس‌ها است پس حکم برای دترمینان برقرار است. همچنین از قضیهٔ ۱ برای هر $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ داریم،

$$\mathbf{per}(A_\sigma A_\tau) = \mathbf{per}(A_{\sigma\tau}) = 1_G(\sigma\tau) = ۱ = 1_G(\sigma) 1_G(\tau) = \mathbf{per}(A_\sigma)\mathbf{per}(A_\tau)$$

بنابراین حکم برای پرمننت نیز برقرار است.

$\Rightarrow$ برعکس برای هر $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ از فرض و قضیهٔ ۱ داریم،

$$d_\chi^G(A_{\sigma\tau}) = d_\chi^G(A_\sigma A_\tau) = d_\chi^G(A_\sigma) d_\chi^G(A_\tau).$$

اگر $\sigma = \tau = ۱$ آنگاه

$$\chi(۱) = d_\chi^G(I) = d_\chi^G(I) d_\chi^G(I) = \chi(۱)^۲$$

بنابراین $\chi(۱) = ۰$ یا $\chi(۱) = ۱$. اگر $\chi(۱) = ۰$ آنگاه برای هر $\sigma \in G$ داریم،

$$\chi(\sigma) = d_\chi^G(A_\sigma) = d_\chi^G(A_\sigma I) = d_\chi^G(A_\sigma) d_\chi^G(I) = \chi(\sigma)\chi(۱) = ۰$$

و این تناقض است زیرا $\chi$ یک تابع غیرصفر است. پس $\hat{\chi}(۱) = \chi(۱) = ۱$. همچنین از فرض برای هر $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ داریم،

$$\hat{\chi}(\sigma\tau) = d_\chi^G(A_{\sigma\tau}) = d_\chi^G(A_\sigma) d_\chi^G(A_\tau) = \hat{\chi}(\sigma)\hat{\chi}(\tau)$$

در حالت خاص داریم $\hat{\chi}(\sigma) \neq ۰$، زیرا

$$۱ = \hat{\chi}(۱) = \hat{\chi}(\sigma)\hat{\chi}(\sigma^{-۱})$$

پس $G=\mathbb{S}_n$ و $\hat{\chi}=\chi$. روابط فوق نشان می‌دهند که $\chi:\mathbb{S}_n\to\mathbb{C}^*$ یک همریختی است و لذا یک کاراکتر خطی از $\mathbb{S}_n$ می‌باشد. چون بنابه نتیجهٔ ۳، $\varepsilon$ و $1_{\mathbb{S}_n}$ تنها کاراکترهای خطی $\mathbb{S}_n$ هستند پس $\chi=\varepsilon$ یا $\chi=1_{\mathbb{S}_n}$. به عبارت دیگر، $d_\chi^G=\mathbf{det}$ یا $d_\chi^G=\mathbf{per}$.

قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ ۱۵می‌باشد که بیان می‌کند دترمینان و پرمننت تنها توابع ماتریسی تعمیم یافته هستند که حافظ ضرب ماتریس‌های جایگشتی متقارن هستند.

**قضیه ۱۶.** فرض کنید $G\leqslant\mathbb{S}_n$ و $\chi:G\to\mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت $d_\chi^G=\mathbf{det}$ یا $d_\chi^G=\mathbf{per}$ اگر و فقط اگر

$$\forall\sigma,\tau\in\mathbb{T}_n,\ d_\chi^G(A_\sigma A_\tau)=d_\chi^G(A_\sigma)d_\chi^G(A_\tau)$$

**اثبات.** کافی است عکس قضیه را اثبات کنیم. اگر $\sigma\in\mathbb{T}_n$ آنگاه از فرض داریم،

$$\chi(۱)=d_\chi^G(I)=d_\chi^G(A_\sigma A_\sigma)=d_\chi^G(A_\sigma)d_\chi^G(A_\sigma)=\hat{\chi}(\sigma)^۲ \qquad (۱)$$

در حالت خاص با فرض $\sigma=۱$ نتیجه می‌شود $\chi(۱)=\chi(۱)^۲$ و لذا $\chi(۱)=۰$ یا $\chi(۱)=۱$.

همچنین اگر $\sigma\in\mathbb{S}_n-\mathbb{T}_n$ آنگاه بنابه لم ۱۲، $\alpha,\beta\in\mathbb{T}_n$ وجود دارند به طوری که $\sigma=\alpha\beta$. با استفادهٔ مجدد از فرض داریم،

$$\hat{\chi}(\sigma)=d_\chi^G(A_\sigma)=d_\chi^G(A_\alpha A_\beta)=d_\chi^G(A_\alpha)d_\chi^G(A_\beta)=\hat{\chi}(\alpha)\hat{\chi}(\beta) \qquad (۲)$$

در حالت خاص اگر $\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_s$ ترانهش‌های مجزا باشند آنگاه از (۲) به استقرا نتیجه می‌شود،

$$\hat{\chi}(\alpha_۱\alpha_۲\ldots\alpha_s)=\hat{\chi}(\alpha_۱)\hat{\chi}(\alpha_۲)\ldots\hat{\chi}(\alpha_s) \qquad (۳)$$

اگر $\chi(۱)=۰$ آنگاه از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که برای هر $\sigma\in\mathbb{S}_n$، $\hat{\chi}(\sigma)=۰$ و این یعنی $\chi$ تابع صفر است که تناقض است. لذا $\chi(۱)=۱$ و برای هر $\sigma\in\mathbb{S}_n$، $\hat{\chi}(\sigma)=\pm۱$. این نتیجه می‌دهد $G=\mathbb{S}_n$ و $\hat{\chi}=\chi$.

اگر $n\leqslant ۲$ آنگاه حکم بدیهی است. پس فرض کنیم $n\geqslant ۳$. دوباره از رابطهٔ (۲) برای هر دو ترانهش $\alpha$ و $\beta$ داریم،

$$\chi(\alpha\beta)=\chi(\alpha)\chi(\beta)$$

پس از رابطهٔ

$$(a_۱a_۲a_۳)=(a_۱a_۲)(a_۱a_۳)=(a_۲a_۳)(a_۱a_۲)=(a_۱a_۳)(a_۲a_۳)$$

داریم،

$$\chi((a_۱a_۲))\chi((a_۱a_۳))=\chi((a_۲a_۳))\chi((a_۱a_۲))=\chi((a_۱a_۳))\chi((a_۲a_۳))$$

و لذا

$$\chi((a_۱a_۲))=\chi((a_۲a_۳))=\chi((a_۱a_۳))$$

همچنین اگر $n\geqslant ۴$ آنگاه با بکاربردن رابطهٔ فوق برای جایگشت $(a_۲a_۳a_۴)$ داریم،

$$\chi((a_۲a_۳))=\chi((a_۳a_۴))=\chi((a_۲a_۴))$$

دو رابطهٔ اخیر نشان می‌دهند که مقدار $\chi$ روی همهٔ ترانهش‌ها برابر است.

در نهایت از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که اگر مقدار $\chi$ روی ترانهش‌ها برابر با ۱ باشد آنگاه $\chi=1_G$ و $d_\chi^G=\mathbf{per}$ و اگر مقدار $\chi$ روی ترانهش‌ها برابر با ۱− باشد آنگاه $\chi=\varepsilon$ و $d_\chi^G=\mathbf{det}$.

در مرجع [۹] قضیه‌ای ثابت شده است که بیان می‌کند اگر $\chi$ کاراکتری از $G$ باشد آنگاه $d_\chi^G=\mathbf{det}$ اگر و فقط اگر $d_\chi^G$ حافظ ضرب ماتریس‌های متقارن باشد. نتیجهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ مذکور است که در آن شرط کاراکتر بودن $\chi$ حذف شده است.

**نتیجه ۱۷.** فرض کنید $G \leqslant \mathbb{S}_n$ و $\chi : G \to \mathbb{C}$ یک تابع غیرصفر باشد. در این صورت $d_\chi^G = \det$ اگر و فقط اگر برای هر دو ماتریس متقارن $A$ و $B$، $d_\chi^G(AB) = d_\chi^G(A) d_\chi^G(B)$.

**اثبات.** کافی است عکس نتیجه را اثبات کنیم. طبق قضیهٔ ۱۶ داریم، $d_\chi^G = \det$ یا $d_\chi^G = \mathrm{per}$. اگر $n = ۱$ آنگاه $\det = \mathrm{per}$ و حکم بدیهی است. پس فرض کنیم $۲ \leqslant n$ و $d_\chi^G = \mathrm{per}$. در این صورت با فرض

$$A = B = \left(\begin{array}{cc|c} ۱ & ۱ & \mathrm{o} \\ ۱ & ۱ & \\ \hline \mathrm{o} & & I_{n-۲} \end{array}\right)$$

داریم،

$$AB = \left(\begin{array}{cc|c} ۲ & ۲ & \mathrm{o} \\ ۲ & ۲ & \\ \hline \mathrm{o} & & I_{n-۲} \end{array}\right)$$

و

$$d_\chi^G(AB) = \mathrm{per}(AB) = ۸ \neq ۴ = \mathrm{per}(A)\mathrm{per}(B) = d_\chi^G(A) d_\chi^G(B)$$

که یک تناقض است. پس $d_\chi^G = \det$ و حکم ثابت است.

## References


1. A. J. Bosch, The factorization of a square matrix into two symmetric matrices, The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 6, 1986, 462-464.

2. I. M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York, 1976.

3. M. H. Jafari, A. R. Madadi, On the equality of generalized matrix functions, Linear Algebra and its Applications, Vol. 456, 2014, 16-21.

4. M. H. Jafari, A. R. Madadi, Generalized matrix functions and determinants, Central European Journal of Mathematics, Vol. 12, No. 3, 2014, 464-469.

5. M. H. Jafari, A. R. Madadi, Generalized matrix functions, irreducibility and equality, Bulletin of the Korean Mathematical Society, Vol. 51, No. 6, 2014, 1615-1623.

6. M. Marcus, Finite Dimensional Multilinear Algebra, Part I, Marcel Dekker, 1973.

7 R. Merris, Multilinear Algebra, Gordon and Breach Science Publishers, 1997.

8. R. Merris, Generalized matrix functions: a research problem, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 8, 1979, 83-86.

9. R. Sanguanwong and K. Rodtes, The equality of generalized matrix functions on the set of all symmetric matrices, Vol. 565, No. 15, 2019, 65-81.