

## حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای کسری تأخیری با استفاده از چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد

لیلا منصوری<sup>۱</sup>، اسمعیل بابلیان<sup>۲\*</sup>

۱- دانشگاه آزاداسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

۲- دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی

دریافت: ۹۹/۰۴/۲۳

پذیرش: ۹۹/۰۹/۰۴

### چکیده

در این مقاله، روش گالرکین<sup>۱</sup> با پایه چندجمله‌ای‌های گنوجی<sup>۲</sup> متعامد انتقال یافته را برای حل یک رده از معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری به کار می‌بریم. برای این منظور ابتدا جواب تقریبی معادله را بر حسب این چندجمله‌ای‌ها بسط می‌دهیم و سپس ماتریس عملیاتی چندجمله‌ای‌های گنوجی را برای مشتقات کسری با مفهوم کاپاتو<sup>۳</sup> به دست می‌آوریم. مزیت این روش این است که با جای‌گذاری جواب تقریبی در معادله اصلی و به کار بردن ماتریس‌های عملیاتی، معادله به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود که با روش نیوتن قابل حل است. به علاوه، در تحلیل همگرایی روش نشان می‌دهیم که تحت شرایطی جواب روش گالرکین به کمک توابع متعامد گنوجی به جواب واقعی همگراست. در پایان نتایج عددی ارائه شده است تا کارایی و اعتبار روش و نیز مناسب بودن کران خطا را نشان دهند؛ به علاوه با توجه به نتایج عددی مشاهده می‌شود که با این روش در بازه‌های بزرگ نیز جواب‌های قابل قبولی به دست می‌آید.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا، معادلات کسری تأخیری، چندجمله‌ای‌های گنوجی، روش گالرکین، ماتریس عملیاتی، تحلیل خطا.

### ۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری، تعمیم یافته، معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه صحیح هستند. برای مطالعه تاریخچه توسعه عملگرهای دیفرانسیل کسری می‌توان به [۱۳] مراجعه کرد. اخیراً نویسندگان متعددی به بررسی حسابان کسری و کاربردهای آن در زمین‌لرزه، مکانیک جامد، مکانیک آماری، اقتصاد، حمل و نقل و... پرداخته‌اند [۷، ۱۲، ۱۷]. بیشتر معادلات دیفرانسیل کسری جواب دقیق ندارند در نتیجه، روش‌های عددی مختلفی برای حل تقریبی این معادلات گسترش یافته است [۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۲۴].

\*نویسنده مسئول: babolian@khu.ac.ir

<sup>1</sup> Galerkin method

<sup>2</sup> Genocchi polynomials

<sup>3</sup> Caputo

از طرفی، معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال-دیفرانسیل اغلب پدیده‌های جهان اطراف ما را به خوبی مدل‌سازی می‌کنند، اما برای آن که مدل حاصل سازگاری بیشتری با واقعیت داشته باشند در برخی موارد لازم است که تابع سمت راست معادلات را اصلاح کرد، به طوری که تابع مجهول و مشتقات آن و کران‌های انتگرال‌گیری به زمان‌های گذشته وابسته باشد. صورت اصلی این دسته از معادلات توسط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری نمایش داده می‌شود. این دسته از معادلات پدیده‌هایی را مدل‌سازی می‌کنند که متغیرهایش تحت تأثیر نتایج قبلی نیز هستند. معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری نیز در مقالات متعددی مورد حل و بررسی قرار گرفته‌اند و در [۵] به بررسی وجود و یکتایی جواب این دسته از معادلات پرداخته شده است. همچنین وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری و معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری در [۹،۲۳] بیان شده است. این دسته از معادلات نقش مهمی در توصیف پدیده‌های فیزیکی، زیست‌شناسی، فناوری، فیزیولوژی و سایر زمینه‌های علمی ایفا می‌کنند [۴،۸،۲۰،۲۲]. بنابراین حل این دسته از معادلات مورد توجه دانشمندان متعددی قرار گرفته است [۵،۸،۲۳].

هدف ما در این مقاله، ارائه یک رویکرد جدید برای حل عددی معادله انتگرال دیفرانسیل-ولترای کسری تأخیری<sup>۱</sup> زیر

است

(۱)

$$\begin{cases} D^\beta u(t) = F\left(t, u(t), u(t-h), \int_{t-h}^t g(t, s, u(s)) ds\right), & t \geq 0 \\ u^{(i)}(0) = u_{0i}, & i = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = [\beta]. \end{cases}$$

که در آن  $[\beta]$  کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی  $\beta$  است، توابع  $F$  و  $g$  به اندازه کافی هموار و  $u$  تابع مجهول است. برای حل معادله (۱) روش گالرکین با پایه‌های چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته را به کار برده‌ایم. برای مطالعه کاربردهای این چندجمله‌ای‌ها می‌توانید به [۲،۳،۱۰] رجوع کنید.

به منظور حل معادله (۱) برای ماتریس عملیاتی مشتق کسری مرتبه  $\tau$  به مفهوم کاپوتو را برای چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته به دست می‌آوریم. با به کارگیری این ماتریس‌های عملیاتی و جای‌گذاری جواب تقریبی در معادله اصلی، تابع مانده را به دست می‌آوریم. سپس یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی به دست می‌آید که با روش نیوتن قابل حل است. یکی از فواید این روش این است که چون از چندجمله‌ای‌های متعامد انتقال یافته استفاده می‌کنیم جواب‌های قابل قبولی برای بازه‌های بزرگ‌تر نیز به دست می‌آوریم. به علاوه، با توجه به این که بیش‌تر معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تأخیری جواب دقیق ندارند در بخش تحلیل خطا نشان می‌دهیم که کوچک بودن مانده، نشان دهنده همگرایی روش است.

<sup>1</sup> Fractional Delay Volterra Integro – Differential Equation

این مقاله به صورت زیر تنظیم یافته است:

در بخش ۲، مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل و روابط بین آنها بیان شده است. بخش ۳ به معرفی و توضیح چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته و تقریب توابع اختصاص داده شده است. در بخش ۴ بسط تیلور این چندجمله‌ای‌ها را به دست می‌آوریم، و ماتریس عملیاتی مشتق کسری و ماتریس عملیاتی تأخیری را به دست می‌آوریم و از روش گالرکین برای حل معادله (۱) استفاده می‌کنیم. به علاوه تحلیل خطای روش در بخش ۵ بررسی شده است. برای نشان دادن دقت و کارایی روش مثال‌های عددی در بخش ۶ ارائه شده‌اند. در پایان، نتیجه‌گیری در بخش آخر بیان شده است.

## ۲. حسابان کسری<sup>۱</sup>

### ۱.۲. مشتق کسری کاپوتو<sup>۲</sup>

از آنجا که مشتق کاپوتو برای مسأله مقدار اولیه کاربرد دارد در زیر تعریف آن را بیان می‌کنیم [۶].

(۲)

$$D^{\nu} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\nu-n+1}} ds & n-1 < \nu < n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \nu = n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

که در آن  $\nu > 0$  مرتبه مشتق و  $n$  کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از  $\nu$  است.

برای مشتق کاپوتو تساوی زیر را نیز داریم [۱۳]

(۳)

$$D^{\nu} t^j = \begin{cases} 0, & j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j < [\nu], \\ \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\nu)} t^{j-\nu}, & j \in \mathbb{N}, \quad j \geq [\nu], \quad j \notin \mathbb{N}, \quad j > [\nu] - 1, \end{cases}$$

همچنین مشتق کسری کاپوتو یک عملگر خطی است

$$D^{\nu}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 D^{\nu} f_1(t) + c_2 D^{\nu} f_2(t),$$

که در آن  $c_1$  و  $c_2$  ثابت هستند.

<sup>1</sup> fractional calculus

<sup>2</sup> Caputo's fractional derivative

۲.۲. انتگرال کسری ریمان - لیوویل<sup>۱</sup>

انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می شود [۱۳]

$$I^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t), & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases}$$

که در آن  $f(t) * t^{\alpha-1}$  ضرب پیچشی<sup>۲</sup>  $t^{\alpha-1}$  و  $f(t)$  است.

مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل در روابط زیر صدق می کنند

$$(i) I^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} t^{\mu+\alpha}, \quad \mu > -1,$$

$$(ii) I^\alpha (D^\alpha g(t)) = g(t) - \sum_{j=0}^{n-1} g^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!},$$

$$(iii) D^\alpha (g(t)) = I^{n-\alpha} D^n g(t), \quad n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}.$$

## ۳. چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد و تقریب توابع

## ۱.۳. چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد

چندجمله‌ای‌های گنوجی کلاسیک معمولاً توسط توابع مولد نمایی و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]

$$\frac{2te^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(x) \frac{t^m}{m!}, \quad |t| < \pi,$$

که در آن  $G_m$  چندجمله‌ای از درجه  $m$  است و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$G_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} x^k = 2B_m(x) - 2^{m+1} B_m(x), \quad m = 0, 1, \dots, m.$$

در رابطه بالا  $g_k = 2B_k - 2^{k+1} B_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$  اعداد گنوجی هستند. به علاوه  $B_m$  و  $B_m(x)$  به ترتیب

اعداد برنولی و چندجمله‌ای‌های برنولی هستند. در زیر چندجمله‌ای‌های گنوجی درجه اول تا پنجم  $B_i$  و  $B_i(x)$  برای

$i = 0, 1, 2, 3, 4$  نمایش داده شده‌اند.

$$\begin{array}{lll} G_0(x) = 1, & B_0(x) = 1, & B_0 = 1, \\ G_1(x) = 2x - 1, & B_1(x) = x - \frac{1}{2}, & B_1 = -\frac{1}{2}, \\ G_2(x) = 3x^2 - 3x, & B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, & B_2 = \frac{1}{6}, \end{array}$$

<sup>3</sup> Riemann-Liouville

<sup>4</sup> convolution

$$\begin{aligned} G_3(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 1, & B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, & B_3 &= 0, \\ G_4(x) &= 5x^4 - 10x^3 + 5x, & B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, & B_4 &= -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

تعریف. مجموعه توابع  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N\}$  نسبت به تابع وزن پیوسته و نامنفی  $w$  بر بازه  $[a_0, b_0]$  متعامد نامیده می‌شود، هر گاه

$$\langle \psi_j, \psi_k \rangle_w = \int_{a_0}^{b_0} \psi_j(x) \psi_k(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_k > 0, & j = k, \end{cases}$$

که در آن  $\langle \psi_j, \psi_k \rangle_w$  ضرب داخلی  $\psi_j$  و  $\psi_k$  نسبت به تابع وزن  $w$  است. به علاوه

$$\alpha_j = \langle \psi_j, \psi_j \rangle_w = \|\psi_j\|_w^2,$$

که  $\psi_j \in L_w^2[a_0, b_0]$  ..

چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد درجه  $m$  را با  $OG_m(x)$  نشان می‌دهیم؛ چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد درجه اول تا پنجم در بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر به دست آمده‌اند

$$\begin{aligned} OG_0(x) &= 1, \\ OG_1(x) &= \sqrt{3}(2x - 1), \\ OG_2(x) &= \sqrt{20}(3x^2 - 3x + \frac{1}{2}), \\ OG_3(x) &= \sqrt{175} \left( 4x^3 - 6x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{1}{5} \right), \\ OG_4(x) &= \sqrt{1764} \left( 5x^4 - 10x^3 + \frac{45}{7}x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{1}{14} \right). \end{aligned}$$

چندجمله‌ای‌های متعامد به دست آمده در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\int_0^1 OG_i(t) OG_j(t) dt = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, m,$$

که در آن  $\delta_{ij}$  تابع دلتای کرونیگر<sup>۱</sup> است. حال اگر معادله مورد نظر بر روی بازه  $[0, \mathcal{L}]$  برای  $\mathcal{L} > 0$  تعریف شده باشد، باید بازه مورد نظر را با تغییر متغیر به بازه  $[0, 1]$  انتقال دهیم.

بردار چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد از درجه حداکثر  $m$  روی بازه  $[0, 1]$  را با نماد  $\psi(t)$  نشان می‌دهیم

$$\psi(t) = [OG_0(t), OG_1(t), \dots, OG_m(t)]^T, \quad (۴)$$

<sup>1</sup> Kronecker delta function

همچنین با تغییر متغیر  $x = \frac{t}{L}$  چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته بر روی بازه  $[0, L]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند

(۵)

$$\varphi_{i,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} OG_m \left( \frac{t}{L} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

بردار چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته روی بازه  $[0, L]$  را با نماد  $\Phi(t)$  و به صورت زیر نشان می‌دهیم

(۶)

$$\Phi(t) = [\varphi_{0,m}(t), \varphi_{1,m}(t), \dots, \varphi_{m,m}(t)]^T.$$

به سادگی می‌توان رابطه برداری زیر را نوشت

(۷)

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \psi \left( \frac{t}{L} \right).$$

### ۲.۳. تقریب توابع با استفاده از چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته

در این بخش می‌خواهیم در مورد تقریب توابع با استفاده از چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته، بحث کنیم. در تقریب تابعی مانند  $y$  به دنبال چندجمله‌ای هستیم که تابع داده شده را طوری تقریب بزند که خطای تقریب در فضای نرم‌دار به حداقل برسد.

**قضیه ۱.** فرض کنید،  $I = (a, b)$  و  $\mathbb{P}_n$  مجموعه تمام چند جمله ای های از درجه حداکثر  $n$  باشد، آنگاه به ازای هر  $y \in L_w^2(I)$  و  $n \in \mathbb{N}$  یک چندجمله‌ای منحصر به فرد  $q_n^* \in \mathbb{P}_n$  وجود دارد، به طوری که

$$\|y - q_n^*\|_w \leq \|y - q\|_w, \quad \forall q \in \mathbb{P}_n$$

که در آن \*

$$q_n^*(t) = \sum_{k=0}^n \hat{c}_k p_k(t), \quad \hat{c}_k = \frac{\langle y, p_k \rangle_w}{\|p_k\|_w^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

و  $\{p_k\}_{k=0}^n$  یک پایه متعامد نسبت به تابع وزن  $w$  برای  $\mathbb{P}_n$  است. به طور خاص، بهترین تقریب  $q_n^*$  را با  $\pi_n y$  نشان می‌دهیم که چندجمله‌ای  $q_n^*$  بهترین تقریب تصویر متعامد تابع  $y$  در فضای  $\mathbb{P}_n$  است. به عبارت دیگر [۲۱]

(۸)

$$\langle y - \pi_n y, u \rangle_w = 0, \quad \forall u \in \mathbb{P}_n.$$

چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد انتقال یافته نسبت به تابع وزن  $w(x) = 1$  روی بازه  $I = [0, L]$  متعامد هستند. لذا اگر تابع  $y$  یک عضو دلخواه در فضای  $L^2 [0, L]$  باشد، در این صورت با استفاده از قضیه (۱)، تابع  $y$  دارای بهترین تقریب منحصر به فرد  $\pi_m y$  به صورت زیر است

(۹)

$$\pi_m y(t) = \sum_{i=0}^m c_i \varphi_{i,m}(t),$$

که در آن

(۱۰)

$$c_i = \int_0^L y(t) \varphi_{i,m}(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

#### ۴. ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد

در این بخش ماتریس‌های عملیاتی که برای حل معادله (۱) نیاز داریم را به دست می‌آوریم. ابتدا بسط تیلور چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد را به دست می‌آوریم و سپس ماتریس عملیاتی تأخیری را معرفی می‌کنیم، همچنین ماتریس عملیاتی مشتق کسری به مفهوم کاپاتو را به دست می‌آوریم و در نهایت با کمک این ماتریس‌های عملیاتی و روش گالرکین معادله (۱) را حل می‌کنیم.

##### ۴.۱. بسط تیلور چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد

برای به دست آوردن ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد به بسط تیلور این چندجمله‌ای‌ها نیاز داریم. در این بخش می‌خواهیم ماتریس عملیاتی تبدیل چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد به چندجمله‌ای‌های استاندارد (تیلور) را پیدا کنیم. بسط تیلور  $\varphi_{j,m}$  را به ازای  $j = 0, 1, \dots, m$  در بازه  $[0, L]$  به صورت زیر بیان می‌کنیم

(۱۱)

$$\varphi_{j,m}(t) = Z_{j+1} T_m(t),$$

که در آن  $Z_{j+1}$  یک بردار سطری شامل ضرایب بسط تیلور است. نمایش ماتریسی رابطه بالا به صورت زیر است

(۱۲)

$$\Phi(t) = Z T_m(t),$$

که ماتریس  $Z$ ،  $(m+1) \times (m+1)$  شامل ضرایب بسط تیلور است که  $-j$  امین سطر آن بردار  $Z_{j+1}$  است و بردار  $T_m$  برابر است با

$$T_m(t) = [1, t, t^2, \dots, t^m]^T.$$

### ۴.۲. ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد

در این بخش ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو مرتبه  $\tau$  را برای چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد به دست می‌آوریم.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $0 < \tau < n$ ، برای  $\Phi(t)$  تعریف شده در بخش ۲، رابطه زیر برقرار است

$$D^\tau \Phi(t) \simeq \mathbf{D}^{(\tau)} \Phi(t), \quad (13)$$

که در آن  $\mathbf{D}^{(\tau)}$  ماتریس عملیاتی  $(m+1) \times (m+1)$  برای مشتق کسری مرتبه  $\tau$  به مفهوم کاپوتو است. اثبات. با توجه به رابطه (۱۲) رابطه زیر را می‌توان نوشت

$$D^\tau \Phi(t) = Z D^\tau T_m(t), \quad (14)$$

که در آن

$$D^\tau T_m(t) = [D^\tau 1, D^\tau t, \dots, D^\tau t^m]^T.$$

فرض کنید  $j = [\tau]$ ، با توجه رابطه (۳) روابط زیر نتیجه می‌شوند

$$\begin{aligned} D^\tau t^k &= 0, & k &= 0, \dots, j-1, \\ D^\tau t^k &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\tau)} t^{k-\tau}, & k &= j, \dots, m, \end{aligned}$$

با به کارگیری روابط (۱۴) و (۱۵) داریم

$$D^\tau T_m(t) = [0, 0, \dots, 0, \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\tau)} t^{j-\tau}, \dots, \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\tau)} t^{m-\tau}]^T. \quad (16)$$

حال  $t^{k-\tau}$  را بر اساس چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد بسط می‌دهیم. با توجه به (۹) و (۱۰) روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$t^{k-\tau} \simeq \sum_{l=0}^m a_{lk} \varphi_{l,m}(t), \quad k = j, \dots, m, \quad (17)$$



(۱۸)

$$a_{lk} = \int_0^{\mathcal{L}} t^{k-\tau} \wp_{l,m}(t) dt, \quad l = 0, \dots, m.$$

با جای‌گذاری (۱۱) در (۱۸) رابطه زیر نتیجه می‌شود

(۱۹)

$$a_{lk} = \sum_{i=0}^m Z_{li} \int_0^{\mathcal{L}} t^{k-\tau} t^i dt = \sum_{i=0}^m Z_{li} \frac{\mathcal{L}^{k-\tau+i+1}}{k-\tau+i+1},$$

با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۹) رابطه زیر به دست می‌آید

(۲۰)

$$t^{k-\tau} \simeq \sum_{l=0}^m \left( \sum_{i=0}^m Z_{li} \frac{\mathcal{L}^{k-\tau+i+1}}{k-\tau+i+1} \right) \wp_{l,m}(t), \quad k = j, \dots, m.$$

با جای‌گذاری (۲۰) در (۱۶) به ازای  $k = j, \dots, m$  داریم

(۲۱)

$$\begin{aligned} D^\tau t^k &\simeq \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\tau)} \sum_{l=0}^m \left( \sum_{i=0}^m Z_{li} \frac{\mathcal{L}^{k-\tau+i+1}}{k-\tau+i+1} \right) \wp_{l,m}(t) \\ &= \sum_{l=0}^m A_{kl} \wp_{l,m}(t). \end{aligned}$$

با قرار دادن روابط (۱۶) و (۲۱) در (۱۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود

(۲۲)

$$D^\tau T_m(t) = \hat{A} \Phi(t)$$

که در آن یک ماتریس  $(m+1) \times (m+1)$  است و  $\hat{A}_k = [0, 0, \dots, 0]$  به ازای  $k = 0, \dots, j-1$  و  $\hat{A}_k = [A_{k0}, A_{k1}, \dots, A_{km}]$  به ازای  $k = j, \dots, m$ .

در نهایت با توجه به (۱۴) و (۲۲) می‌توان نوشت

$$D^\tau \Phi(t) \simeq Z \hat{A} \Phi(t) = \mathbf{D}^{(\tau)} \Phi(t),$$

با قرار دادن  $\mathbf{D}^{(\tau)} = Z \hat{A}$  اثبات کامل است. □

### ۴.۳. ماتریس عملیاتی تأخیری چندجمله‌ای‌های گنوجی متعامد

برای ساختن ماتریس عملیاتی تأخیری  $\wp_{i,m}(t-q)$  که  $q \in R$  به صورت زیر عمل می‌کنیم

(۲۳)

$$\Phi(t-q) = \Pi \Phi(t)$$

که در آن  $\Pi = ZK$  و سطر  $(j + 1)$  ام، ماتریس  $K$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$K_j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-q)^{j-i} Z_{i+1}^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

و  $Z_{i+1}^{-1}$  نشان دهنده سطر  $(j + 1)$  ام ماتریس معکوس  $Z$  است.

#### ۴.۴. حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری

برای حل معادله (۱) تابع مجهول  $u$  را به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$u(t) \simeq u_m(t) = C^T \Phi(t),$$

بنابراین رابطه ذیل را می‌توان نوشت

$$D^\beta C^T \Phi(t) \simeq F(t, C^T \Phi(t), C^T \Phi(t-h), \int_{t-h}^t g(t, s, C^T \Phi(s)) ds) + R(t),$$

که در آن  $R$  تابع مانده حاصل از جای‌گذاری جواب تقریبی در معادله (۱) است. به علاوه با توجه به روابط (۱۳) و (۲۳) رابطه زیر به دست می‌آید

(۲۴)

$$R(t) = F(t, C^T \Phi(t), C^T \Pi \Phi(t), \int_{t-h}^t g(t, s, C^T \Phi(s)) - C^T \mathbf{D}^{(\beta)} \Phi(t),$$

برای به دست آوردن بردار مجهول  $C$ ، روش گالرکین را به کار می‌بریم. در روش گالرکین، از مساوی صفر قرار دادن ضرب داخلی تابع مانده و توابع پایه استفاده می‌شود، بنابراین رابطه زیر را می‌توان نوشت

(۲۵)

$$\int_0^L R(t) \varphi_{i,m}(t) dt = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m - \vartheta,$$

در نتیجه  $m - \vartheta + 1$  معادله غیرخطی به دست می‌آید. به علاوه  $\vartheta$  شرط اولیه

(۲۶)

$$u_m^{(i)}(0) = \omega_i, \quad i = 0, 1, \dots, \vartheta - 1,$$

$\vartheta$  معادله جبری را نتیجه می‌دهد. با حل دستگاه  $m + 1$  معادله و  $m + 1$  مجهول حاصل، بردار مجهول ضرایب  $C$  قابل محاسبه است. در نهایت با جای‌گذاری بردار  $C$  جواب تقریبی به دست می‌آید.

## ۵. تحلیل همگرایی

تحلیل خطا و خواص همگرایی در این بخش بررسی می‌شود.

لم ۱. [۱۱] فرض کنید  $y \in C^{m+1}[a_0, b_0]$  و  $I_m y$  چندجمله‌ای درونیاب  $y$  در نقاط  $x_i, i = 0, 1, \dots, m$  (صفرهای چندجمله‌ای چبیشف در  $[a_0, b_0]$ ) است، در این صورت

$$\|y - I_m y\|_{L^2[a_0, b_0]} \leq \sigma \frac{(b-a)^{m+\frac{3}{2}}}{(m+1)! 2^{2m+1}},$$

$$\sigma = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} y(x) \right|$$

که در آن

لم ۲. [۱۱] فرض کنید  $y \in C^{m+1}[a_0, b_0]$  و  $n \leq m+1, n \in \mathbb{N}$   $e_m^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} y(t) - \frac{d^n}{dt^n} \pi_m y(t)$  به علاوه فرض کنید  $\pi_m y \in \text{Span}\{\varphi_{0,m}, \varphi_{1,m}, \dots, \varphi_{m,m}\}$  بهترین تقریب برای  $y$  باشد. در این صورت

$$\|e_m^{(n)}\|_{L^2[a, b]} \leq \frac{\kappa (b_0 - a_0)^{m-n+\frac{3}{2}}}{(m-n+1)! 2^{2m-2n+1}},$$

که در آن

$$\kappa = \|u^{(m+1)}\|_{\infty}.$$

در ادامه، مسأله زیر را در نظر می‌گیریم

(۲۷)

$$D^\beta u(t) = F\left(t, u(t), u(t-h), \int_{t-h}^t g(t, s, u(s)) ds\right),$$

که در آن تابع  $F$  و  $g$  در شرایط زیر صدق می‌کنند

(۲۸)

$$(I) |F(t, x, y, z)| \leq |a_1(t)| |x| + |y| + |z|,$$

$$(II) |g(t, s, w)| \leq |b_1(t)| |b_2(s)| |w|.$$

با توجه به رابطه (ii) می‌توان رابطه (۲۷) را به صورت زیر نوشت

(۲۹)

$$u(t) = I^\beta \left( F\left(t, u(t), u(t-h), \int_{t-h}^t g(t, s, u(s)) ds\right) \right) + I_0(t),$$

که در آن

$$I_0(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^k(0)}{k!} t^k.$$

و با توجه به تعریف  $I^\beta$  می توان نوشت

(۳۰)

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-v)^{\beta-1} F\left(v, u(v), u(v-h), \int_{v-h}^v g(v, s, u(s)) ds\right) dv + I_0(t).$$

با در نظر گرفتن عملگر  $S$  به صورت زیر

$$Su(t) = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-v)^{\beta-1} F\left(v, u(v), u(v-h), \int_{v-h}^v g(v, s, u(s)) ds\right) dv,$$

رابطه (۳۰) را می توان به شکل زیر نوشت

(۳۱)

$$u(t) + Su(t) = I_0(t),$$

لم ۳. (نامساوی گرونوال) فرض کنید  $I$  به صورت  $[a_0, \infty)$ ،  $[a_0, b_0)$  یا  $[a_0, b_0]$  باشد. و  $G_1$ ،  $G_2$  و  $W$  توابع حقیقی روی  $I$  باشد. فرض کنید  $G_2$  و  $W$  توابع پیوسته و نامنفی و  $G_1$  تابعی انتگرال پذیر روی هر زیربازه بسته و کراندار  $I$  باشد. اگر  $G_2$  نامنفی و  $W$  در نامساوی زیر صدق کند

$$W(t) \leq G_1(t) + \int_{a_0}^t G_2(s)W(s)ds,$$

آن گاه

$$W(t) \leq G_1(t) + \int_{a_0}^t G_1(s)G_2(s) \left( e^{\int_s^t G_2(r)dr} \right) ds.$$

قضیه ۳. فرض کنید  $u$  جواب دقیق (۳۱) و  $u_m$  جواب تقریبی آن باشد. به علاوه، فرض کنید توابع  $F$  و  $g$  در شرایط

$$(I) \text{ و } (II) \text{ صدق کنند و } \kappa_1 = \max_{x \in [-h, L]} \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} u(x) \right| \text{ آن گاه } \lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u.$$

اثبات. اگر  $u_m$  جواب تقریبی مسأله (۲۷) با روش گالرکین باشد، آن گاه

$$(u_m, v_m) + (Su_m, v_m) = (I_0, v_m), \quad \forall v_m \in \mathbb{P}_m,$$

اگر  $\pi_m$  بهترین تقریب در فضای  $L^2$  باشد، آن گاه با توجه به قضیه ۱ و رابطه (۸) داریم

<sup>1</sup> Grönwall's inequality

(۳۲)

$$u_m(t) + \pi_m S u_m(t) = \pi_m I_0(t),$$

با کم کردن رابطه (۳۲) از (۳۱) می‌توان نوشت

(۳۳)

$$u - u_m + S u - \pi_m S u_m = I_0 - \pi_m I_0 = 0,$$

برای راحتی قرار می‌دهیم

$$e = u - u_m.$$

ابتدا  $S u - \pi_m S u_m$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

(۳۴)

$$\begin{aligned} S u - \pi_m S u_m &= S u - \pi_m S u_m + \pi_m S u - \pi_m S u \\ &= S u - \pi_m S u + \pi_m (S u - S u_m) \\ &= S u - \pi_m S u + S(u - u_m) - (S(u - u_m) - \pi_m (S u - S u_m)) \\ &= (I_0 - u) - \pi_m (I_0 - u) + S(u - u_m) \\ &\quad - (S(u - u_m) - \pi_m (S u - S u_m)) \\ &= (I_0 - \pi_m I_0) - (u - \pi_m u) + S e - (S e - \pi_m S e). \end{aligned}$$

با جای‌گذاری رابطه (۳۴) در (۳۵) داریم

$$e - (u - \pi_m u) + S e - (S e - \pi_m S e) = 0,$$

در نتیجه

(۳۵)

$$e = (u - \pi_m u) - S e + (S e - \pi_m S e).$$

همچنین با توجه به تعریف عملگر  $S$  می‌توان نوشت

$$S e(t) = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-v)^{\beta-1} F\left(v, e(v), e(v-h), \int_{v-h}^v g(v, s, e(s)) ds\right) dv,$$

رابطه (۳۵) به صورت زیر به دست می‌آید

(۳۶)

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-v)^{\beta-1} F\left(v, e(v), e(v-h), \int_{v-h}^v g(v, s, e(s)) ds\right) dv \\ &\quad + J_1(t) + J_2(t), \end{aligned}$$

که در آن

$$J_1 = u - \pi_m u, \quad J_2 = S e - \pi_m S e.$$

با توجه به رابطه (۳۶) و  $0 \leq t - v \leq \mathcal{L}$  نامساوی زیر نتیجه می‌شود

(۳۷)

$$e(t) \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-v)^{\beta-1} \left| F \left( v, e(v), e(v-h), \int_{v-h}^v g(v,s,e(s)) ds \right) \right| dv + |J_1(t)| + |J_2(t)|,$$

با توجه به این که  $F$  و  $g$  در شرط (I) و (II) صدق می‌کنند، و  $v \in [0, \mathcal{L}]$  می‌توان نوشت

(۳۸)

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-v)^{\beta-1} \left| F \left( v, e(v), e(v-h), \int_{v-h}^v g(v,s,e(s)) ds \right) \right| dv \\ & \leq \int_0^t (t-v)^{\beta-1} \left( |a_1(v)| |e(v)| + |e(v-h)| + \left| \int_{v-h}^v g(v,s,e(s)) ds \right| \right) dv \\ & \leq \int_0^t (t-v)^{\beta-1} \left( |a_1(v)| |e(v)| + |e(v-h)| + |b_1(v)| \int_{v-h}^v |b_2(s)| |e(s)| ds \right) dv \\ & \leq \int_{-h}^t (t-v)^{\beta-1} \left( |a_1(v)| |e(v)| + |e(v)| + |b_1(v)| \int_{v-h}^v |b_2(s)| |e(s)| ds \right) dv \end{aligned}$$

از طرف دیگر با توجه به این که  $-h \leq v-h \leq s \leq v \leq t$ ، رابطه زیر را می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^t \int_{v-h}^v (t-v)^{\beta-1} |b_1(v)| |b_2(s)| |e(s)| ds dv \\ & \leq \int_{-h}^t \int_{-h}^t (t-v)^{\beta-1} |b_1(v)| |b_2(s)| |e(s)| dv ds \\ & = \int_{-h}^t |b_2(s)| |e(s)| \left( \int_{-h}^t (t-v)^{\beta-1} |b_1(v)| dv \right) ds, \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم  $Q_1(t) = \int_{-h}^t (t-v)^{\beta-1} |b_1(v)| dv$  آن‌گاه

$$Q_1(t) \leq \max_{-h \leq v \leq t} |b_1(v)| \frac{(t+h)^\beta}{\beta} \leq \max_{-h \leq v \leq \mathcal{L}} |b_1(v)| \frac{(\mathcal{L}+h)^\beta}{\beta} = M_1,$$

بنابراین رابطه زیر به دست می‌آید

(۳۹)

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\mathcal{L}} \int_{v-h}^v (t-v)^{\beta-1} |b_1(v)| |b_2(s)| |e(s)| ds dv \\ & \leq M_1 \int_{-h}^t |b_2(s)| |e(s)| ds. \end{aligned}$$

با جای‌گذاری (۳۹) در (۳۸) داریم

(۴۰)

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-v)^{\beta-1} \left| F\left(v, e(v), e(v-h), \int_{v-h}^v g(v,s,e(s)) ds\right) \right| dv \\ & \leq \int_{-h}^t (t-v)^{\beta-1} (|a_1(v)| + 1) |e(v)| dv + M_1 \int_{-h}^t |b_2(s)| |e(s)| ds \\ & \leq \int_{-h}^t ((\mathcal{L}-v)^{\beta-1} (|a_1(v)| + 1) + M_1 |b_2(v)|) |e(v)| dv, \end{aligned}$$

به علاوه از روابط (۳۷) و (۴۰) نامساوی زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |e(t)| & \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-h}^t ((\mathcal{L}-v)^{\beta-1} (|a_1(v)| + 1) + M_1 |b_2(v)|) |e(v)| dv \\ & \quad + |J_1(t)| + |J_2(t)|, \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی گرونوال می‌توان نوشت

(۴۱)

$$\begin{aligned} |e(t)| & \leq |J_1(t)| + |J_2(t)| \\ & + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-h}^t (|J_1(s)| + |J_2(s)|) e^{\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_s^t (\mathcal{L}-v)^{\beta-1} (|a_1(v)| + 1) + M_1 |b_2(v)| dv} ds, \end{aligned}$$

حال یک کران بالا برای تابع نمایی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_s^t (\mathcal{L}-v)^{\beta-1} (|a_1(v)| + 1) + M_1 |b_2(v)| dv \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left( \max_{-h \leq v \leq \mathcal{L}} (|a_1(v)| + 1) \frac{2(\mathcal{L}+h)^\beta}{\beta} + M_1 \int_{-h}^{\mathcal{L}} |b_2(v)| dv \right) = M_2. \end{aligned}$$

با توجه به کران بالا و به‌کارگیری نامساوی  $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$  در رابطه (۴۱) نتیجه می‌شود

$$|e(t)|^2 \leq 3|J_1(t)|^2 + 3|J_2(t)|^2 + \frac{3(e^{M_2})^2}{\Gamma(\beta)} \left( \int_{-h}^{\mathcal{L}} (|J_1(s)| + |J_2(s)|) ds \right)^2,$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتس داریم

$$|e(t)|^2 \leq 3|J_1(t)|^2 + 3|J_2(t)|^2 + \frac{3(\mathcal{L}+h)e^{2M_2}}{\Gamma(\beta)} (\|J_1\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} + \|J_2\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]})^2,$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بالا در بازه  $[-h, \mathcal{L}]$  نامساوی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]}^2 &\leq 3 \left( \|J_1\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]}^2 + \|J_2\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]}^2 \right) + \frac{3e^{2M_2}(\mathcal{L}+h)^2}{\Gamma(\beta)} \left( \|J_1\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} + \|J_2\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \right)^2 \\ &\leq 3 \left( 1 + \frac{e^{2M_2}(\mathcal{L}+h)^2}{\Gamma(\beta)} \right) \left( \|J_1\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} + \|J_2\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \right)^2, \end{aligned}$$

بنابراین نامساوی زیر نتیجه می‌شود

(۴۲)

$$\|e\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \leq K_1 \left( \|J_1\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} + \|J_2\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \right),$$

که در آن

$$K_1 = \sqrt{3 + \frac{3e^{2M_2}(\mathcal{L}+h)^2}{\Gamma(\beta)}}.$$

ابتدا یک کران بالا برای  $\|J_1\|_{L^2}$  به دست می‌آوریم، از لم ۲ رابطه زیر به راحتی نتیجه می‌شود

(۴۳)

$$\|J_1\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \leq \kappa_1 \frac{(\mathcal{L}+h)^{m+\frac{3}{2}}}{(m+1)! 2^{2m+1}}.$$

سپس کران بالایی برای  $\|J_2\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]}$  به دست می‌آوریم. با استفاده از لم ۲ می‌توان نوشت

(۴۴)

$$\|Se - \pi_m Se\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \leq \kappa_2 \frac{(\mathcal{L}+h)^{m+\frac{3}{2}}}{(m+1)! 2^{2m+1}},$$

که در آن

$$\kappa_2 = \max_{v \in [-h,\mathcal{L}]} \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} I^\beta F \right|,$$

از رابطه (۲۹) داریم

$$\kappa_2 = \max_{v \in [-h,\mathcal{L}]} \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (e(t) - I_0(t)) \right| = \max_{v \in [-h,\mathcal{L}]} \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} e(t) \right|,$$

و با توجه به لم ۲، رابطه زیر برای مشتق مرتبه  $m+1$  ام خطا، به دست می‌آید

$$\kappa_2 \leq \kappa_1 2\sqrt{\mathcal{L}+h}.$$

بنابراین نامساوی (۴۴) به صورت زیر بیان می‌شود

(۴۵)

$$\|Se - \pi_m Se\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \leq \kappa_1 2\sqrt{\mathcal{L}+h} \frac{(\mathcal{L}+h)^{m+\frac{3}{2}}}{(m+1)! 2^{2m+1}}.$$

با جای‌گذاری روابط (۴۳) و (۴۵) در (۴۲) نامساوی زیر حاصل می‌شود



$$\|e\|_{L^2[-h,\mathcal{L}]} \leq K_2 \frac{(\mathcal{L} + h)^{m+\frac{3}{2}}}{(m+1)! 2^{2m+1}},$$

که در آن

$$K_2 = K_1 \kappa_1 (1 + 2\sqrt{\mathcal{L} + h}).$$

بنابراین  $\square. \lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$

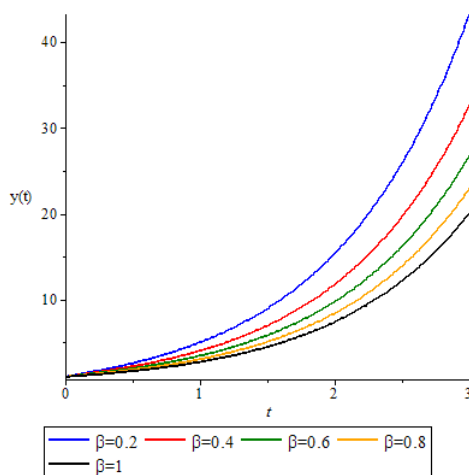
### ۶. مثال‌های عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از به‌کارگیری روش شرح داده شده در بالا را برای انواع مختلفی از معادلات انتگرال - دیفرانسیل کسری تأخیری از نوع ولترا ارائه می‌کنیم.

مثال ۱.۶. از همه معادلات *FDVIDE* به فرم زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} D^\beta u(t) = e^{-2t}u(t) + 2 \int_{t-1}^t e^{(s-t)} u(s) ds, & t > 0, \\ u(t) = e^t, & t \leq 0. \end{cases}$$

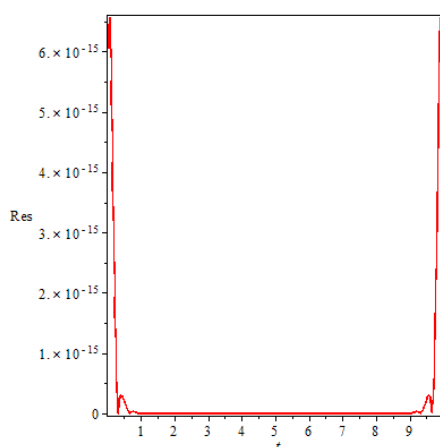
جواب دقیق این معادله به ازای  $\beta = 1$  برابر  $e^t$  است [۱۶]. ما این مسأله را به ازای  $\beta$ های مختلف حل کرده‌ایم و نمودار آن‌ها را در بازه  $[0,3]$  در شکل ۱ رسم کرده‌ایم. به ازای  $\beta = 1$ ، جواب تقریبی و جواب دقیق بر هم منطبق شده‌اند. در جدول ۱ روش بیان شده در این مقاله را با روش موجک چیشف [۱۹] مقایسه کردیم؛ با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که خطای به دست آمده با روش گالرکین-گنوجی از روش چیشف کمتر است. برای این‌که نشان دهیم در بازه‌های بزرگتر نیز روش کاراست، در شکل ۲ به ازای  $m = 30$  نمودار خطا را در بازه  $[0,10]$  رسم کرده‌ایم.



شکل ۱. جواب‌های تقریبی به ازای  $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  با  $m = 10$  در بازه  $[0, 3]$  برای مثال ۱.۶.

جدول ۱. مقایسه خطای مطلق روش موجک چبیشف [۱۹] و روش گالرکین-گنوجی به ازای  $\beta = 1$  برای مثال ۱.۶.

$x$	روش گالرکین-گنوجی		روش موجک چبیشف [۱۹]	
	$ e_{10} $	$ e_{20} $	$ e_{10} $	$ e_{20} $
0.4	$8.93E - 09$	$3.69E - 17$	$4.83E - 07$	$3.88E - 15$
0.8	$1.12E - 09$	$6.43 - 17$	$6.32E - 07$	$6.03E - 15$
1.0	$1.44E - 08$	$6.72E - 17$	$7.64E - 07$	$7.22E - 15$
1.4	$5.18E - 08$	$1.12E - 16$	$1.15E - 07$	$1.07E - 15$
1.8	$5.21E - 07$	$1.71E - 16$	$1.71E - 07$	$1.61E - 15$
2.0	$3.98E - 07$	$3.19E - 16$	$2.04E - 07$	$1.96E - 15$

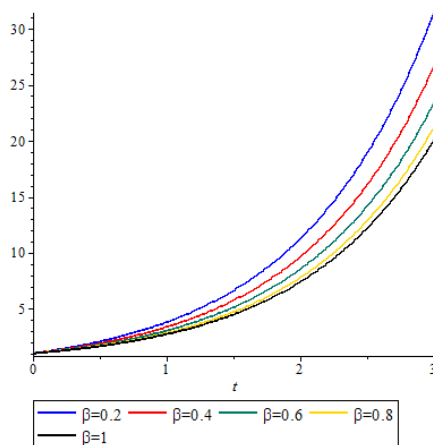


شکل ۲. نمودار تابع مانده به ازای  $\beta = 1$  و  $m = 30$  در بازه  $[0, 10]$  در مثال ۱.۶.

مثال ۲.۶. معادله  $FDVIDE$  زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D^\beta u(t) = u(t-1) + \int_{t-1}^t u(s) ds, & t > 0, \\ u(t) = e^t, & t \leq 0 \end{cases}$$

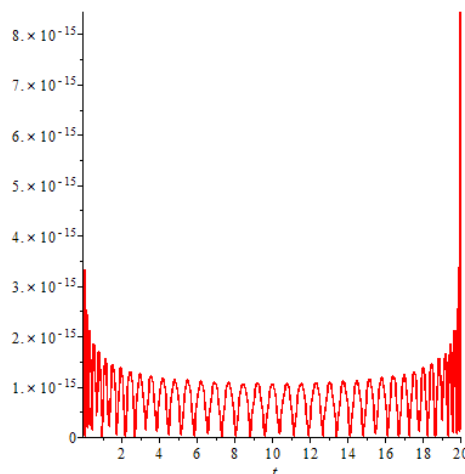
جواب دقیق این معادله به ازای  $\beta = 1$  نیز  $u(t) = e^t$  است [۱۶]. در شکل ۳ به ازای  $\beta$ های مختلف نمودار جواب های تقریبی را رسم کرده ایم. به ازای  $\beta = 1$ ، شکل جواب تقریبی و شکل جواب دقیق بر هم منطبق شده اند. در جدول ۲ روش این مقاله را با روش موجک چبیشف [۱۹] مقایسه کردیم؛ با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می شود که خطای به دست با روش گالرکین-گنوجی از روش چبیشف کمتر است. برای این که نشان دهیم در بازه های بزرگتر نیز روش کاراست، در شکل ۴ به ازای  $m = 40$  نمودار خطا را در بازه  $[0, 20]$  رسم کرده ایم.



شکل ۳. جواب‌های تقریبی به ازای  $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  برای  $m = 10$  مثال ۲.۶.

جدول ۲. مقایسه جواب‌های تقریبی روش موجک چبیشف [۱۹] و روش گالرکین-گنوجی به ازای  $\beta = 1$  برای مثال ۲.۶.

$x$	روش گالرکین-گنوجی		روش موجک چبیشف [۱۹]	
	$ e_{10} $	$ e_{20} $	$ e_{10} $	$ e_{20} $
0.3	$3.09E - 08$	$2.69E - 14$	$5.82E - 06$	$5.66E - 13$
0.9	$1.12E - 08$	$1.43 - 14$	$1.90E - 05$	$7.14E - 14$
1.5	$1.44E - 08$	$4.72E - 14$	$3.02E - 05$	$2.25E - 13$
2.1	$5.18E - 07$	$8.08E - 14$	$5.66E - 05$	$3.23E - 13$
2.7	$5.21E - 07$	$1.51E - 13$	$1.03E - 04$	$5.97 - 13$
3.0	$3.98E - 07$	$1.17E - 13$	$1.45E - 04$	$8.17E - 13$

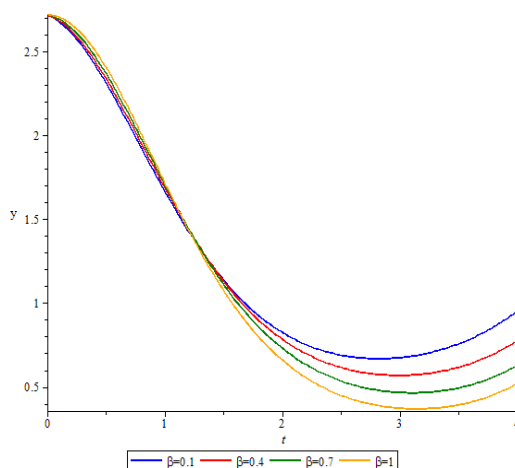


شکل ۴. نمودار تابع مانده به ازای  $\beta = 1$  و  $m = 40$  در بازه  $[0, 20]$  در مثال ۲.۶.

مثال ۳.۶. معادله  $FDVIDE$  را که دارای ضرایب غیر ثابت است در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D^\beta u(t) = -(6 + \sin t) + u\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \int_{t-\frac{\pi}{4}}^t \sin s u(s) ds + 5e^{\cos t}, & t > 0, \\ u(t) = e^{\cos t}, & t \leq 0, \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله به ازای  $\beta = 1$  برابر با  $u(t) = e^{\cos t}$  است. در شکل ۵ نمودار جواب‌های تقریبی به ازای  $\beta$ های مختلف در بازه  $[0, 4]$  برای  $m = 10$  رسم شده است. به ازای  $\beta = 1$  جواب دقیق و جواب تقریبی بر هم منطبق شده است.



شکل ۵. جواب‌های تقریبی به ازای  $\beta = 0.1, 0.4, 0.7, 1$  با  $m = 10$  برای مثال ۳.۶.

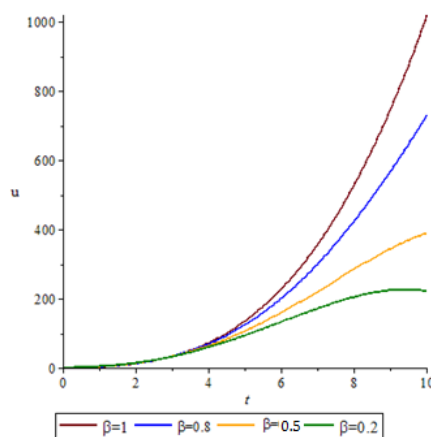
مثال ۴.۶. معادله  $FDVIDE$  را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D^\beta u(t) = f(t) + u(t-1) + \int_{t-1}^t \sinh(s-t) u(s) ds, & t > 0, \\ u(t) = t^3 + 2t, & t \leq 0, \end{cases}$$

و

$$f(t) = -0.457t^3 + 4.897t^2 - 3.077t + 4.039$$

جواب دقیق این معادله به ازای  $\beta = 1$  برابر با  $u(t) = t^3 + 2t$  است. در شکل ۶ نمودار جواب‌های تقریبی به ازای  $\beta$ های مختلف در بازه  $[0, 10]$  به ازای  $m = 8$  رسم شده است. به ازای  $\beta = 1$  جواب دقیق و جواب تقریبی بر هم منطبق شده است. همچنین در بازه  $[0, 20]$  خطای مطلق در برخی نقاط در جدول ۳ درج شده است. که بیان‌گر این مسأله است که در بازه‌های بزرگ نیز جواب تقریبی به جواب دقیق همگراست.



شکل ۶. جواب‌های تقریبی به ازای  $\beta = 0.2, 0.5, 0.8, 1$  با  $m = 10$  برای مثال ۴.۶.

جدول ۳. خطای مطلق به ازای  $m = 20$  در بازه  $[0, 20]$  برای  $\beta = 1$  در مثال ۴.۶.

$x$	0	4	8	12	16	20
$ e_{20} $	$5.21E - 10$	$1.36E - 08$	$3.22E - 07$	$2.41E - 07$	$1.16E - 06$	$3.16E - 06$

### ۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله روش گالرکین با پایه‌های چندجمله‌ای گنوجی متعامد انتقال یافته برای حل یک رده از (FDVIDES) به کار رفته است. برای این منظور ماتریس‌های عملیاتی تأخیری، و مشتق کسری کاپوتو برای این چندجمله‌ای‌ها معرفی شده است. سپس با استفاده از این ماتریس‌ها و روش گالرکین معادله به یک دستگاه معادلات جبری غیر خطی تبدیل شده است که از حل این دستگاه جواب تقریبی معادله به دست آمده است. چون جواب دقیق اکثر (FDVIDE) در دست نیست، تابع مانده روش محاسبه شده است. همچنین در تحلیل همگرایی روش نشان داده شده است که تحت شرایطی جواب روش گالرکین به کمک توابع متعامد گنوجی به جواب واقعی همگراست. مثال‌ها بیان‌گر این موضوع هستند که روش دارای دقت قابل قبول است و در بازه‌های بزرگ نیز کاراست.

### References

1. S. Araci, *Novel identities involving Genocchi numbers and polynomials arising from applications from umbral calculus*, Applied Mathematics and Computation, vol. 233, pp. 599–607, 2014.
2. S. Araci, E. Şen, and M. Acikgoz, *Theorems on Genocchi polynomials of higher order arising from Genocchi basis*, Taiwanese Journal of Mathematics, vol. 18, no. 2, pp. 473–482, 2014.

3. S. Araci, M. Acikgoz, and E. Şen, *On the extended Kim's  $p$ -adic  $q$ -deformed fermionic integrals in the  $p$ -adic integer ring*, Journal of Number Theory, vol. 133, no. 10, pp. 3348–3361, 2013.
4. A. Ovide, K. Boushaba, and A. Boussouar, *A mathematical model of the dynamics of the phytoplankton-nutrient system*, Nonlinear analysis: real world applications 1.1 ,69-87, 2000.
5. K. Balachandran, et al. *Existence of solutions for fractional delay integro-differential equations*, Journal of Applied Nonlinear Dynamics 1.4, 309-319, 2012.
6. R. L. Burden and J.D.Faires, *Numerical Analysis, Seventh Edition*, Brooks, Cole,(2001).
7. T. S. Chow, *Fractional Dynamics of Interfaces Between Soft-Nanoparticles and Rough Substrates*, Phys. Lett. A. 342(1-2), (2005), 148–155.
8. A. Debbouche, *Fractional Evolution Integro-Differential Systems With Nonlocal Conditions*, Advances in Dynamical Systems and Applications, 5(1), pp. 49–60, .2010.
9. K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, 2004.
10. A. F. Horadam, *Genocchi polynomials*, in Proceedings of the 4th International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, pp. 145–166, Kluwer Academic, 1991.
11. S. Javadi, E. Babolian, Z. Taheri, *Solving generalized pantograph equations by shifted orthonormal Bernstein polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 303 (2016) 1-14.
12. R. Metzler, J. Klafter, *The Restaurant at the End of the Random Walk: Recent Developments in the Description of Anomalous Transport by Fractional Dynamics*, Journal of Physics A: Mathematical and General 37, (2004), 161–208.
13. K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York, Wiley, 1993.
14. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, *Fractional-order Bernoulli Wavelets and Their Applications*, Appl. Math. Model., 40, (2016), 087–8107.

15. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, *A New Operational Matrix based on Bernoulli Wavelets for Solving Fractional Delay Differential Equations*, Numer. Algor., 74, (2017), 223–245.
16. F. A. Rihan, E. H. Doha, M. I. Hassan, N. M. Kamel, *Numerical treatments for Volterra delay integro-differential equations*, Computational Methods in Applied Mathematics, Vol. 9(2009), No. 3, 292–308.
17. Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, *Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids*, Appl. Mech. Rev., 50(1), (1997), 15–67.
18. A. Saadatmandi, M. Dehghan, *A Legendre Collocation Method for Fractional Integro-Differential Equations*, Vibration and Control 17(13), (2011), 2050–2058.
19. U. Saeed, M. ur Rehman, & M. A. Iqbal, *Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations*, Applied Mathematics and Computation 264 (2015) 431-442.
20. S. G. Samko, A.A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Vol. 1993. Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
21. J. Shen, T. Tang, L. Wang, *Spectral methods: algorithms, analysis and applications*, Springer, 2011.
22. P.J. Torvik, and R.L. Bagley, *On The Appearance of The Fractional Derivative in The Behavior of Real Materials*, Journal of Applied Mechanics, 51(2), pp. 294–298, 1984.
23. Y. Wang, S. Liang, and Q. Wang, *Existence results for fractional differential equations with integral and multi-point boundary conditions*, Boundary Value Problems 2018 (1), 4.
24. L. Zhu, Q. Fan, *Numerical Solution of Nonlinear Fractional-Order Volterra IntegroDifferential Equations by SCW*, Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 18(5), (2013), 1203–1213.