Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Regularity of second power of edge ideals

Seyed Amin Seyed Fakhari[1]

1. School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran Iran.

E-mail: aminfakhari@ut.ac.ir

Article Info **ABSTRACT**

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
16 July 2020
Revised form:
1 September 2020
Accepted:
15 September 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Edge ideal;
Castelnuovo-Mumford regularity.

Introduction

The study of the minimal free resolution of homogenous ideals and their powers is an interesting and active area of research in commutative algebra. Two invariants which measure the complexity of the minimal free resolutions are the so-called "projective dimension" and "Castelnuovo-Mumford regularity" (or simply, regularity) of the given ideal. Projective dimension determines the length of the minimal free resolution, while regularity is defined in terms of the degree of the entries of the matrices defining the differentials of the resolution. The focus of this paper is on the regularity of powers of ideals. One of the main results in this area is obtained by Cutkosky, Herzog, Trung [7], and independently Kodiyalam [8]. They proved that for a homogenous ideal I in a polynomial ring, the regularity of powers of I is asymptotically linear. In other words, there exist integers $a(I)$ and $b(I)$ such that $\mathrm{reg}(I^s) = a(I)s + b(I)$ for every integer $s \gg 0$. It is known that $a(I)$ is bounded above by the maximum degree of generators of I. Moreover, if I is generated in a single degree d, then $a(I) = d$. But in general, it is not so much known about $b(I)$ even if I is monomial ideal. However, when I is a quadratic squarefree monomial ideal, Alilooee, Banerjee, Beyarslan and Ha [9] conjectured that $b(I) \leq \mathrm{reg}(I) - 2$. In fact, they conjectured that the inequality $\mathrm{reg}(I^s) \leq 2s + \mathrm{reg}(I) - 2$ holds for any integer $s \geq 1$, when I is quadratic squarefree monomial ideal. Recently, Benerjee and Nevo [10] proved this conjecture for $s = 2$. In this paper, we provide an alternative proof for their result. While the proof in [10] is based on topological arguments and using the Hochster's formula, our proof is purely algebraic.

Material and methods

To every simple graph G one associates a quadratic squarefree monomial ideal, called its edge ideal, whose generators are the quadratic squarefree monomials

corresponding to the edges of G. This association is a strong tool in the study of squarefree monomial ideals, as one can use the combinatorial properties of G to obtain information about the algebraic and homological properties of it' s edge ideal.

One of the main results for bounding the regularity of powers of edge ideals is obtained by Benerjee [1]. He proved that the regularity of the sth power of an edge ideal $I(G)$ has an upper bound which is defined in terms of the regularity of its $(s-1)$th power and the regularity of the edge ideal of some graphs which are explicitly determined by the structure of the G. This result has an essential role in our proof.

Results and discussion

The main result of this paper states that for every graph G, with edge ideal $I(G)$, we have $\mathrm{reg}(I(G)^2) \leq \mathrm{reg}(I(G)) + 2$. In order to prove this inequality, using the aforementioned result of Benerjee, we must prove that the regularity of certain colon ideals are at most $\mathrm{reg}\big(I(G)\big)$. To achieve this goal, we use a short exact sequence argument which allows us to estimate the regularity of the colon ideas in terms of the regularity of edge ideal of some graphs which are strictly smaller than G.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The conjectured inequality of Alilooee, Banerjee, Beyarslan and Ha [9] is true for the case of $s = 2$.
- It is known that for every graph G with edge ideal $I(G)$ and induced matching number $\nu(G)$, we have $2s + \nu(G) - 1 \leq \mathrm{reg}(I(G)^s)$, for every integer $s \geq 1$. Thus, our result implies that if $\mathrm{reg}\big(I(G)\big) = \nu(G) + 1$, then $\mathrm{reg}(I(G)^2) = \nu(G) + 3$.
- The short exact sequence argument is a common technique in the study of regularity of monomial ideals. So, it would be interesting if one can prove the above-mentioned conjecture, using this method, even in the case of $s = 3$.

How to cite: Seyed Fakhari, A., (2022) Regularity of second power of edge ideals. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-11

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

عدد نظم توان دوم ایده‌آل‌های یالی

سید امین سید فخاری[1] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، پردیس علوم، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تهران، تهران، ایران. پست الکترونیکی: aminfakhari@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۲۶
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

ایده‌آل یالی،
عدد نظم کاستلنوو-مامفورد.

فرض کنید G یک گراف ساده با ایده‌آل یالی $I(G)$ باشد. بنرجی[1] و نِوو[2] ثابت کردند که برای هر گراف G، نامساوی

$$\operatorname{reg}(I(G)^2) \leq \operatorname{reg}\big(I(G)\big) + 2$$

برقرار است. در این مقاله اثبات دیگری برای این مطلب ارائه می کنیم.

استناد: سید فخاری، سید امین؛ (۱۴۰۱). عدد نظم توان دوم ایده‌آل‌های یالی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۱-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1] Banerjee
[2] Nevo

۱. مقدمه

فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با n متغیر روی میدان K باشد. هر S-مدول مدرج متناهی مولد مانند M دارای تحلیل آزاد مدرج مینیمالی به شکل

$$0 \to \cdots \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}(M)} \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \to M \to 0$$

است. اعداد $\beta_{i,j}(M)$، اعداد بتی [1] مدرج مدول M نامیده می‌شوند. عدد نظم کاستلنوو-مامفورد [2] (یا به اختصار عدد نظم) مدول M عبارت است از

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{j - i \,|\beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

عدد نظم ناوردای بسیار مهمی در جبر جابه‌جایی و هندسه جبری می‌باشد.

خانوادهٔ مهمی از ایده‌آل‌ها که بررسی خواص همولوژیکی آن از موضوعات تحقیقاتی فعال در جبر جابه‌جایی می‌باشد، خانوادهٔ ایده‌آل‌هایی است که به اشیای ترکیبیاتی مانند گراف‌ها و مجتمع‌های سادکی متناظر می‌شوند. در این مقاله مطالعهٔ خود را به بررسی ایده‌آل‌های یالی گراف‌ها محدود می‌کنیم. فرض کنید G یک گراف با مجموعهٔ رئوس $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)$ باشد. ایده‌آل یالی گراف G به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$I(G) = \left(x_i x_j \middle| x_i x_j \in E(G)\right).$$

عدد نظم ایده‌آل‌های یالی گراف‌ها و توان‌های آنها توسط محققان زیادی مطالعه شده است. به عنوان نمرنه می‌توانید مراجع [۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱] را ببینید.

یکی از نتایج مهم در ارتباط با عدد نظم توان‌های ایده‌آلهای همگن، قضیه‌ای است که توسط کوتکسکی [3]، هرتسگ [4]، چونگ [5] [۷] و مستقلا توسط کودیالام [6] [۸] ثابت شده است. بر اساس این قضیه، عدد نظم توان‌های به اندازهٔ کافی بزرگ یک ایده آل همگن دارای ضابطهٔ خطی است. به عبارت دقیق‌تر برای هر ایده آل همگن I، اعداد صحیح $a(I)$ و $b(I)$ موجودند به طوری که به ازای هر $s \gg 0$،

$$\operatorname{reg}(I^s) = a(I)s + b(I).$$

[1] Betti numbers
[2] Castelnuovo-Mumford regularity
[3] Cutkosky
[4] Herzog
[5] Trung
[6] Kodiyalam

به علاوه $a(I)$ حداکثر با ماکزیمم درجهٔ مولدهای I برابر است و در صورتی که مولدهای I دارای درجهٔ برابر مانند d باشند، آن‌گاه $a(I)=d$. اما در حالت کلی اطلاعات زیادی در ارتباط با $b(I)$ وجود ندارد. البته در حالتی که I ایده‌آل یالی یک گراف باشد، حدس زده می‌شود که $b(I)$ حداکثر $\mathrm{reg}(I)-2$ است (حدس ۱ از مرجع[۹]). به عبارت دقیقتر، حدس زیر در این زمینه مطرح است.

حدس۱. به ازای هر گراف G و هر عدد صحیح $s \geq 1$،

$$\mathrm{reg}(I(G)^s) \leq 2s + \mathrm{reg}\big(I(G)\big) - 2.$$

در سال ۲۰۱۹، بنرجی و نِووایِن حدس را برای $s=2$ ثابت کردند [۱۰]. در این مقاله ما اثبات دیگری برای این مطلب ارائه می‌کنیم. در حالی که اثبات بنرجی و نوو مبتنی بر فرمول هاکستر[7] و ایده‌های توپولوژیکی است، اثبات ما کاملاً جبری می‌باشد.

۲. پیش‌نیازها

فرض کنید G یک گراف و x رأسی از G باشد. هر رأس از G که به x متصل باشد یک همسایهٔ رأس x نامیده می‌شود. مجموعهٔ همهٔ همسایه‌های رأس x با $N_G(x)$ نمایش داده می‌شود و قرار می دهیم $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$. زیرگراف H از G یک زیرگراف القایی نامیده می شود اگر به ازای هر دو رأس x و y از H داشته باشیم $xy \in E(H)$ اگر و تنها اگر $xy \in E(G)$. به ازای هر زیرمجموعهٔ A از رئوس G، زیرگراف القایی از G با مجموعهٔ رئوس $V(G) \setminus A$ را با $G \setminus A$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید I یک ایده‌آل تک جمله‌ای با مجموعهٔ مولد مینیمال $\{u_1, \dots, u_m\}$ باشد. همچنین به ازای هر $j = 1, 2, \dots, m$ فرض کنید $u_j = x_1^{a_{1j}} \dots x_n^{a_{nj}}$. قرار دهید

$$b_i = \max\{a_{i1}, \dots, a_{im}\}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

حلقهٔ چند جمله‌ای‌های

$$T = K[x_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq b_i]$$

را درنظر بگیرید. منظور از قطبی‌سازی ایده‌آل I، ایده‌آل $I^{\mathrm{pol}} = (u_1^{\mathrm{pol}}, \dots, u_m^{\mathrm{pol}})$ است که در آن

$$u_j^{\mathrm{pol}} = x_{11} \dots x_{1a_{1j}} x_{21} \dots x_{2a_{2j}} \dots x_{n1} \dots x_{na_{nj}} \in T, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

بنابراین با استفاده از قطبی‌سازی، یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای تبدیل به یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع می شود و بر اساس نتیجه ۳. ۶. ۱ از مرجع [۱۱] عدد نظم ایده‌آل‌های I و I^{pol} برابر هستند.

[7] Hochster

در پایان این بخش یادآوری می‌شود که اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای f متعلق به I است اگر و تنها اگر هر جمع تک‌جمله‌ای f متعلق به I باشد (نتیجه ۳. ۱. ۱ از مرجع [۱۱] را ببینید).

۳. توان دوم ایده‌آل‌های یالی

در این بخش به اثبات قضیهٔ اصلی این مقاله یعنی قضیهٔ ۴ می‌پردازیم. برای این منظور به دو لم زیر نیاز داریم.

لم۲. فرض کنید G یک گراف و xy یالی از G باشد. قرار دهید $L := N_G(x) \cap N_G(y)$. فرض کنید G' گرافی با مجموعهٔ رئوس $V(G') = V(G) \setminus L$ و مجموعهٔ یال‌های

$$E(G') = E(G \setminus L) \cup \{ab \mid a \in N_G(x), b \in N_G(y)\ a \neq b\}$$

باشد. در این صورت

$$(I(G): x) \cap (I(G): y) = I(G') + (L)$$

که منظور از (L) ایده‌آل تولید شده توسط متغیرهای L است (در حالت $L = \emptyset$، ایده آل (L)، ایده‌آل صفر است).

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم ایده‌آل سمت راست مشمول در ایده‌آل سمت چپ است. برای این منظور یک تک‌جمله‌ای u در ایده‌آل سمت راست را در نظر بگیرید. به تقارن کافی‌ست نشان دهیم $u \in (I(G): x)$. واضح است که اگر $u \in I(G)$، آن‌گاه $u \in (I(G): x)$. بنابراین فرض کنید $u \notin I(G)$. از تعریف L و G' نتیجه می‌گیریم که متغیر $a \in N_G(x)$ وجود دارد که u را می‌شمارد. چون ux مضربی از ax است و ax یالی از G است، نتیجه می‌گیریم که $ux \in I(G)$ و این بدان معناست که $u \in (I(G): x)$.

اکنون شمول برعکس را ثابت می‌کنیم. فرض کنید v یک تک‌جمله‌ای در $(I(G): x) \cap (I(G): y)$ باشد که مضرب هیچ متغیری در L نیست. باید ثابت کنیم $v \in I(G')$. اگر $v \in I(G)$، ادعا ثابت شده است. پس فرض کنید $v \notin I(G)$. چون $vx \in I(G)$، نتیجه می‌گیریم که $a \in N_G(x)$ وجود دارد که v را می‌شمارد. مشابهاً از رابطهٔ $vy \in I(G)$ نتیجه می‌گیریم $b \in N_G(y)$ وجود دارد که v را می‌شمارد. از طرفی $v \notin L$. بنابراین $a \neq b$. لذا ab یالی از G' است که نتیجه می‌دهد $v \in I(G')$.

لم۳. فرض کنید G' گراف معرفی شده در لم ۲ باشد. در این صورت $\operatorname{reg}(I(G')) \leq \operatorname{reg}(I(G))$.

اثبات. چون (L) توسط متغیرهایی تولید می‌شود که رئوس G' نیستند

$$\operatorname{reg}(I(G')) = \operatorname{reg}(I(G') + (L)).$$

دنبالهٔ دقیق کوتاه زیر را درنظر بگیرید.

$$0 \to \frac{S}{I(G')+(L)} \to \frac{S}{(I(G):x)} \bigoplus \frac{S}{(I(G):y)} \to \frac{S}{(I(G):x)+(I(G):y)} \to 0$$

با اعمال نتیجهٔ ۷. ۸. ۱ از مرجع [۱۲] روی دنبالهٔ بالا، نامساوی زیر به دست می‌آید.

$$\operatorname{reg}\big(I(G')\big) \le \max\{\operatorname{reg}(I(G):x), \operatorname{reg}(I(G):y), \operatorname{reg}((I(G):x)+(I(G):y))+1\}.$$

بنابراین کافی‌ست نامساوی‌های زیر را ثابت کنیم.

(i) $\operatorname{reg}(I(G):x) \le \operatorname{reg}(I(G))$.

(ii) $\operatorname{reg}(I(G):y) \le \operatorname{reg}(I(G))$.

(iii) $\operatorname{reg}((I(G):x)+(I(G):y)) \le \operatorname{reg}(I(G))-1$.

(i) و (ii) از لم ۲. ۴ از مرجع [۱۳] نتیجه می‌شوند.

برای اثبات (iii) توجه کنید که

$$(I(G):x)+(I(G):y) = I(G \setminus (N_G[x] \cup N_G[y])) + \big(\text{متغیرتعدادی}\big).$$

بنابراین

$$\operatorname{reg}\big((I(G):x)+(I(G):y)\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus (N_G[x] \cup N_G[y]))\big).$$

اجتماع مجزای گراف $G \setminus (N_G[x] \cup N_G[y])$ و یال xy را H بنامید. با استفاده از لم ۲. ۳ از مرجع [۱۴] می‌دانیم که

$$\operatorname{reg}\big(I(G \setminus (N_G[x] \cup N_G[y]))\big) + 1 = \operatorname{reg}\big(I(H)\big).$$

از طرفی چون H یک زیرگراف القایی از G است، با استفاده از نتیجهٔ ۱. ۳ از مرجع [۳]، نامساوی

$$\operatorname{reg}\big(I(H)\big) \le \operatorname{reg}(I(G))$$

به دست می آید. بنابراین

$$\operatorname{reg}\big((I(G):x)+(I(G):y)\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus (N_G[x] \cup N_G[y]))\big) \le \operatorname{reg}\big(I(G)\big) - 1$$

و(iii) ثابت می‌شود.

اکنون به اثبات قضیهٔ اصلی این مقاله می‌پردازیم.

قضیه۴. در هر گراف G نامساوی

$$\mathrm{reg}(I(G)^2) \leq \mathrm{reg}\big(I(G)\big) + 2$$

برقرار است.

اثبات. با استفاده از قضیهٔ ۲. ۵ از مرجع [۱]

$$\mathrm{reg}(I(G)^2) \leq \max\big\{\mathrm{reg}(I(G)^2 \colon xy) + 2, \mathrm{reg}\big(I(G)\big) : xy \in E(G)\ \big\}.$$

بنابراین کافی‌ست نشان دهیم که به ازای هر یال xy از G، نامساوی

$$\mathrm{reg}(I(G)^2 \colon xy) \leq \mathrm{reg}(I(G))$$

برقرار است. برای اثبات نامساوی فوق از استقرا روی تعداد یال‌های G استفاده می‌کنیم. اگر $|E(G)| = 1$، آن‌گاه xy تنها یال G است و نامساوی بالا واضح است.پس فرض کنید G دارای حداقل دو یال باشد. همچنین فرض کنید G' گراف معرفی شده در لم ۲ باشد.

با استفاده از قضایای ۱. ۶ و ۷. ۶ از مرجع [۱] می‌دانیم که ایده‌آل $(I(G)^2 \colon xy)$ توسط تک‌جمله‌ای‌های درجهٔ ۲ به شکل ab تولید می‌شود که

(i) $ab \in E(G)$، یا

(ii) $a \in N_G(x)$ و $b \in N_G(y)$ (در این حالت ممکن است $a = b$).

چون $(I(G)^2 \colon xy)$ توسط تک‌جمله‌ای‌های درجهٔ ۲ تولید می‌شود، $(I(G)^2 \colon xy)^{\mathrm{pol}}$ یک ایده‌آل یالی است. فرض کنید H گرافی باشد که $I(H) = (I(G)^2 \colon xy)^{\mathrm{pol}}$. بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد

$$V(H) = V(G) \cup \{a' | a \in N_G(x) \cap N_G(y)\}$$

و

$$E(H) = E(G) \cup \{ab \mid a \in N_G(x), b \in N_G(y), a \neq b\} \cup \{aa' | \ a \in N_G(x) \cap N_G(y)\}.$$

(توجه کنید که به ازای هر $a \in N_G(x) \cap N_G(y)$، $a^2 \in (I(G) \colon xy)$ و این تک‌جمله‌ای در $(I(G)^2 \colon xy)^{\mathrm{pol}}$ با تک‌جمله‌ای aa' جایگزین می‌شود.)

با استفاده از نتیجهٔ ۳. ۶. ۱ از مرجع [۱۱] می‌دانیم که

$$\mathrm{reg}\big(I(H)\big) = \mathrm{reg}(I(G)^2 : xy).$$

بنابراین ثابت می کنیم

$$\mathrm{reg}\big(I(H)\big) \leq \mathrm{reg}\big(I(G)\big).$$

اگر x و y همسایهٔ مشترکی نداشته باشند، آنگاه $H = G'$ و نامساوی فوق با استفاده از لم ۳ بدست می‌آید. پس حالتی را در نظر بگیرید که x و y دارای همسایهٔ مشترک باشند. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید

$$N_G(x) \cap N_G(y) = \{a_1, \dots, a_k\}$$

که در آن $k \geq 1$. توجه کنید که برای $k \geq 2$، به ازای هر $i \neq j$، رئوس a_i و a_j در H به هم متصل هستند. با استفاده از لم ۲. ۳ از مرجع [۲] می‌دانیم که

$$\mathrm{reg}\big(I(H)\big) \leq \max\{\mathrm{reg}(I(H \setminus N_H[a_1])) + 1, \mathrm{reg}(I(H \setminus a_1))\}.$$

بنابراین برای اثبات قضیه کافی‌ست نشان دهیم

(i) $\mathrm{reg}(I(H \setminus N_H[a_1])) \leq \mathrm{reg}\big(I(G)\big) - 1$ و

(ii) $\mathrm{reg}(I(H \setminus a_1)) \leq \mathrm{reg}(I(G))$.

برای اثبات (i) توجه کنید که رئوس $a_2', \dots, a_k{}'$ در $H \setminus N_H[a_1]$ رئوس ایزوله‌اند. فرض کنید H' گرافی باشد که با حذف رئوس $a_2', \dots, a_k{}'$ از $H \setminus N_H[a_1]$ به دست آمده است. بنابراین

$$\mathrm{reg}(I(H \setminus N_H[a_1])) = \mathrm{reg}\big(I(H')\big).$$

همچنین

$$N_G[x] \cup N_G[y] \subseteq N_G[a].$$

بنابراین اجتماع مجزای H' و یال xy یک زیرگراف القایی از G است و بنا بر لم ۲. ۳ از مرجع [۱۴] و نتیجهٔ ۱. ۳ از مرجع [۳]،

$$\mathrm{reg}\left(I\left(H^{'}\right)\right) + 1 \leq \mathrm{reg}(I(G))$$

و (i) ثابت می شود.

برای اثبات (ii) قرار دهید $G" = G \setminus a_1$ و توجه کنید که

$$I(H \setminus a_1) = (I(G")^2 : xy)^{\mathrm{pol}}.$$

بنابراین با استفاده از نتیجه ۳. ۶. ۱ از مرجع [۱۱] و فرض استقرا نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{reg}(I(H \setminus a_1)) \leq \mathrm{reg}(I(G")).$$

با توجه به این که $G"$ یک زیرگراف القایی از G است، از نتیجهٔ ۱. ۳ از مرجع [۳] و نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم

$$\mathrm{reg}(I(H \setminus a_1)) \leq \mathrm{reg}(I(G))$$

و (ii) ثابت می‌شود.

References

1. Banerjee A., "The regularity of powers of edge ideals", J. Algebraic Combin. 41 (2015) 303-321.

2. Dao H., Huneke C., Schweig J., "Bounds on the regularity and projective dimension of ideals associated to graphs", J. Algebraic Combin. 38 (2013) 37-55.

3. Ha H. T., "Regularity of square free monomial ideals", In S.M. Copper and S. Sather-Wagstaff(Ed.) Connections Between Algebra, Combinatorics, and Geometry. Springer Proceedings in Mathematics Statistics 76 (2014) 251-276.

4. Jayanthan A. V., Narayanan N., Selvaraja S., "Regularity of powers of bipartite graphs", J. Algebraic Combin.47 (2018), 17-38.

5. Seyed Fakhari S. A.,Yassemi S., "Improved bounds for the regularity of edge ideals of graphs", Collect. Math. 69 (2018), 249-262.

6. Woodroofe R., "Matchings, coverings, and Castelnuovo-Mumford regularity", J. Commut. Algebra 6 (2014), 287-304.

7. Cutkosky D., Herzog J.,Trung N. V., "Asymptotic behaviour of Castelnuovo-Mumford regularity", Compositio Math. 118 (1999), 243-261.

8. Kodiyalam V.,"Asymptotic behaviour of Castelnuovo-Mumford regularity", Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 407-411.

9. Banerjee A., Beyarslan S., Ha H. T., "Regularity of edge ideals and their powers", Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 277 (2019), 17-52.

10. Banerjee A., Nevo E.,"Regularity of edge ideals via suspension", preprint 2019.

11. Herzog J., Hibi T., "Monomial Ideals", Springer-Verlag, (2011).

12. Peeva I., "Graded syzygies", Algebra and Applications, vol. 14, Springer-Verlag London Ltd., London, (2011).

13. Seyed Fakhari S. A., "Symbolic powers of cover ideal of very well-covered and bipartite graphs", Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018) 97-110.

14. Hoa L. T., Tam N. D., "On some invariants of a mixed product of ideals", Arch. Math. (Basel) 94 (2010) 327-337.