Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

On the distance eigenvalues of Cayley graphs

Majid Arezoomand[1]

1. Department of Mathematics, University of Larestan, Lar, Iran.

E-mail: arezoomand@lar.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
9 September 2020
Revised form:
5 December 2020
Accepted:
4 January 2021
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Distance matrix; Irreducible representation; Cayley graph; Eigenvalue.

ABSTRACT

Introduction

In this paper, graphs are undirected and loop-free and groups are finite. By C_n, K_n and $K_{m,n}$ we mean the cycle graph with n vertices, the complete graph with n vertices and the complete bipartite graph with parts size m and n, respectively. Also by Z_n and S_n, we mean the cyclic group of order n and the symmetric group on n symbols, respectively.

Let Γ be a simple connected graph with vertex set $\{v_1, \dots, v_n\}$. The *distance* between vertices v_i and v_j, denoted by $d(v_i, v_j)$, is the length of a shortest path between them. The *distance matrix* of Γ, denoted by D_Γ, is an $n \times n$ matrix whose (i,j)-entry is $d(v_i, v_j)$. The *distance characteristic polynomial* of Γ, denoted by $\chi_D(\Gamma)$ is $\det(\lambda I - D)$ and its zeros are the *distance eigenvalues* (in short D-eigenvalues) of Γ. If λ is a D-eigenvalue of Γ with multiplicity m, then we denote it by $\lambda^{[m]}$. Let $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ are the D-eigenvalues of Γ. Then λ_1 is called *distance spectral radius* of Γ and we denote it by $\rho(\Gamma)$. Also the multiset $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ is denoted by $Spec_D(\Gamma)$.

The studying of eigenvalues of distance matrices of graphs goes back to 1971, a paper by Graham and Pollack and thereafter attracted much more attention [2]. There are several applications of distance matrix such as the design of communication networks, network follow algorithms, graph embedding theory and in chemistry, for more details see [2].

Let G be a group and $S = S^{-1}$ be a subset of G not containing the identity element of G. The *Cayley graph* of G with respect of S, denoted by $Cay(G,S)$, is a graph with vertex set G and edge set $\{\{g, sg\} | g \in G, s \in S\}$. $Cay(G,S)$ is a simple $|S|$-regular graph. Let $x, y \in G$. Then for all $g \in G$, x and y are adjacent if and only if xg and yg are adjacent. This implies that $d(g,h) = d(1, hg^{-1})$ and $d(g) = d(1)$ for all $g, h \in G$, where $d(x) = \sum_{y \in G} d(x,y)$.

In the literature, the adjacency eigenvalues of Cayley graphs have been more widely used than the distance eigenvalues. A graph Γ is called *distance (adjacency) integral* if all the eigenvalues of its distance (adjacency) matrix are integers. A graph is called circulant if it is a Cayley graph over a cyclic group. Circulant graphs of valency 2 are cycles. In 2001, the distance eigenvalues of cycles computed [6]. In 2010, the distance spectra of adjacency integral circulant graphs characterized and proved that these graphs are distance integral [9]. In 2011, Rentlen discussed the distance eigenvalues of Cayley graphs of Coxeter groups using the irreducible representations of underlying group [10]. He proved that the eigenvalues of the distance matrix of a Cayley graph of a real reflection group with respect to the set of all reflections are integral and

provided a combinatorial formula for some such spectra. Then, Foster-Greenwood and Kriloff proved that the eigenvalues of the distance, adjacency, and codimension matrices of Cayley graphs of complex reflection groups with connection sets consisting of all reflections are integral and provided a combinatorial formula for the codimension spectra for a family of monomial complex reflection groups [5]. In this paper, we determine the characteristic polynomial of the distance matrix of arbitrary Cayley graphs in terms of the irreducible representations of underlying groups.

Let $\Gamma = \mathrm{C}ay(G, S)$ be a Cayley graph over a finite group G. It is well-known that one can determine the (adjacency) eigenvalues Γ by the irreducible representations of G, see for example [3, Corollary 7]. In this paper, by a similar argument, we determine the distance eigenvalues of Γ in terms of the irreducible representations of G. Then, as an application of our result, we exactly determine the distance eigenvalues of some well-know Cayley graphs: cycles, n-prims, hexagonal torus network and cubic Cayley graphs over abelian groups.

Results and discussion

We construct an infinite family of distance integral Cayley graphs. Also we prove that a finite abelian group G admits a connected cubic distance integral Cayley graph if and only if G is isomorphic to one of the groups Z_4, Z_6, $Z_4 \times Z_2$, $Z_6 \times Z_2$, or $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$. Furthermore, up to isomorphism, there are exactly 5 connected cubic distance integral Cayley graphs over Abelian groups which are K_4, $K_{3,3}$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ and $\mathcal{P}_6$, where $\mathcal{P}_n$ is the n-prism.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The characteristic polynomial of the distance matrix of Cayley graphs over a group G is determined by the irreducible representations of G.
- Exact formulas for n-prisms, hexagonal torus network and cubic Cayley graphs over Abelian groups are given.
- Infinite family of distance integral Cayley graphs are constructed.
- Cubic distance integral Cayley graphs over finite abelian groups are classified. By a similar argument, one can find all quartic distance integral Cayley graphs over finite Abelian groups.
- One can easily compute the distance eigenvalues of a Cayley graph using irreducible representations of the underlying group.

How to cite: Arezoomand, M.; (2022) On the distance eigenvalues of Cayley graphs. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-18

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مقادیر ویژۀ ماتریس فاصلۀ گراف‌های کیلی

مجید آرزومند[۱] ✉

۱. نویسندۀ مسئول، گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی لارستان ، لار، ایران. پست الکترونیکی: arezoomand@lar.ac.ir

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۱۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:
ماتریس فاصله،
گراف کیلی،
مقدار ویژه،
نمایش تحویل‌ناپذیر.

در این مقاله، ماتریس فاصله و چند جمله‌ای مشخصۀ یک گراف کیلی روی گروه متناهی G بر حسب نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه G بیان می‌شوند. فرمول‌های دقیقی برای مقادیر ویژۀماتریس فاصلۀ گراف های کیلی مکعبی روی گروه‌های آبلی و برخی گراف‌های شناخته شدۀ دیگر ارائه می‌دهیم. خانواده ای نامتناهی از گراف¬های کیلی که تمام مقادیر ویژۀ ماتریس فاصلۀ آن ها اعداد صحیحی هستند، معرفی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم روی گروه آبلی متناهی G یک گراف کیلی مکعبی همبند وجود دارد که تمام مقادیر ویژۀ ماتریس فاصلۀ¬ آن صحیح هستند اگر و تنها اگر G یکریخت با یکی از گروه‌های Z_4، Z_6، Z_4×Z_2، Z_6×Z_2 یا Z_2×Z_2×Z_2 باشد. علاوه بر این نشان می‌دهیم که، تحت یکریختی، تنها ۵ گراف کیلی مکعبی همبند وجود دارد که تمام مقادیر ویژۀ ماتریس فاصلۀ آنها صحیح هستند.

استناد: آرزومند، مجید؛ (۱۴۰۱). پ مقادیر ویژۀ ماتریس فاصلۀ گراف‌های کیلی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۸-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱.مقدمه

در این مقاله تمامی گراف‌ها غیرجهت دار، متناهی، بدون طوقه و یال چندگانه، و تمامی گروه‌ها متناهی هستند.از نمادهای C_n، K_n و $K_{n,m}$ به ترتیب برای نشان دادن یک دور n رأسی، گراف کامل n رأسی و گراف دو بخشی کامل با بخش‌های n و m رأسی استفاده می کنیم. همچنین از نمادهای $\mathbb{Z}_n$ و S_n، به ترتیب برای نشان دادن یک گروه دوری از مرتبه n و گروه جایگشت‌های روی n نماد استفاده می‌کنیم.

فرض کنید X یک گراف سادهٔ همبند با مجموعهٔ رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ است. فاصلهٔ بین دو راس v_i و v_j، که آن را با نماد $d(v_i,v_j)$ نشان می‌دهیم، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها است. ماتریس فاصلهٔ گراف X، که آن را با نماد D نشان می دهیم، یک ماتریس $n \times n$ است که درایهٔ روی سطر iام و ستون jام آن $d(v_i,v_j)$است. چند جمله‌ای مشخصهٔ فاصلهٔ گراف X را$\det(\lambda I - D)$ تعریف می‌کنیم، که در آن I ماتریس همانی است. ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصهٔ فاصلهٔ X را مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ X می‌نامیم و برای اختصار آن‌ها را D-مقدار ویژه نام گذاری می‌کنیم. اگر λ یک D-مقدار ویژهٔ X با تکرر m باشد، آن را با $\lambda^{[m]}$ نشان می‌دهیم. همچنین بزرگترین D-مقدار ویژه را شعاع طیفی فاصلهٔ X می‌نامیم و آن را با $\rho(X)$ نشان می‌دهیم.

مطالعهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ گراف ها در سال ۱۹۷۱ و در مقاله ای از گراهام[۱] و پولاک[۲] [۱] مطرح شد و پس از آن بسیار مورد توجه قرار گرفت [۲]. کاربردهای بسیار زیادی از ماتریس فاصله در طراحی شبکه‌های ارتباطی، الگوریتم‌های جریان شبکه، نظریهٔ جانشانی گراف و هم چنین کاربردهایی در شیمی وجود دارد[۲].

فرض کنید G یک گروه و $S = S^{-1}$ یک زیرمجموعهٔ G است که شامل عضو همانی نیست. گراف کیلی G متناظر با زیرمجموعهٔ S، که آن را با $Cay(G,S)$ نشان می‌دهیم، یک گراف با مجموعهٔ رئوس G و یال‌های $\{\{g,sg\} | g \in G, s \in S\}$ است. گراف $Cay(G,S)$ یک گراف غیر جهت‌دار بدون طوقه و $|S|$-منتظم است. گراف کیلی روی یک گروه دوری را چرخشی[۳] گوییم. دورها مثالی از گراف‌های چرخشی همبند ۲-منتظم هستند.

در مقایسه با مقادیر ویژهٔ ماتریس مجاورت گراف‌های کیلی، مطالعات اندکی روی مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ گراف های کیلی انجام شده است. در سال ۲۰۰۱ مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ دورها محاسبه شدند [۳]. در سال ۲۰۱۰ مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ گراف‌های چرخشی که تمام مقادیر ویژهٔ ماتریس مجاورت آنها صحیح هستند، مطالعه شد [۴]. در سال ۲۰۱۱، رنتلن[۴] مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ گراف‌های کیلی روی کاکستر[۵] گروه‌ها را با استفاده از نمایش‌های

[۱] Graham
[۲] Pollack
[۳] circulant
[۴] Rentlen
[۵] circulant

تحویل‌ناپذیر گروه زمینه مطالعه کرد [۵]. او ثابت کرد که مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصله گراف کیلی گروه بازتابی حقیقی متناظر با مجموعهٔ تمام بازتاب ها همگی صحیح هستند و در برخی حالت ها فرمولی برای محاسبهٔ این مقادیر ویژه ارائه داد. سپس فوستر-گرینوود[۱] و کریلوف[۲] در [۶] روی مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصله گراف‌های کیلی گروه‌های بازتابی مختلط مطالعه کردند.

در این مقاله، مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ یک گراف کیلی روی گروه دلخواه G را برحسب نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه G بیان می‌کنیم و سپس مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ چند گراف کیلی مشهور مثل n-منشورها، شبکه چنبره‌ای شش گوشه‌ای و گراف‌های کیلی مکعبی روی گروه‌های آبلی را به دست می‌آوریم. همچنین گروه‌هایی که یک گراف کیلی همبند مکعبی با مقادیر فاصلهٔ صحیح دارند را طبقه‌بندی می‌کنیم.

برای مفاهیم و مقدماتی از نظریه نمایش گروه‌ها و نظریهٔ گراف که این‌جا نیامده‌اند، خواننده را به ترتیب به [۷] و [۸] ارجاع می‌دهیم.

۲. نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌ها

در این بخش، نمادها، تعاریف و نتایجی از نمایش گروه‌ها را بیان می‌کنیم که در ادامه برای اثبات قضایا مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathbb{C}[G]$ فضای برداری با بعد $|G|$ روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ $\{e_g \mid g \in G\}$ است. در این صورت می توان $\mathbb{C}[G]$ را با فضای برداری تمام توابع مختلط مقدار روی G یکی گرفت. بنابراین تابع $\varphi: G \to \mathbb{C}$ متناظر با بردار $\varphi = \sum_{g\epsilon G} \varphi(g) e_g$ است و بالعکس. به ازای $g \in G$، بردار e_g متناظر با تابع $e_g: G \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $e_g(g) = 1$ و $e_g(h) = 0$، به ازای هر $h \neq g$، است.

فرض کنیم G یک گروه متناهی و V یک فضای متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ و $GL(V)$گروه تمام تبدیلات خطی وارون‌پذیر روی V است. یک هم‌ریختی گروهی $\rho: G \to GL(V)$ را یک نمایش خطی از گروه G روی V می‌نامیم. درجهٔ نمایش ρ برابر با بعد V است. سرشت χ_ρ متناظر با ρ، یک تابع مختلط مقدار روی G است که در آن $\chi_\rho(g)$ برابر با اثر تبدیل خطی $\rho(g)$ است. نمایش چپ منظم G روی $\mathbb{C}$-فضای برداری $\mathbb{C}[G]$ که آن را با ρ_{reg} نشان می‌دهیم، به صورت $\rho_{reg}: G \to GL(\mathbb{C}[G])$با ضابطهٔ $\rho_{reg}(g) e_h = e_{gh}$ به ازای هر $g, h \in G$ تعریف می‌شود.

دو نمایش $\rho_1: G \to GL(V_1)$ و $\rho_2: G \to GL(V_2)$ را هم‌ارز گوییم هرگاه یک نگاشت خطی دو سویی مثل نگاشت $\varphi: V_1 \to V_2$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $\rho_1(g)\varphi = \varphi\rho_2(g)$ که در آن منظور از ضرب نگاشت‌ها همان ترکیب آنها است که از سمت چپ، اثر داده می‌شوند.

[۱] Foster-Greenwood

[۲] Kriloff

فرض کنیم $\rho: G \to GL(V)$ یک نمایش خطی از گروه G روی V و W زیرفضایی از V باشد. در این صورت W را ρ-پایا گوییم هرگاه به ازای هر $g \in G$ و $w \in W$ داشته باشیم $\rho(g)w \in W$. نمایش ρ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه هیچ زیرفضای ρ-پایای دیگری بجز $\{0\}$ و V نداشته باشد. مجموعهٔ شامل تمام نمایش‌های تحویل ناپذیر G و مجموعه‌ی شامل تمام سرشت‌های متناظر آن‌ها را به ترتیب با $irr(G)$ و $Irr(G)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $G =< a >\cong \mathbb{Z}_n$ یک گروه دوری از مرتبهٔ n باشد و $1 \neq w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin(\frac{2\pi}{n})$ ریشهٔ اولیه nام واحد است. در این صورت $Irr(G) = irr(G) = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$ که در آن

$$\rho_l: G \to C; \quad a^k \mapsto w^{kl}.$$

فرض کنید $G =< a_1 >\times< a_2 >\times \cdots \times< a_k >$ یک گروه آبلی متناهی است که درآن a_j از مرتبه n_j است. فرض کنید $w_j = \cos\left(\frac{2\pi}{n_j}\right) + isin(\frac{2\pi}{n_j})$ ریشهٔ اولیهٔ n_j واحد باشد. در این صورت

$$Irr(G) = irr(G) = \{\rho_{l_1,\dots,l_k} | 0 \leq l_j \leq n_j - 1, j = 1, \dots, k\}$$

که در آن $\rho_{l_1,\dots,l_k}(a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k}) = w_1^{j_1 l_1} \dots . w_k^{j_k l_k}$.

۳. نتایج اصلی

فرض کنید Γ یک گراف کیلی غیرجهت‌دار و بدون طوقه روی گروه G متناظر با زیرمجموعهٔ S از Gاست و $D = [d(x,y)]_{x,y\in G}$ماتریس فاصلهٔ Γباشد. در این صورت، با در نظر گرفتن D به عنوان یک نگاشت خطی روی $\mathbb{C}[G]$، داریم $De_g = \sum_{h\in G} d(h,g)e_h$. در لم زیر D را بر حسب نمایش منظم چپ ρ_{reg} بیان می کنیم.

لم ۳. ۱. $De_g = \sum_{x\epsilon G} d(1,x)\rho_{reg}(x^{-1})e_g$.

برهان: داریم

$$\begin{aligned} De_g &= \sum_{h\in G} d(h,g)e_h \\ &= \sum_{h\in G} d(1,gh^{-1})e_h \\ &= \sum_{x\in G} d(1,x)e_{x^{-1}g} \\ &= \sum_{x\in G} d(1,x)\rho_{\text{reg}}(x^{-1})e_g, \end{aligned}$$

که اثبات را کامل می کند.□

فرض کنید ρ_k یک نمایش تحویل‌ناپذیر G از درجهٔ d_k، و $\varrho^{(k)}$ نمایش ماتریسی ρ_k است. فرض کنید $\varrho_{ij}^{(k)}(g)$ درایهٔ ijام ماتریس $\varrho^{(k)}(g)$است. قرار می‌دهیم $\bar{\varrho}_{ij}^{(k)} = \sum_{g\in G} \overline{\varrho_{ij}^{(k)}(g)}e_g$. با حفظ نمادهای فوق در سراسر مقاله، نتایج زیر حاصل می شوند:

نتیجهٔ ۳. ۲. $\rho_{reg}(x)\bar{\varrho}_{ij}^{(l)} = \sum_{r=1}^{d_l} \varrho_{ri}^{(l)}(x)\bar{\varrho}_{rj}^{(l)}$.

برهان: به [۳، لم ۱] مراجعه کنید.□

نتیجهٔ ۳،۳. $D\overline{\varrho}_{ij}^{(l)} = \sum_{x\in G}\sum_{r=1}^{d_l} d(1,x)\varrho_{ri}^{(l)}(x^{-1})\overline{\varrho}_{rj}^{(l)}$.

برهان: داریم

$$D\overline{\varrho}_{ij}^{(l)} = D(\sum_{g\in G}\overline{\varrho_{ij}^{(l)}(g)}e_g)$$
$$=\sum_{g\in G}\overline{\varrho_{ij}^{(l)}(g)}De_g$$
$$=\sum_{g\in G}\overline{\varrho_{ij}^{(l)}(g)}\sum_{x\in G} d(1,x)\rho_{reg}(x^{-1})e_g$$
$$=\sum_{x\in G} d(1,x)\rho_{reg}(x^{-1})\sum_{g\in G}\overline{\varrho_{ij}^{(l)}(g)}e_g$$
$$=\sum_{x\in G} d(1,x)\rho_{reg}(x^{-1})\overline{\varrho}_{ij}^{(l)}$$
$$=\sum_{x\in G} d(1,x)\sum_{r=1}^{d_l}\varrho_{ri}^{(l)}(x^{-1})\overline{\varrho}_{rj}^{(l)} \quad (\text{نتیجهطبق } 3.2)$$
$$=\sum_{x\in G}\sum_{r=1}^{d_l} d(1,x)\varrho_{ri}^{(l)}(x^{-1})\overline{\varrho}_{rj}^{(l)},$$

که اثبات را تمام می کند.□

فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ گروه G و f یک نمایش یا سرشت از G است. در این مقاله، $f(X)$ را با $\sum_{x\in X} f(x)$ نشان می دهیم.

قضیهٔ زیر نتیجه اصلی این مقاله می‌باشد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$یک گراف کیلی روی گروه G نسبت به زیرمجموعهٔ S ، D ماتریس فاصلهٔ آن و $irr(G) = \{\varrho^{(1)},\dots,\varrho^{(m)}\}$ مجموعهٔ تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر G است. در این صورت پایهٔ β برای ماتریس فاصله D چنان موجود است که

$$[D]_{\mathcal{B}} = diag(I_{d_1}\otimes D_1, I_{d_2}\otimes D_2,\dots,I_{d_m}\otimes D_m)$$

که در آن $D_l = \sum_{x\in G} d(1,x)\varrho^{(l)}(x^{-1})$.

برهان : طبق لم ۳،۳ مجموعهٔ بردارهای $B_j^{(l)} = \{\overline{\varrho}_{ij}^{(l)} | 1\le i\le d_l\}$ یک زیرفضای D-پایا از $\mathbb{C}[G]$ تولید می‌کند. فرض کنیم $W_j^{(l)}$زیرفضای تولید شده توسط $B_j^{(l)}$ باشد. طبق [۳، لم ۱ قسمت(iii)] این زیرفضا از بعد d_l است. علاوه بر این، با استفاده از لم ۳،۳ می‌توان نشان داد که ماتریس تحدید D به $W_j^{(l)}$ نسبت به پایهٔ $B_j^{(l)}$ برابر است با $D_l = \sum_{x\in G} d(1,x)\varrho^{(l)}(x^{-1})$. از طرفی طبق [۳، لم ۱ قسمت(iii)]، داریم $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{l=1}^m\bigoplus_{j=1}^{d_l} W_j^{(l)}$. پس طبق قضیهٔ تجزیهٔ اولیه داریم

$$[D]_{\mathcal{B}} = diag(I_{d_1}\otimes D_1, I_{d_2}\otimes D_2,\dots,I_{d_m}\otimes D_m)$$

که اثبات را کامل می کند.□

در قضیهٔ زیر ساختار بردارهای ویژه‌ی ماتریس فاصلهٔ گراف های کیلی را بدست می‌آوریم.

قضیهٔ۲. فرض کنیم $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kd_k})$ یک بردار ویژهٔ D_k متناظر با مقدار ویژهٔ λ باشد. در این صورت بردارهای

$$v_k^j = \sum_{g\in G} [v_k . \bar{\varrho}_j^{(k)}(g)] e_g,\ 1 \le j \le d_k$$

بردارهای ویژهٔ مستقل خطی متمایز D متناظر با λ هستند که در آن. ضرب داخلی متعارف بردارها و $\bar{\varrho}_j^{(k)}(g)$ برداری است که مؤلفه‌های آن مزدوج مختلط مؤلفه‌های ستون jام ماتریس $\varrho^{(k)}(g)$ است.

برهان: طبق لم ۳,۳ داریم $D\bar{\varrho}_{ij}^{(l)} = \sum_{x\in G} \sum_{r=1}^{d_l} d(1,x)\varrho_{ri}^{(l)}(x^{-1})\bar{\varrho}_{rj}^{(l)}$. از طرفی

$$\begin{aligned} v_k^j &= \sum_{g\in G} [v_k . \bar{\varrho}_j^{(k)}(g)] e_g \\ &= \sum_{g\in G} \Big(\sum_{t=1}^{d_k} v_{kt} \overline{\varrho_{tj}^{(k)}}\Big) e_g \\ &= \sum_{t=1}^{d_k} v_{kt} \left(\sum_{g\in G} \overline{\varrho_{tj}^{(k)}(g)} e_g \right) \\ &= \sum_{t=1}^{d_k} v_{kt} \bar{\varrho}_{tj}^{(k)}. \end{aligned}$$

حال داریم

$$\begin{aligned} &Dv_k^j = \sum_{t=1}^{d_k} v_{kt} D\bar{\varrho}_{tj}^{(k)} \\ &= \sum_{t=1}^{d_k} v_{kt} \Big(\sum_{x\in G} \sum_{r=1}^{d_k} d(1,x) \varrho_{rt}^{(k)}(x^{-1}) \bar{\varrho}_{rj}^{(k)}\Big) \\ &= \sum_{r=1}^{d_k} \Big(\sum_{t=1}^{d_k} v_{kt} \sum_{x\in G} d(1,x) \varrho_{rt}^{(k)}(x^{-1})\Big) \bar{\varrho}_{rj}^{(k)} \\ &= \sum_{r=1}^{d_k} (\lambda v_{kr}) \bar{\varrho}_{rj}^{(k)} \\ &= \lambda \sum_{r=1}^{d_k} v_{kr} \bar{\varrho}_{rj}^{(k)} \\ &= \lambda v_k^j \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد v_k^j یک بردار ویژهٔ D متناظر با مقدار ویژهٔ λ است. از آن‌جا که $\left\{\bar{\varrho}_{ij}^{(k)} | 1 \le k \le m, 1 \le i,j \le d_k\right\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{C}[G]$ است، v_k^j ها متمایز و مستقل خطی هستند.□

فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$. قرار می‌دهیم $S^0 = \{1\}$ و $S^k = \{s_1 s_2 \dots s_k | s_1, \dots, s_k \in S\}$ که در آن $k \ge 1$ ، و $S^{[k]} = S^k \backslash (\cup_{l=0}^{k-1} S^l)$. به راحتی می توان نشان داد که $d(1,x) = k$ اگر و تنها اگر $x \in S^{[k]}$ بنابراین با نمادهای قضیهٔ ۱، اگر d قطر گراف Γ باشد، آن گاه $D_l = \sum_{k=1}^{d} k\varrho^{(l)}((S^{[k]})^{-1})$. اثبات شده است که

شعاع طیفی ماتریس فاصلهٔ یک گراف کیلی روی گروه G برابر است با $\sum_{x\in G} d(1,x)$. در نتیجهٔ زیر، این مطلب را به عنوان یک کاربرد از قضیهٔ ۱، دوباره اثبات می‌کنیم.

نتیجهٔ ۴,۳. فرض کنید Γ یک گراف کیلی روی گروه متناهی Gاست. در این صورت $\sum_{x\in G} d(1,x)$ یک مقدار ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ Γ است. علاوه بر این به ازای هر مقدار ویژهٔ دیگر ماتریس فاصلهٔ گراف Γ مثل λ، داریم $|\lambda| \le \sum_{x\in G} d(1,x)$.

برهان : فرض کنیم $\varrho^{(0)}$ نمایش بدیهی گروه G باشد. در این صورت، به ازای هر $x \in G$ داریم $\varrho^{(0)}(x) = 1$ و طبق قضیهٔ ۱، $\sum_{x\in G} d(1,x)\varrho^{(0)}(x^{-1}) = \sum_{x\in G} d(1,x)$ یک مقدار ویژهٔ فاصلهٔ گراف Γ است.

فرض کنید λ یک مقدار ویژهٔ فاصلهٔ گراف Γ است. طبق قضیهٔ ۱، نمایش تحویل‌ناپذیر ϱ از G چنان وجود دارد که λ یک مقدار ویژهٔ $\sum_{x\in G} d(1,x)\varrho(x^{-1})$ اســت. فرض کنیم $G=\{g_1,\dots,g_m\}$، g_i از مرتبهٔ n_i و ϱ از درجهٔ k با شد. در این صورت طبق [۱۱، ق ضیهٔ ۱۵,۲] $\varrho(g^{-1})$ م شابه یک ماتریس قطری $k \times k$ا ست که درایه های آن ریشــه‌های nام واحد هســتند. در نتیجه $\lambda = d(1,g_1)\mu_{g_1} + \dots + d(1,g_m)\mu_{g_m}$، که در آن μ_{g_i} یک ریشــهٔ n_iام واحد است. بنابراین

$$|\lambda| = |d(1,g_1)\mu_{g_1} + \dots + d(1,g_m)\mu_{g_m}| \le d(1,g_1) + \dots + d(1,g_m) = \sum_{x\in G} d(1,x).$$

که اثبات را کامل می‌کند.□

یادآوری می‌کنیم که گراف کیلی $\Gamma = Cay(G,S)$ را یک گراف کیلی شبه-آبلی گوییم هرگاه S اجتماعی از کلاس‌های مزدوجی G باشد. در نتیجهٔ زیر طیف فاصلهٔ گراف‌های کیلی شبه-آبلی را بدست می‌آوریم.

نتیجهٔ ۳,۵. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$ یک گراف کیلی شبه-آبلی و $C_1,\dots,C_m$تمام کلاس‌های مزدوجی G هستند وx_i *نمایندهٔ کلاس* C_i است. در این صورت پایهٔ $\mathcal{B}$ چنان موجود است که

$$[D]_{\mathcal{B}} = diag(Q_1,Q_2,\dots,Q_m)$$

که در آن

$$Q_l = \frac{1}{\chi_l(1)}\Big(\sum_{i=1}^{m} |C_i| d(1,x_i)\chi_l(x_i^{-1})\Big)I_{\chi_l(1)^2}.$$

به ویژه، اگر $G=\{x_1,\dots,x_m\}$ یک گروه آبلی باشد، آن‌گاه مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ عبارتند از

$$\sum_{i=1}^{m} d(1,x_i)\chi_l(x_i^{-1}),\ l = 1,\dots,m.$$

برهان: طبق قضیهٔ ۱، پایهٔ $\mathcal{B}$ وجود دارد که $[D]_{\mathcal{B}} = \mathrm{d}iag(I_{d_1}\otimes D_1, I_{d_2}\otimes D_2,\dots,I_{d_m}\otimes D_m)$ که در آن $D_l = \sum_{x\in G} d(1,x)\varrho^{(l)}(x^{-1})$. فرض کنید $g \in G$ یک عضو دلخواه گروه G باشد. از آن‌جا که Γ یک گراف شبه-

آبلی است، داریم $g^{-1}Sg=S$. علاوه بر این به ازای هر $x\in G$ داریم $d(1,x)=d(1,g^{-1}xg)$. بنابراین اگر x و y دو عضو یک کلاس مزدوجی باشند آن‌گاه $d(1,x)=d(1,y)$. از طرفی به ازای هر $g\in G$ داریم

$$\begin{aligned}
&\varrho^{(l)}(g^{-1})D_l\varrho^{(l)}(g)=\textstyle\sum_{x\in G}\ d(1,x)\varrho^{(l)}(g^{-1})\varrho^{(l)}(x^{-1})\varrho^{(l)}(g)\\
&=\textstyle\sum_{x\in G}\ d(1,x)\varrho^{(l)}(g^{-1}x^{-1}g)\\
&=\textstyle\sum_{x\in G}\ d(1,g^{-1}xg)\varrho^{(l)}((g^{-1}xg)^{-1}\\
&=D_l.
\end{aligned}$$

پس طبق لم شور، داریم $D_l=\frac{\sum_{x\in G}d(1,x)\chi_l(x^{-1})}{d_l}I_{d_l}$ که در آن χ_l سرشت متناظر با $\varrho^{(l)}$، $d_l=\chi_l(1)$ درجهٔ $\varrho^{(l)}$ و I_{d_l} ماتریس همانی $d_l\times d_l$ است. بنابراین

$$Q_l:=I_{d_l}\otimes D_l=\frac{\sum_{x\in G}\ d(1,x)\chi_l(x^{-1})}{d_l}I_{d_l^2}$$

علاوه بر این

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in G}d(1,x)\chi_l(x^{-1})&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in C_i}d(1,x)\chi_l(x^{-1})\\
&=\sum_{i=1}^{m}|C_i|d(1,x_i)\chi_l\left(x_i^{-1}\right).
\end{aligned}$$

تساوی آخر از این حقیقت ناشی می شود که

$$\forall y\in C_i, d(1,y)=d(1,x_i), \chi_l(y^{-1})=\chi_l(x_i^{-1})$$

که اثبات را کامل می کند.□

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت گوییم G *جدول سرشت گویا* دارد هرگاه به ازای هر $g\in G$ و $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$، $\chi(g)$ یک عدد گویا باشد.طبق [۱۱، صفحه ی ۳۵] گروه متقارن S_n روی n نماد جدول سرشت گویا دارد. همچنین طبق [۱۱، قضیهٔ ۲۱,۴] حاصل ضرب مستقیم دو گروه با جدول سرشت گویا یک گروه با جدول سرشت گویا است. در نتیجهٔ زیر، روشی برای ساخت گراف‌های کیلی با طیف فاصلهٔ صحیح ارائه می‌دهیم.

نتیجهٔ ۶,۳. فرض کنید G یک گروه متناهی با جدول سرشت گویا و Γ یک گراف کیلی شبه-آبلی روی گروه G است. در این صورت مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ گراف Γ همگی صحیح هستند.

برهان: از آن‌جا که Γ یک گراف کیلی شبه-آبلی است، طبق نتیجهٔ ۵,۳، مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ عبارتند از $\frac{1}{\chi(1)}(\sum_{i=1}^{m}|C_i|d(1,x_i)\chi(x_i^{-1}))$ با تکرر $\chi(1)^2$ که در آن χها سرشت‌های تحویل ناپذیر G و C_iها کلاس‌های مزدوجی G هستند. از طرفی چون G جدول سرشت گویا دارد، تمام مقادیر ویژهٔ Γ اعداد گویا هستند. بنابراین طبق [۱۱، لم ۲,۳] تمام مقادیر ویژهٔ Γ صحیح هستند.□

زنجیرهٔ اعداد صحیح $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$ را یک *افراز* از عدد صحیح n گوییم هرگاه $n_1 + \cdots + n_k = n$. با استفاده از این تعریف، در نتیجهٔ زیر خانواده ای نامتناهی از گراف‌های کیلی با طیف صحیح فاصله‌ای معرفی می‌کنیم.

نتیجهٔ ۷،۳. به ازای هر عدد صحیح $n \geq 2$، یک گراف کیلی با طیف فاصله‌ای صحیح $n!$ راسی و $\sum_{i=1}^{k} \frac{n!}{1^{m_{i,1}} m_{i,1}! 2^{m_{i,2}} m_{i,2}! \ldots n^{m_{i,n}} m_{i,n}!}$-منتظم وجود دارد که به ازای هر $1 \leq i \leq k$، $m_{i,1} \neq n$ و داریم $1m_{i,1} + 2m_{i,2} + 3m_{i,3} + \cdots + nm_{i,n} = n$، $(m_{i,1}, m_{i,2}, \ldots, m_{i,n-1}, m_{i,n})$ یک n-تایی از اعداد صحیح نامنفی و k کوچکتر از تمام افرازهای n است.

برهان: فرض کنید $G = S_n$، $S \subseteq G \backslash \{1\}$ اجتماعی از کلاس‌های مزدوجی G و $\Gamma = Cay(G, S)$ یک گراف کیلی روی G نسبت به Sاست. طبق [۷، تساوی ۴،۳۰]، اندازهٔ یک کلاس مزدوجی در S_n که شامل i_1تا ۱-دور، i_2 تا ۲-دور، ...، i_n تا n-دور است، برابر است با $\frac{n!}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \ldots n^{i_n} i_n!}$ و تعداد کلاس‌های مزدوجی S_n (شامل کلاس مزدوجی همانی $\{1\}$) برابر است با تعداد افرازهای n. از طرفی، دو جایگشت در S_n مزدوج هستند اگر و تنها اگر تجزیهٔ دوری یکسانی داشته باشند. این اثبات را کامل می‌کند.□

مثال ۸،۳. فرض کنید$\Gamma = Cay(S_4, S)$، که در آن $S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$. به راحتی می‌توان دید که S_4 دقیقا ۵ کلاس مزدوجی دارد و نماینده‌های آنها عبارتند از ()، (12)، (12)(34)، (1234) و (123) که به ترتیب دارای ۱، ۶، ۳، ۶ و ۸ عضو هستند. با در نظر گرفتن جدول سرشت S_4، جدول شمارهٔ ۱، و نتیجهٔ ۵،۳، مقادیر ویژهٔ ماتریس فاصلهٔ Γ عبارتند از ۴۶، ۲-، ۲-، ۶- و ۲ به ترتیب با تکرر ۱، ۱، ۴، ۹ و ۹.

جدول ۱. جدول سرشت S_4

g	1	(12)	(12)(34)	(1234)	(123)
$\|Cl(g)\|$	1	6	3	6	8
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	2	0	-1
χ_4	3	1	-1	-1	0
χ_5	3	-1	-1	1	0

لم زیر یک تمرین ساده است ولی برای تکمیل مطالب، اثبات آن را می آوریم.

لم ۹،۳. فرض کنید$n \geq 2$ یک عدد صحیح است.

(۱) اگر $\cos(x) \neq 1$ آن گاه $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) = \frac{n\cos((n+1)x)-(n+1)\cos(nx)+1}{2(\cos(x)-1)}$.

(۲) $\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{-1}{4}(1+(2n+1)(-1)^{n+1})$.

(۳) **اگر** $\cos(x) \neq 1$ آن گاه $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = -\frac{1}{2}(1+\frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)}{\cos(x)-1})$.

(۴) **اگر** $\cos(x) \neq 1$، آن‌گاه

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)\cos(kx) = \frac{3-\cos(x)+(2n+1)\cos((n+1)x)-(2n+3)\cos(nx)}{2(\cos(x)-1)}.$$

برهان: فرض کنید $z \neq 1$ یک عدد مختلط است. در این صورت

$$\begin{aligned}
&z+2z^2+\cdots+nz^n = z(1+2z+\cdots+nz^{n-1})\\
&= z\frac{d}{dz}(z+z^2+\cdots+z^n)\\
&= z\frac{d}{dz}(\frac{z^{n+1}-z}{z-1})\\
&= \frac{z(nz^{n+1}-(n+1)z^n+1)}{(z-1)^2}\\
&= \frac{1}{|z-1|^4}(nz^{n+1}-(n+1)z^n+1)(\overline{z}|z|^2-2|z|^2+z).
\end{aligned}$$

حال قرار می دهیم $z=e^{ix}$. در این صورت داریم

$$e^{ix}+2e^{2ix}+\cdots+ne^{inx} = \frac{1}{2(\cos(x)-1)}(ne^{i(n+1)x}-(n+1)e^{inx}+1)$$

که نتیجه می دهد $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) = \frac{n\cos((n+1)x)-(n+1)\cos(nx)+1}{2(\cos(x)-1)}$. حال اگر قرار دهیم $z=-1$، آن‌گاه داریم $\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{-1}{4}(1+(2n+1)(-1)^{n+1})$. این (۱) و (۲) را ثابت می کند.

به طور مشابه داریم $z+z^2+\cdots+z^n = \frac{z^n|z|^2-z^{n+1}-|z|^2+z}{|z-1|^2}$. حال با قرار دادن $z=e^{ix}$، داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)+\cos(x)-1}{2(1-\cos(x))}\\
&= -\frac{1}{2}(1+\frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)}{\cos(x)-1})
\end{aligned}$$

که (۳) را ثابت می کند. تساوی (۴) نتیجهٔ مستقیم (۱) و (۳) است.□

به عنوان مثالی از نتیجهٔ ۵،۳، طیف فاصلهٔ دورها را که در [۶] آمده است، را به یک روش دیگر محاسبه می‌کنیم.

لم ۱۰،۳. فرض کنید C_n یک دور با n راس است. در این صورت

الف) اگر $n=2m$ عددی زوج باشد، آن گاه مقادیر ویژهٔ فاصله‌ای C_n عبارتند از m^2، ۰ و

$$\lambda_l = -\csc^2(\frac{\pi l}{n}),\ \ l=1,3,5,\ldots,2m-1,$$

به ترتیب با تکرر ۱، $m-1$ و ۱.

ب) اگر $n = 2m + 1$ فرد باشد، آن گاه مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ C_n عبارتند از $m^2 + m$،

$$\frac{-1}{4}\sec^2(\frac{\pi l}{2n}),\ \ l = 2,4,\dots,2m$$

و

$$\frac{-1}{4}\csc^2(\frac{\pi l}{2n}),\ \ l = 1,3,\dots,2m-1.$$

برهان. می‌دانیم $C_n = \mathrm{C}ay(G,S)$، که در آن $G = \langle a\rangle$ یک گروه دوری از مرتبه n و $S = \{a, a^{-1}\}$ است. همچنین اگر $n = 2m$ یا $n = 2m + 1$، قطر C_n برابر است با m. فرض کنیم $n = 2m$. در این صورت داریم$S^{[k]} =$ $\{a^k, a^{-k}\}$ که در آن $1 \le k \le m-1$ و $S^{[m]} = \{a^m\}$. بنابراین، طبق نتیجهٔ ۵،۳، مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ C_n عبارتند از

$$\lambda_l = m(-1)^l + 2\sum_{k=1}^{m-1} k\cos(\frac{\pi lk}{m}),\ \ l = 0,\dots,n-1.$$

حال فرض کنید $n = 2m + 1$. در این صورت به ازای هر $1 \le k \le m$، داریم $S^{[k]} = \{a^k, a^{-k}\}$. بنابراین طبق نتیجهٔ ۵،۳، مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ C_n عبارتند از

$$\lambda_l = 2\sum_{k=1}^{m} k\cos(\frac{2\pi kl}{n}),\ \ l = 0,\dots,n-1.$$

حال با استفاده از لم ۹،۳ و یک محاسبهٔ ساده (الف) و (ب) ثابت می شوند.□

لم ۱۱،۳ فرض کنید Γ یک n-منشور[۱]، $n \ge 5$ است. در این صورت

الف) اگر $n = 2m$ آن گاه مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ گراف Γ عبارتند از $2m^2 + 2m$، $-2m$، 0، به ترتیب با تکرر 1، 1، $3m - 2$ و $-2\csc^2(\frac{\pi l}{2m})$ که در آن $l = 1,3,\dots,2m-1$.

ب) اگر $n = 2m + 1$ آن گاه مقادیر ویژهٔ Γ عبارتند از $2m^2 + 4m + 1$، $-(2m+1)$، 0 به ترتیب با تکرر 1، 1، $2m$ و $-\frac{1}{2}\sec^2(\frac{\pi l}{2n})$ که در آن $l = 2,4,\dots,2m$ و $-\frac{1}{2}\csc^2(\frac{\pi l}{2n})$ که در آن $l = 1,3,\dots,2m-1$.

برهان. فرض کنید Γ یک گراف n-وجهی است. در این صورت $\Gamma = \mathrm{C}ay(G,S)$ که در آن

$$G = \langle a, b | a^n = b^2 = 1, ab = ba\rangle,$$

و $S = \{a, a^{-1}, b\}$. علاوه بر این، اگر $n = 2m$ یا $n = 2m + 1$ در این صورت قطر Γ برابر است با $m + 1$. اگر $n = 2m$ آن گاه $S^{[1]} = \{a, a^{-1}, b\}$، $S^{[k]} = \{a^k, a^{-k}, ba^{k-1}, ba^{-k+1}\}$ که در آن $2 \le k \le m-1$،

[۱] n-prism

$S^{[m]}=\{a^m,ba^{m-1},ba^{-m+1}\}$ و $S^{[m+1]}=\{ba^m\}$. حال با در نظر گرفتن نمایش‌های تحویل ناپذیر G و با استفاده از قضیهٔ ۱، می‌توان نتیجه را به دست آورد. □

لم۱۲,۳. فرض کنید $T_{m,n}$، $m,n\geq 3$، شبکه چنبره‌ای شش ضلعی[۱] است. در این صورت مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ $T_{m,n}$ عبارتند از

$$\lambda_{r,s}=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}[p,q]\exp(2\pi i(\frac{pr}{m}+\frac{qs}{n})),\ \ 0\leq r\leq m-1, 0\leq s\leq n-1,$$

که در آن

$$[p,q]=\min\{\max\{p,q\},\max\{m-p,n-q\},m-p+q,p+n-q\}.$$

برهان. داریم $T_{m,n}=\mathrm{C}ay(G,S)$ [۸، مثال ۷,۳]، که در آن

$$G=\langle a,b|a^m=b^n=1,ab=ba\rangle\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n,$$

$$S=\{(a,1),(a^{-1},1),(1,b),(1,b^{-1}),(a,b),(a^{-1},b^{-1})\}.$$

فرض کنید $x=a^ib^j$، که در آن $i,j\geq 0$. در این صورت

$$d(1,x)=\min\{\max\{i,j\},\max\{m-i,n-j\},m-i+j,i+n-j\}.$$

فرض کنیم $[i,j]$ برابر با $d(1,a^ib^j)$ باشد. فرض کنید χ یک نمایش تحویل‌ناپذیر G باشد. در این صورت $0\leq r\leq m-1$ و $0\leq s\leq n-1$ وجود دارد که $\chi=\chi_{r,s}$ و $\chi_{r,s}(a^pb^q)=\exp(2\pi i(\frac{pr}{m}+\frac{qs}{n}))$. بنابراین، طبق نتیجهٔ ۵,۳، مقادیر ویژهٔ فاصله $T_{m,n}$ عبارتند از

$$\lambda_{r,s}=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}[p,q]\exp(2\pi i(\frac{pr}{m}+\frac{qs}{n})),\ \ 0\leq r\leq m-1, 0\leq s\leq n-1. \square$$

لم۳,۱۳. فرض کنید $K_{m(n)}$ گراف چندبخشی کامل با m بخش n راسی است. در این صورت مقادیر ویژهٔ $K_{m(n)}$ عبارتند از $mn+n-2$، $n-2$ و -2، به ترتیب با تکرر 1، $m-1$ و $mn-m$.

برهان. می‌دانیم $K_{m(n)}=\mathrm{C}ay(G,S)$، که در آن $G=\langle a\rangle$ و $S=G\backslash\{1,a^m,a^{2m},\dots,a^{m(n-1)}\}$. واضح است که قطر $K_{m(n)}$ برابر است با ۲. علاوه‌براین، $S^{[1]}=S$ و $S^{[2]}=\{a^m,a^{2m},\dots,a^{m(n-1)}\}$. حال طبق قضیهٔ ۱، $mn+n-2$ یک مقدار ویژهٔ فاصلط $K_{m(n)}$ (حاصل از سرشت بدیهی) است. فرض کنید χ یک سرشت نابدیهی از G باشد. در این صورت $\chi(G)=0$ و در نتیجه سایر مقادیر ویژهٔ $K_{m(n)}$ عبارتند از

$$\lambda_l=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\exp(\frac{2\pi ilk}{n}), l=1,\dots,mn-1.$$

[۱] hexagonal torus

فرض کنید $z_l = \exp(\frac{2\pi il}{n})$. در این صورت $\lambda_l = -1 + z_l + z_l^2 + \cdots + z_l^{n-1}$. از آنجا که $z_l^n = 1$، داریم $\lambda_l = n - 2$ که در آن l مضربی از n است و در غیر این صورت برابر است با -2. این اثبات را کامل می‌کند.□

قضیهٔ ۳. فرض کنید $\Gamma = Cay(G,S)$ گراف کیلی مکعبی روی گروه آبلی Gاست. در این صورت یکی از موارد زیر اتفاق می افتد:

الف) $S = \{a, a^{-1}, a^k\}$، به ازای یک $a \in G$ از مرتبهٔ $2k > 2$، و

(۱) اگر k زوج باشد، آن گاه مقادیر ویژه‌ی Γ عبارتند از

$$\rho = \frac{k^2 + 2k - 2}{2}, \qquad \lambda_l = (-1)^{\frac{l}{2}+1} + 2\frac{1 - (-1)^{\frac{l}{2}}}{\cos(\frac{\pi l}{k}) - 1}, \qquad \lambda_{l'} = \frac{(-1)^{\frac{l'-1}{2}}\sin(\frac{\pi l'}{k})}{\cos(\frac{\pi l'}{k}) - 1},$$

که در آن $l = 2,4,\dots,2k-2$ و $l' = 1,3,\dots,2k-1$ و همه دارای تکرر $\frac{|G|}{2k}$ هستند.

(۲) اگر k فرد باشد، آن گاه مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ عبارتند از

$$\rho = \frac{k^2+8k-5}{4}, \ \lambda_l = -1 + \frac{1+(-1)^{\frac{l}{2}+1}\cos(\frac{\pi l}{2k})}{\cos(\frac{\pi l}{k})-1}, \ \lambda_{l'} = -1 - \frac{1-(-1)^{\frac{l'-1}{2}}k\sin(\frac{\pi l'}{2k})}{\cos(\frac{\pi l'}{k})-1},$$

که در آن$l = 2,4,\dots,2k-2$ و $l' = 1,3,\dots,2k-1$ و همه دارای تکرر $\frac{|G|}{2k}$ هستند.

ب) $S = \{a, a^{-1}, b\}$ که در آن $a \in G$ از مرتبهٔ $n > 2$ است، $b \in G$ یک عضو مرتبهٔ۲ است که $b \notin \langle a \rangle$ و Γ یکریخت است با $\frac{|G|}{2n}$ کپی از n-منشور و مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ آن همان مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ n-منشور داده شده در مثال ۱۱،۳ با تکرر $\frac{|G|}{2n}$ هستند.

ج) $S = \{a, b, c\}$، که در آن $a, b, c \in G$ سه عضو مرتبهٔ ۲ هستند و مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ برابر هستند با 12، -4 و 0 به ترتیب با تکرر $\frac{|G|}{8}$، $\frac{3|G|}{8}$ و $\frac{|G|}{2}$.

د) $S = \{a, b, ab\}$ که در آن $a, b \in G$ دو عضو مرتبهٔ ۲ هستند و مقادیر ویژهٔ Γ عبارتند از 3 و -1 به ترتیب با تکرر $\frac{|G|}{4}$ و $\frac{3|G|}{4}$.

برهان. فرض کنید G یک گروه آبلی از مرتبه m، $G \supseteq S = S^{-1} \not\ni 1$، $|S| = 3$ و $\Gamma = Cay(G,S)$. از آنجا که Γ مکعبی است، $3|G|$ یک عدد زوج است و بنابراین G یک گروه از مرتبهٔ زوج است. فرض کنید $H = \langle S \rangle$. در این صورت $\Gamma \cong |G:H| Cay(H,S)$ و مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ برابر با مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ $Cay(H,S)$ با تکرر $|G:H|$ هستند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول. $a \in G$ از مرتبهٔ $n = 2k > 2$ وجود دارد که $S = \{a, a^{-1}, a^k\}$. در این صورت $H = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n$.

حال اگر k زوج باشد آن گاه

$$d(1,1)=0,\ \ d(1,a^k)=1,$$
$$d(1,a^r)=d(1,a^{-r})=r,\ \ r=1,\dots,\frac{k}{2},$$
$$d(1,a^{k-r})=d(1,a^{r-k})=r+1,\ \ r=1,\dots,\frac{k}{2}-1.$$

بنابراین طبق نتیجهٔ ۵٫۳ و یک محاسبهٔ ساده، مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ عبارتند از

$$\lambda_l=(-1)^l+2\Big(\frac{k}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2}l\Big)+(1+(-1)^l)\sum_{r=1}^{\frac{k}{2}-1} r\cos\Big(\frac{\pi lr}{k}\Big)+(-1)^l\sum_{r=1}^{\frac{k}{2}-1}\cos\Big(\frac{\pi lr}{k}\Big)\Big),\ \ l=0,\dots,n-1$$

با تکرر $\frac{m}{n}$. اگر $l=0$ آن گاه $\lambda_0=\frac{n^2+4n-8}{8}$ و اگر $l\neq 0$ زوج باشد آن گاه، طبق لم ۹٫۳، $\lambda_l=(-1)^{\frac{l}{2}+1}+2\frac{1-(-1)^{\frac{l}{2}}}{\cos(\frac{\pi l}{k})-1}$. در آخر، اگر l فرد باشد، دوباره طبق لم ۹٫۳، $\lambda_l=\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}\sin(\frac{\pi l}{k})}{\cos(\frac{\pi l}{k})-1}$.

حال اگر k فرد باشد، آن گاه

$$d(1,1)=0,\ \ d(1,a^k)=1,$$
$$d(1,a^r)=d(1,a^{-r})=r,\ \ r=1,\dots,\frac{k-1}{2},$$
$$d(1,a^{k-r})=d(1,a^{r-k})=r+1,\ \ r=1,\dots,\frac{k-1}{2},$$

و طبق نتیجهٔ ۵٫۳، مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ عبارتند از

$$\lambda_l=(-1)^l+2\Big(\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}(1+(-1)^l(r+1))\cos\Big(\frac{\pi lr}{k}\Big)\Big),\ \ l=0,\dots,n-1,$$

با تکرر $\frac{m}{n}$. علاوه بر این، $\lambda_0=\frac{n^2+16n-20}{16}$ و طبق لم ۹٫۳، به ازای l فرد داریم $\lambda_l=-1-\frac{1-(-1)^{\frac{l-1}{2}}k\sin(\frac{\pi l}{2k})}{\cos(\frac{\pi l}{k})-1}$ و به ازای l زوج داریم $\lambda_l=-1+\frac{1+(-1)^{\frac{l}{2}+1}\cos(\frac{\pi l}{2k})}{\cos(\frac{\pi l}{k})-1}$.

حالت دوم. $S=\{a,a^{-1},b\}$ که در آن $a,b\in G$، $o(a)=n>2$، $o(b)=2$ و $b\notin\langle a\rangle$. در این صورت $H=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_2$ و $Cay(H,S)$ یک n-منشور است و مقادیر ویژهٔ آن به راحتی با استفاده از نتیجهٔ ۱۱٫۳ به دست می‌آید.

حالت سوم. $S=\{a,b,c\}$ که در آن $a,b,c\in G$ هر سه از مرتبهٔ دو هستند. در این صورت $H=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ و $Cay(H,S)$ یکریخت با مکعب ۳-بعدی است و طبق نتیجهٔ ۵٫۳، مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ آن عبارتند از 12، -4 و ۰ به ترتیب با تکرر ۱، ۳ و ۴. بنابراین مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ Γ عبارتند از 12، -4 و 0 به ترتیب با تکرر $\frac{m}{8}$، $\frac{3m}{8}$ و $\frac{m}{2}$.

حالت چهارم. $S=\{a,b,ab\}$ که در آن $a,b\in G$ دو عضو مرتبهٔ دو هستند. در این حالت $H\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ و

$Cay(H,S)\cong K_3$. بنابراین مقادیر ویژهٔ Γ عبارتند از 3 و -1 به ترتیب با تکرر $\frac{|G|}{4}$ و $\frac{3|G|}{4}$.□

نتیجهٔ ۱۴،۳. فرض کنید G یک گروه آبلی است. در این صورت یک گراف کیلی همبند مکعبی روی Gوجود دارد که تمام مقادیر ویژهٔ فاصله‌ای آن صحیح هستند اگر و تنها اگر G یکریخت با یکی از گروه‌های$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_4$، $\mathbb{Z}_6$، $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2$ یا $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ باشد.

برهان. فرض کنید$S=S^{-1}$ یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از$G\backslash\{1\}$است و $\Gamma=Cay(G,S)$ یک گراف همبند و با طیف فاصله‌ای صحیح است. در این صورت، طبق نمادهای اثبات قضیهٔ ۳، یکی از سه حالت (الف) تا (د) اتفاق می‌افتد و $G=H$.

فرض کنید قسمت اول از حالت (الف) اتفاق بیفتد. در این صورت $\lambda_1=\frac{\sin(\frac{\pi}{k})}{\cos(\frac{\pi}{k})-1}=-\cot(\frac{\pi}{2k})$ یک عدد صحیح است. از طرفی می‌دانیم $\cot(\frac{\pi}{n})$ یک عدد گویا است اگر و تنها اگر $n=4$. در نتیجه $k=2$ و $\Gamma\cong K_4$ دارای مقادیر ویژهٔ فاصلهٔ $\{3,-1^{[3]}\}$ است.

اگر قسمت دوم از حالت (الف) رخ دهد، آن گاه $\lambda_1=-1-\frac{1-k\sin(\frac{\pi}{2k})}{\cos(\frac{\pi}{k})-1}$ یک عدد صحیح است که نتیجه می‌دهد $k=3$ و $\Gamma\cong K_{3,3}$ دارای مقادیر ویژهٔ فاصله ای $\{7,-2^{[4]},1\}$ است.

حال فرض کنیم حالت (ب) رخ دهد. اگر n زوج باشد آن گاه $-2\csc^2(\frac{\pi}{n})$ یک عدد صحیح است. در نتیجه $n=4$ یا $n=6$. برای $n=4$، طیف فاصله‌ای Γ برابر است با $\{12,-4^{[3]},0^4\}$ و برای $n=6$، طیف فاصله‌ای آن برابر است با $\{24,-6,0^{[7]},-8^{[2]},-2\}$. اگر n فرد باشد، آن گاه $-\frac{1}{2}\csc^2(\frac{\pi}{2n})$ یک عدد صحیح است و در نتیجه $n=3$ و طیف فاصله‌ای Γ برابر است با $\{7,-3,0^{[2]},-2^{[2]}\}$.

در حالت (ج)، Γ یکریخت با گراف ۴-وجهی است و در نتیجه دارای طیف $\{12,-4^{[3]},0^{[4]}\}$ است. همچنین در حالت (د)، $\Gamma\cong K_3$ دارای طیف فاصله‌ای $\{3,-1^{[3]}\}$ است. این اثبات را کامل می‌کند.□

نتیجهٔ زیر یک نتیجهٔ مستقیم از نتیجهٔ ۴،۱۳ و [۱، قضیهٔ ۱،۱] است.

نتیجهٔ ۱۵،۳. فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی است. در این صورت یک گراف کیلی همبند مکعبی روی G با طیف (مجاورت) صحیح وجود دارد اگر و تنها اگر یک گراف کیلی همبند مکعبی روی G با طیف فاصله‌ای صحیح وجود داشته باشد.

References

1. A.R. Abdollahi and E. Vatandoost, Which Cayley graphs are integral, *Electron. J. Combin.*, **16** (2009), # R122

2. M. Aouchiche and P. Hansen, Distance spectra of graphs: a survey, *LinearAlgebra Appl.*, **458** (2014) 301-386.

3. M. Arezoomand and B. Taeri, On the characteristic polynomial of n-Cayleydigraphs, *Electron. J. Combin.*, **20(3)** (2013), # P57.

4. N. Biggs. Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, 1974.

5. B. Foster-Greenwood and C. Kriloff, Spectra of Cayley graphs of complex reflection groups, *J. Algebr. Comb.*, DOI:10.1007/s10801-015-0652-8.

6. P. W. Fowler, G. Caporossi and P. Hansen, Distance matrices, Wiener indices, and related invariants of fullerenes, *J. Phys. Chem. A***105**(2001), 6232-6242.

7. W. Fulton and J. Harris, *Representation theory, A first course*, Springer-Verlag, New York, 1991.

8. X. Gao, Y. Luo and W. Liu, Resistance distances and the Kirchhoff index in Cayley graphs, *Discrete Applied Math.*, **159** (2011) 2050-2057.

9. A. Ilić, Distance spectra and distance energy of integral circulant graphs, *Linear Algebra Appl*. **433** (2010) 1005-1014.

10. P. Renteln, The distance spectra of Cayley graphs of Coxeter groups, *Discrete Math.*,**311** (2011) 738-755.

11. I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite groups*, Academic Press, 1976.