



Kharazmi University

# A numerical method for solving stochastic Ito-Volterra integral equation with multi stochastic terms by modified hat functions and improved hat functions

Neda Momenzadeh<sup>1</sup> , Alireza Vahidi<sup>2</sup> ✉, Esmail Babolian<sup>3</sup> 

1. Department of mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

E-mail: [neda\\_momenzadeh@yahoo.com](mailto:neda_momenzadeh@yahoo.com)

2. Department of mathematics, College of Science, Yadegare-e-Imam Khomeyni (RAH) Shahr-e-Rey Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

✉E-mail: [alrevahidi@yahoo.com](mailto:alrevahidi@yahoo.com)

3. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

E-mail: [babolian@khu.ac.ir](mailto:babolian@khu.ac.ir)

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

29 November 2020

Received in revised form:

13 July 2021

Accepted:

3 August 2021

Published online:

20 June 2023

### Keywords:

Stochastic integral equation, Brownian motion, Modified hat functions, Improved hat functions, operational matrix.

### Introduction

Stochastic equation are one of the most important and applied topics in today's world. It arises in modelling of different problems in science such as mathematics, finance, physics, mechanics, biology and so on. In many cases they have no explicit form of the solution, so numerical methods come to solve the problem and find an appropriate approximation.

Different basis functions have been used to find an approximation such as block pulse functions, hat functions, hybrid functions, wavelet methods and so on.

We use both modified hat functions (MHFs) and improved hat functions (IHFS) and their operational matrices to find approximations for the original equation:

$$X(t) = f(t) + \int_0^t \mu(s, t)X(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_j(s, t)X(s)dB_j(s),$$

where  $s, t \in D = [0, 1)$ ,  $X, f, \mu, \sigma_j, j = 1, \dots, n$  are the stochastic processes defined on the same probability space  $(\Omega, F, P)$  and  $X$  is unknown. Also  $\int_0^t \mu(s, t)X(s)ds, \int_0^t \sigma_j(s, t)X(s)dB_j(s), j = 1, \dots, n$  are Ito integrals and  $B(t)$  is a Brownian motion.

---

---

### Material and methods

In this scheme, we expand all known and unknown functions in terms of basis functions and replace in the original equation. The operational matrices of both bases are calculated and embedded in the equation to achieve a linear system of equations which give the expansion coefficients of the solution.

### Results and discussion

We consider some examples to show the accuracy and simplicity of these two methods, then compare the proposed method with other methods. Moreover, according to error analysis and reported results, we conclude that the proposed method were in a good agreement with the exact solution.

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The approximate solution can be easily calculated by solving a linear system of equations and using Matlab <sup>™</sup>.
- Convergence and error analysis show the reliability and accuracy of these methods.

---

**How to cite:** Momenzadeh, N., Vahidi, A., Babolian, E. (2023). A numerical method for solving stochastic Ito-Volterra integral equation with multi stochastic terms by modified hat functions and improved hat functions. *Mathematical Researches*, 9 (1), 222-245.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

# حل عددی معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی با استفاده از توابع پایه کلاهی اصلاح شده و بهبودیافته

ندا مؤمن زاده<sup>۱</sup>، علیرضا وحیدی<sup>۲</sup>✉، اسمعیل بابلیان<sup>۳</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران. رایانامه: [neda\\_momenzadeh@yahoo.com](mailto:neda_momenzadeh@yahoo.com)

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی(ره) شهرری، تهران، ایران. رایانامه: [alrevahidi@yahoo.com](mailto:alrevahidi@yahoo.com)

۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: [babolian@khu.ac.ir](mailto:babolian@khu.ac.ir)

| چکیده  | اطلاعات مقاله  |
|--|--|
|  | نوع مقاله: مقاله پژوهشی  |
|  | تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۰۹   |
|  | تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۲۲  |
|  | تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۲  |
|  | تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰   |
|  | واژه‌های کلیدی:<br>معادله انتگرال تصادفی، حرکت براونی، توابع پایه کلاهی اصلاح شده، توابع پایه کلاهی بهبودیافته، ماتریس عملیاتی،  |
| در این مقاله از توابع پایه کلاهی اصلاح شده و بهبودیافته برای یافتن جواب تقریبی معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی استفاده می‌شود. با جای‌گذاری بردارها و ماتریس‌های ضرایب بسط و ماتریس‌های عملیاتی در معادله و استفاده از ویژگی‌های دو پایه، دستگاه معادلاتی به دست می‌آید که --جواب آن با نرم‌افزارهای محاسباتی ریاضی به راحتی قابل محاسبه خواهد بود. هم‌چنین نشان داده شده است مرتبه خطای این روش با دو پایه ذکر شده با در نظر گرفتن چند شرط به ترتیب $o(h^3)$ و $o(h^4)$ بوده و کارایی و دقت آن را با حل دو مثال و مقایسه با روش توابع بلاک پالس و توابع کلاهی بررسی می‌نمائیم. |  |
|  | استناد: مؤمن‌زاده، ندا؛ وحیدی، علیرضا؛ بابلیان، اسمعیل؛ (۱۴۰۲). حل عددی معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی با استفاده از توابع پایه کلاهی اصلاح شده و بهبودیافته. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۱)، ۲۴۵-۲۲۲. |
|  | ناشر: دانشگاه خوارزمی  |
|  | © نویسندگان.   |



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

در دنیای امروز، مدل‌بندی بسیاری از مسائل به معادلات تصادفی ختم می‌شود [۱]. مباحثی در ریاضیات [۲،۳،۴،۵،۶] اقتصاد [۷،۸،۹،۱۰]، فیزیک [۱۱،۱۲،۱۳]، مکانیک [۱۴] زیست‌شناسی [۱۵،۱۶] و... از این قبیل هستند و یافتن جواب تقریبی مناسب با توجه به عدم وجود جواب قطعی در برخی از آنها، دغدغه‌ای برای دانشمندان به شمار می‌آید. یکی از این روش‌ها استفاده از توابع پایه می‌باشد. توابع پایه مختلفی برای این امر به کار گرفته شده‌اند. توابع پایه بلاک پالس [۲،۱۷]، توابع پایه کلاهی [۱۸]، توابع پایه ترکیبی [۱۹،۲۰]، موجک‌ها [۲۱،۲۲] نمونه‌ای از این توابع هستند.

در این مقاله از توابع پایه کلاهی اصلاح شده و بهبودیافته و ویژگی‌های آنها برای یافتن تقریب جواب معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی استفاده کرده و ضمن مقایسه و بررسی خطای این دو روش در حل این نوع معادله به مقایسه آنها با دو روش توابع پایه بلاک پالس و توابع پایه کلاهی در حل عددی دو مثال پرداخته خواهد شد.

شکل کلی این معادله به صورت زیر است:

(۱)

$$X(t) = f(t) + \int_0^t \mu(s, t)X(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_j(s, t)X(s)dB_j(s),$$

که در آن  $D = [0, 1]$  و  $s, t \in D$  و  $\mathbf{X}, f, \mu, \sigma_j$  و  $j = 1, 2, \dots, n$ ، فرآیندهای تصادفی تعریف شده بر روی فضای احتمال یکسان  $(\Omega, F, P)$  و  $X$  نامعلوم می‌باشد.  $\int_0^t \sigma_j(s, t)X(s)dB_j(s)$  و  $j = 1, 2, \dots, n$  انتگرال تصادفی از نوع ایتو بوده و  $B_j(t)$  و  $j = 1, 2, \dots, n$  فرآیندهای حرکت براونی هستند.

در بخش‌های دوم و سوم این مقاله، توابع پایه کلاهی اصلاح شده و بهبودیافته و ویژگی‌های آنها معرفی شده‌اند. در بخش چهارم، به روش استفاده از این توابع پایه برای یافتن جواب تقریبی معادله (۱) می‌پردازیم. برآورد خطا و مثال‌های عددی مباحثی هستند که در بخش‌های پنجم و ششم مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتیجه‌گیری مربوط به استفاده از این روش نیز در بخش هفتم آمده است.

## توابع پایه کلاهی اصلاح شده

توابع کلاهی دسته‌ای از توابع پایه به شکل کلاه یا مثلث در هر بازه از افراز می‌باشند و دلیل نام‌گذاری آنها نیز همین است. این توابع کاربردهای زیادی در پردازش سیگنال و مهندسی سیستم‌های ارتباطی، انتقال سیگنال‌های دیجیتال و یافتن تقریب جواب معادلات دیفرانسیل و... دارند و به خاطر پیدا کردن جواب‌های دقیق‌تر از اصلاح درجات بالاتر استفاده می‌نماییم. با فرض این که  $m \geq 2$  و  $h = \frac{T}{m}$  بازه  $[0, T]$  را به زیربازه‌هایی با طول مساوی  $[ih, (i+2)h]$  و  $i = 0, 2, \dots, (m-2)$  افراز می‌کنیم.  $X_m$  را مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های از درجه دوم و محدود به زیربازه‌های این افراز می‌نامیم. با توجه به این

نکته که هر عضو  $X_m$  با مقادیرش در  $(m+1)$  نقطه  $ih$  و  $i = 0, 1, \dots, m$  مشخص می‌شود،  $X_m$  دارای بعد  $(m+1)$  است.  $(m+1)$  تابع کلاهی اصلاح شده به شکل زیر می‌باشند و هر تابع  $f$  از  $\mathcal{X} = c^3(D)$  را می‌توان با بسط آنها تقریب

زد [۲۴،۲۳]

$$h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(t-h)(t-2h) & 0 \leq t \leq 2h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

چنانچه  $i$  فرد و  $1 \leq i \leq (m-1)$  باشد،

$$h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(t-(i-1)h)(t-(i+1)h) & (i-1)h \leq t \leq (i+1)h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

چنانچه  $i$  زوج و  $2 \leq i \leq (m-2)$  باشد،

$$h_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(t-(i-1)h)(t-(i-2)h) & (i-2)h \leq t \leq ih \\ \frac{1}{2h^2}(t-(i+1)h)(t-(i+2)h) & ih \leq t \leq (i+2)h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

و در نهایت

$$h_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(t-(T-h))(t-(T-2h)) & T-2h \leq t \leq T \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

### ویژگی‌های توابع کلاهی اصلاح شده و ماتریس‌های عملیاتی آن

(۱) توابعی پیوسته و مستقل خطی هستند.

$$h_i(jh) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (۲)$$

$$h_i(t)h_j(t) = \begin{cases} 0 & i \text{ زوج}, |i-j| \geq 3 \\ 0 & i \text{ فرد}, |i-j| \geq 2 \end{cases} \quad (۳)$$

$$\sum_{i=0}^m h_i(t) = 1 \quad (۴)$$

(۵) با فرض  $H(t) = [h_0(t), h_1(t), \dots, h_m(t)]^T$  داریم

$$H(t)H^T(t) \cong \begin{pmatrix} h_0(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_m(t) \end{pmatrix}$$

(۶) چنانچه  $V$  برداری ستونی با  $(m + 1)$  مولفه باشد

$$H(t)H^T(t)V \cong \text{diag}(V)H(t).$$

(۷) با فرض این که  $A$  ماتریسی  $(m + 1) \times (m + 1)$  باشد، داریم

$$H(t)^T A H(t) \cong H(t)^T \tilde{A},$$

که در آن  $\tilde{A}$  برداری ستونی با  $(m + 1)$  مولفه قطری ماتریس  $A$  است.

بسط تابع حقیقی  $f$  از  $\mathcal{X}$  بر حسب توابع پایه کلاهی اصلاح شده به شکل زیر است [۲۳]

(۲)

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^m f_i h_i(t) = F^T H(t) = H(t)^T F,$$

که در آن  $F = [f_0, f_1, \dots, f_m]^T$  و  $f_i = f(ih)$  و  $i = 0, 1, \dots, m$ . به شکل مشابه تابع دو متغیره  $g$  از  $c^3(D \times D)$  را می

توان به شکل زیر بر حسب این توابع پایه نوشت

(۳)

$$g(s, t) \cong H(s)^T G H(t),$$

که  $G$  ماتریسی  $(m + 1) \times (m + 1)$  با درایه های  $G_{ij} = g(ih, jh)$  و  $i, j = 0, 1, \dots, m$  می باشد.

با انتگرال گیری از بردار  $H(t)$  داریم

$$\int_0^t H(\tau) d\tau = P H(t),$$

که در آن  $P$ ،  $(m + 1) \times (m + 1)$  و ماتریس عملیاتی انتگرال گیری نامیده شده و به شکل زیر می باشد [۲۳]

(۴)

$$P = \frac{h}{12} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 16 & 16 & 16 & \dots & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & -1 & 4 & 9 & 8 & \dots & 8 & 8 & 8 & 8 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

با انتگرال‌گیری تصادفی از بردار  $H(t)$  داریم

$$\int_0^t H(\tau)dB(\tau) = P_S H(t),$$

که در آن  $P_S$ ،  $(m + 1) \times (m + 1)$  و ماتریس عملیاتی انتگرال‌گیری تصادفی نامیده شده و به شکل زیر است

$$P_S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & B(h) + \beta_{1,1} & \beta_{2,1} & \beta_{2,1} & \beta_{2,1} & \dots & \beta_{2,1} & \beta_{2,1} & \beta_{2,1} & \beta_{2,1} \\ 0 & \gamma_{1,2} & B(2h) + \gamma_{2,2} & \gamma_{3,2} & \gamma_{4,2} & \dots & \gamma_{4,2} & \gamma_{4,2} & \gamma_{4,2} & \gamma_{4,2} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{1,m-2} & B(T-2h) + \gamma_{2,m-2} & \gamma_{3,m-2} & \gamma_{4,m-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B(T-h) + \beta_{1,m-1} & \beta_{2,m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{1,m} & B(T) + \gamma_{2,m} \end{pmatrix} \quad (5)$$

9

$$\alpha_1 = -\int_0^h \frac{1}{2h^2} (2\tau - 3h)B(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_2 = -\int_0^{2h} \frac{1}{2h^2} (2\tau - 3h)B(\tau)d\tau,$$

$$\beta_{1,i} = \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{1}{h^2} (2\tau - 2ih)B(\tau)d\tau,$$

$$\beta_{2,i} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \frac{1}{h^2} (2\tau - 2ih)B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_{1,i} = -\int_{(i-2)h}^{(i-1)h} \frac{1}{2h^2} (2\tau - (2i - 3)h)B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_{2,i} = -\int_{(i-2)h}^{ih} \frac{1}{2h^2} (2\tau - (2i - 3)h)B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_{3,i} = -\int_{(i-2)h}^{ih} \frac{1}{2h^2} (2\tau - (2i - 3)h)B(\tau)d\tau - \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{2h^2} (2\tau - (2i + 3)h)B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_{4,i} = -\int_{(i-2)h}^{ih} \frac{1}{2h^2} (2\tau - (2i - 3)h)B(\tau)d\tau - \int_{ih}^{(i+2)h} \frac{1}{2h^2} (2\tau - (2i + 3)h)B(\tau)d\tau$$

## توابع پایه کلاهی بهبودیافته

این دسته از توابع از درجه سوم بوده و بر روی زیربازه‌های  $[ih, (i+3)h]$  و  $i = 0, 3, \dots, (m-3)$  تعریف می‌شوند. با فرض این که  $m$  ضریبی از ۳ بوده و  $m \geq 3$ ،  $(m+1)$  تابع پایه کلاهی بهبودیافته به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۴، ۲۵]

$$z_0(t) = \begin{cases} \frac{-1}{6h^3}(t-h)(t-2h)(t-3h) & 0 \leq t \leq 3h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

اگر  $1 \leq k \leq \frac{m}{3}$  و  $i = 3k - 2$

$$z_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h^3}(t-(i-1)h)(t-(i+1)h)(t-(i+2)h) & (i-1)h \leq t \leq (i+2)h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

چنانچه  $1 \leq k \leq \frac{m}{3}$  و  $i = 3k - 1$

$$z_i(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2h^3}(t-(i-2)h)(t-(i-1)h)(t-(i+1)h) & (i-2)h \leq t \leq (i+1)h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

اگر  $1 \leq k \leq \frac{m}{3} - 1$  و  $i = 3k$

$$z_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3}(t-(i-3)h)(t-(i-2)h)(t-(i-1)h) & (i-3)h \leq t \leq ih \\ \frac{-1}{6h^3}(t-(i+1)h)(t-(i+2)h)(t-(i+3)h) & ih \leq t \leq (i+3)h \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$



و  $(m + 1)$  امین پایه به شکل زیر است

$$z_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h^3}(t - (T - h))(t - (T - 2h))(t - (T - 3h)) & T - 3h \leq t \leq T \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

### ویژگی‌های توابع کلاهی بهبود یافته و ماتریس‌های عملیاتی آن

(۱) توابعی پیوسته و مستقل خطی هستند.

$$z_i(jh) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (۲)$$

$$\sum_{i=0}^m z_i(t) = 1 \quad (۳)$$

(۴) با فرض  $Z(t) = [z_0(t), z_1(t), \dots, z_m(t)]^T$  داریم

$$Z(t)Z^T(t) \cong \begin{pmatrix} z_0(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & z_m(t) \end{pmatrix}$$

(۵) چنانچه  $V$  برداری با  $(m + 1)$  مولفه باشد

$$Z(t)Z^T(t)V \cong \text{diag}(V)Z(t).$$

(۶) با فرض این که  $K$  ماتریسی  $(m + 1) \times (m + 1)$  باشد، داریم

$$Z(t)^T K Z(t) \cong Z(t)^T \tilde{K},$$

که در آن  $\tilde{K}$  برداری ستونی با  $(m + 1)$  مولفه قطری ماتریس  $K$  است.

بسط تابع حقیقی  $p$  بر روی  $D$  بر حسب توابع پایه کلاهی بهبود یافته به شکل زیر است [۲۵]

(۶)

$$p(t) \cong \sum_{i=0}^m p_i z_i(t) = P^T Z(t) = Z(t)^T P,$$

که در آن  $P = [p_0, p_1, \dots, p_m]^T$  و  $p_i = p(ih)$  و  $i = 0, 1, \dots, m$ . به شکل مشابه تابع دو متغیره  $k(s, t)$  از  $D \times D$

را می‌توان بر حسب این توابع پایه به صورت زیر نوشت

(۷)

$$k(s, t) \cong Z(s)^T K Z(t),$$

که در آن  $K$  ماتریسی  $(m + 1) \times (m + 1)$  با درایه‌های  $K_{ij} = k(ih, jh)$  و  $i, j = 0, 1, \dots, m$  می‌باشد.

با انتگرال گیری از بردار  $Z(t)$ ، ماتریس عملیاتی انتگرال گیری  $P'$  که در رابطه زیر صدق می کند به دست می آید [۲۵]

$$\int_0^t Z(\tau) d\tau = P' Z(t),$$

و

(۸)

$$P' = \frac{h}{24} \begin{pmatrix} 0 & q_1' & q_2' & q_2' & q_2' & \dots & q_2' \\ 0 & p_1' & p_2' & p_3' & p_3' & \dots & p_3' \\ 0 & 0 & p_1' & p_2' & p_3' & \dots & p_3' \\ 0 & 0 & 0 & p_1' & p_2' & \dots & p_3' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1' & \dots & p_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1' \end{pmatrix}$$

که در آن

$$p_1' = \begin{pmatrix} 19 & 32 & 27 \\ -5 & 8 & 27 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}, p_2' = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 18 & 17 & 18 \end{pmatrix}, q_2' = (9 \ 9 \ 9), q_1' = (9 \ 8 \ 9)$$

$p_3' = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$  و ۰ با توجه به محل قرارگرفتنش ماتریس صفر  $3 \times 3$  و یا بردار صفر  $3 \times 1$  می باشد.

ماتریس عملیاتی انتگرال گیری تصادفی،  $p_s'$  که از گرفتن انتگرال تصادفی از بردار  $Z(t)$  به دست می آید به صورت زیر

است [۲۵]

$$\int_0^t Z(\tau) dB(\tau) = P_s' Z(t),$$

و

(۹)

$$P_s' = \begin{pmatrix} 0 & q_{s1}' & q_{s2}' & q_{s2}' & q_{s2}' & \dots & q_{s2}' \\ 0 & p_{s1}' & p_{s2}' & p_{s3}' & p_{s3}' & \dots & p_{s3}' \\ 0 & 0 & p_{s1}' & p_{s2}' & p_{s3}' & \dots & p_{s3}' \\ 0 & 0 & 0 & p_{s1}' & p_{s2}' & \dots & p_{s3}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{s1}' & \dots & p_{s3}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{s1}' \end{pmatrix}$$

که در آن

$$q_{s2} = (\alpha_{0,3} \quad \alpha_{0,3} \quad \alpha_{0,3}) \text{ و } q_{s1} = (\alpha_{0,1} \quad \alpha_{0,2} \quad \alpha_{0,3})$$

$$p_{s3}' = \text{ و } p_{s2}' = \begin{pmatrix} \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} \\ \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} \\ \gamma_{i,i+1} & \gamma_{i,i+2} & \gamma_{i,i+3} \end{pmatrix} \text{ و } p_{s1}' = \begin{pmatrix} B(ih) + \alpha_{i,i} & \alpha_{i,i+1} & \alpha_{i,i+2} \\ \beta_{i,i-1} & B(ih) + \beta_{i,i} & \beta_{i,i+1} \\ \gamma_{i,i-2} & \gamma_{i,i-1} & B(ih) + \gamma_{i,i} \end{pmatrix}$$

$$\text{ و } \begin{pmatrix} \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+2} \\ \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} & \beta_{i,i+1} \\ \gamma_{i,i+3} & \gamma_{i,i+3} & \gamma_{i,i+3} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{0,j}(h) = \frac{1}{6h^3} \int_0^{jh} (3\tau^2 - 12\tau h + 11h^2)B(\tau)d\tau, \quad j = 1, 2, 3$$

اگر  $j = i, i + 1, i + 2$  و  $1 \leq k \leq \frac{m}{3}$  و  $i = 3k - 2$

$$\alpha_{i,j}(h) = \frac{-1}{2h^3} \int_{(i-1)h}^{jh} (3\tau^2 - (6i + 4)h\tau + (3i^2 + 4i - 1)h^2)B(\tau)d\tau,$$

چنانچه  $j = i - 1, i, i + 1$  و  $1 \leq k \leq \frac{m}{3}$  و  $i = 3k - 1$

$$\beta_{i,j}(h) = \frac{1}{2h^3} \int_{(i-2)h}^{jh} (3\tau^2 - (6i - 4)h\tau + (3i^2 - 4i - 1)h^2)B(\tau)d\tau,$$

اگر  $j = i - 2, i - 1, i$  و  $1 \leq k \leq \frac{m}{3} - 1$  و  $i = 3k$

$$\gamma_{i,j}(h) = \frac{-1}{6h^3} \int_{(i-3)h}^{jh} (3\tau^2 - (6i - 12)h\tau + (3i^2 - 12i + 11)h^2)B(\tau)d\tau,$$

و برای  $j = i + 1, i + 2, i + 3$

$$\gamma_{i,j}(h) = \frac{-1}{6h^3} \int_{(i-3)h}^{ih} (3\tau^2 - (6i - 12)h\tau + (3i^2 - 12i + 11)h^2)B(\tau)d\tau$$

$$- \int_{ih}^{jh} (3\tau^2 - (6i + 12)h\tau + (3i^2 + 12i + 11)h^2)B(\tau)d\tau,$$

و 0 با توجه به محل قرارگرفتنش در آن ماتریس صفر  $3 \times 3$  و یا بردار صفر  $3 \times 1$  می‌باشد.

## روش عددی

معادله زیر را که درصدد یافتن جواب تقریبی برای آن هستیم را در نظر بگیرید

$$X(t) = f(t) + \int_0^t \mu(s, t)X(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_j(s, t)X(s)dB_j(s), \quad t \in D$$

تمام توابع موجود در معادله فوق را با تقریب به دست آمده بر حسب توابع پایه کلاهی اصلاح شده که توضیح آن در (۲) و (۳) آمده است، جایگزین می‌نمائیم.

(۱۰)

$$X(t) \cong X^T H(t) = H(t)^T X,$$

(۱۱)

$$f(t) \cong F^T H(t) = H(t)^T F,$$

(۱۲)

$$\mu(s, t) \cong H(t)^T \mu^T H(s) = H(s)^T \mu H(t),$$

(۱۳)

$$j = 1, 2, \dots, n. \sigma_j(s, t) \cong H(t)^T \Delta_j^T H(s) = H(s)^T \Delta_j H(t),$$

تقریب زیر پس از جای‌گذاری تقریب‌های (۱۰)–(۱۳) در معادله به دست می‌آید

$$\begin{aligned} H(t)^T X &\cong H(t)^T F + \left( \int_0^t H(t)^T \mu^T H(s) H(s)^T X ds \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left( \int_0^t H(t)^T \Delta_j^T H(s) H(s)^T X dB_j(s) \right), \end{aligned}$$

روابط زیر با استفاده از ویژگی شماره (۶)، جایگذاری ماتریس‌های عملیاتی و ویژگی شماره (۷)، به دست آمده‌اند.

(۱۴)

$$\begin{aligned} H(t)^T X &\cong H(t)^T F + H(t)^T \mu^T \text{diag}(X) \left( \int_0^t H(s) ds \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n H(t)^T \Delta_j^T \text{diag}(X) \left( \int_0^t H(s) dB_j(s) \right), \end{aligned}$$

(۱۵)

$$\begin{aligned} H(t)^T X &\cong H(t)^T F + H(t)^T \mu^T \text{diag}(X) P H(t) \\ &+ \sum_{j=1}^n H(t)^T \Delta_j^T \text{diag}(X) P_s H(t), \end{aligned}$$

(۱۶)

$$H(t)^T X \cong H(t)^T F + H(t)^T \tilde{A} + \sum_{j=1}^n H(t)^T \tilde{B}_j,$$

که در معادله (۱۶)،  $A = \mu^T \text{diag}(X)P$  و  $B_j = \Delta_j^T \text{diag}(X)P_s$  و  $j = 1, 2, \dots, n$ . ویژگی استقلال خطی ما را قادر به حذف  $H(t)^T$  از رابطه بالا کرده و با تغییر  $\cong$  به دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آید که جواب آن ضرایب بسط  $X(t)$  بر حسب توابع پایه کلاهی اصلاح شده بوده و با نرم‌افزارهای ریاضی به راحتی قابل محاسبه می‌باشد.

$$X = F + \tilde{A} + \sum_{j=1}^n \tilde{B}_j$$

روش پیدا کردن تقریب جواب با توابع پایه کلاهی بهبود یافته مانند توابع کلاهی اصلاح شده بوده و کافی است بردار توابع پایه و ماتریس‌های عملیاتی را به  $Z(t)$ ،  $P'$  و  $P_s'$  تغییر دهیم.

### بررسی خطا

در این قسمت به بررسی و آنالیز خطای هر دو روش مطرح شده برای حل معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی می‌پردازیم. منظور از  $\| \cdot \|$  نرمی است که برای تابع پیوسته  $f$  به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\| f \| = \sup_{t \in D} |f(t)|.$$

**قضیه ۱:** [۲۶] فرض کنید  $t_j = jh$  و  $j = 0, 1, \dots, m$  و  $f \in \mathcal{X}$  و  $f_m$  بسط تابع  $f$  بر حسب توابع پایه کلاهی اصلاح شده باشد که به صورت  $f_m = \sum_{j=0}^m f(t_j)h_j(t)$  به دست می‌آید و همچنین  $e_m(t)$  را برای  $t \in D$  برابر  $f(t) - f_m(t)$  در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$\| e_m \| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \| f^{(3)} \|.$$

**قضیه ۲:** [۲۶] فرض کنید

$$\mu_m(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \mu(s_i, t_j) h_i(s) h_j(t) \text{ و } \mu \in C^3(D \times D) \text{ و } j = 0, 1, \dots, m \text{ و } s_j = t_j = jh$$

بسط تابع  $\mu$  بر حسب توابع پایه کلاهی اصلاح شده باشد. هم‌چنین فرض کنید  $e_m(s, t) = \mu(s, t) - \mu_m(s, t)$  آن‌گاه

$$\| e_m \| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} (\| \mu_s^{(3)} \| + \| \mu_t^{(3)} \|) + \frac{h^6}{243} \| \mu_{s,t}^{(3+3)} \|.$$

قضیه ۳: [۲۵] فرض کنید  $t_j = jh$  و  $j = 0, 1, \dots, m$  و  $g \in C^4(D)$  و  $g_m$  بسط تابع  $g$  بر حسب توابع پایه کلاهی بهبود یافته باشد که به صورت  $g_m = \sum_{j=0}^m g(t_j)z_j(t)$  به دست می‌آید و همچنین  $e_m(t)$  را برای  $t \in D$  برابر  $g(t) - g_m(t)$  در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$\|e_m\| \leq \frac{3h^4}{128} \|f^{(4)}\|.$$

قضیه ۴: [۲۵] فرض کنید

$$r_m(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m r(s_i, t_j) z_i(s) z_j(t) \text{ و } r \in C^4(D \times D) \text{ و } j = 0, 1, \dots, m \text{ و } s_j = t_j = jh$$

بسط تابع  $r$  بر حسب توابع پایه کلاهی بهبود یافته باشد.

همچنین فرض کنید  $e_m(s, t) = r(s, t) - r_m(s, t)$  آن‌گاه

$$\|e_m\| \leq \frac{3h^4}{128} (\|r_s^{(4)}\| + \|r_t^{(4)}\|) + \frac{9h^8}{16384} \|r_{s,t}^{(4+4)}\|.$$

قضیه ۵: فرض کنید  $X$  جواب معادله (۱) و  $X_m$  بسط آن بر حسب توابع پایه کلاهی اصلاح شده باشد و

- 1)  $\|X\| \leq \rho,$
- 2)  $\|\mu\| \leq K,$
- 3)  $\|\sigma_j\| \leq M_j, j = 1, 2, \dots, n,$
- 4)  $(K + \gamma(h))T + \sum_{j=1}^n (M_j + \lambda_j(h)) \|B_j\| < 1,$

آن‌گاه

$$\|X - X_m\| \leq \frac{\Gamma(h) + \rho\gamma(h) + \rho \sum_{j=1}^n \lambda_j(h) \|B_j\|}{1 - (T(K + \gamma(h)) + \sum_{j=1}^n (M_j + \lambda_j(h)) \|B_j\|)},$$

و در نتیجه  $\|X - X_m\| = o(h^3)$  که در آن

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \|f^{(3)}\|, \\ \gamma(h) &= \frac{h^3}{9\sqrt{3}} (\|\mu_s^{(3)}\| + \|\mu_t^{(3)}\|) + \frac{h^6}{243} \|\mu_{s,t}^{(3+3)}\|, \\ \lambda_j(h) &= \frac{h^3}{9\sqrt{3}} (\|\sigma_{j_s}^{(3)}\| + \|\sigma_{j_t}^{(3)}\|) + \frac{h^6}{243} \|\sigma_{j_{s,t}}^{(3+3)}\|, \\ & j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

برهان: با توجه به معادله (۱) داریم

$$(17) \quad \begin{aligned} X(t) - X_m(t) &= f(t) - f_m(t) + \int_0^t (\mu(s, t)X(s) - \mu_m(s, t)X_m(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t (\sigma_j(s, t)X(s) - \sigma_{j_m}(s, t)X_m(s)) dB_j(s), \end{aligned}$$

و با فرض

$$N = \sup_{s, t \in D} |\mu(s, t)X(s) - \mu_m(s, t)X_m(s)|,$$

و

$$N_j = \sup_{s, t \in D} |\sigma_j(s, t)X(s) - \sigma_{j_m}(s, t)X_m(s)|,$$

و در نظر گرفتن معادله (۱۷) خواهیم داشت

(۱۸)

$$|X(t) - X_m(t)| \leq |f(t) - f_m(t)| + tN + \sum_{j=1}^n |B_j(t)|N_j,$$

با استفاده از قضایای ۱ و ۲ و فرض‌های قضیه ۵، کران بالا برای  $N$  و  $N_j$  به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} N &\leq \|\mu\| \|X - X_m\| + \|\mu - \mu_m\| (\|X - X_m\| + \|X\|) \\ &\leq \|X - X_m\| (K + \gamma(h)) + \gamma(h)\rho, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} N_j &\leq \|\sigma_j\| \|X - X_m\| + \|\sigma_j - \sigma_{j_m}\| (\|X - X_m\| + \|X\|) \\ &\leq \|X - X_m\| (M_j + \lambda_j(h)) + \lambda_j(h)\rho, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

که با جایگذاری آنها در رابطه (۱۸) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|X - X_m\| &\leq \Gamma(h) + T((K + \gamma(h)) \|X - X_m\| + \rho\gamma(h)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \|B_j\| ((M_j + \lambda_j(h)) \|X - X_m\| + \lambda_j(h)\rho), \end{aligned}$$

با جابه‌جایی جملات مشابه، به رابطه زیر که در صدد اثبات آن بودیم، می‌رسیم

$$\|X - X_m\| \leq \frac{\Gamma(h) + \rho\gamma(h) + \rho \sum_{j=1}^n \lambda_j(h) \|B_j\|}{1 - (T(K + \gamma(h)) + \sum_{j=1}^n (M_j + \lambda_j(h)) \|B_j\|)},$$

و با توجه به این که  $h^3$  در تمام جملات  $\Gamma(h)$ ،  $\gamma(h)$  و  $\lambda_j(h)$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$  مشترک است، می‌توان نتیجه گرفت که  $\|X - X_m\| = o(h^3)$ .

قضیه ۶: فرض کنید  $X$  جواب معادله (۱) و  $X_m$  بسط آن بر حسب توابع پایه کلاهی بهبودیافته باشد و

- 1)  $\|X\| \leq \alpha$ ,
- 2)  $\|\mu\| \leq \beta$ ,
- 3)  $\|\sigma_j\| \leq L_j, j = 1, 2, \dots, n$ ,
- 4)  $T(\beta + \rho(h)) + \sum_{j=1}^n (L_j + \eta_j(h)) \|B_j\| < 1$ ,

آن‌گاه

$$\|X - X_m\| \leq \frac{\Gamma(h) + \alpha\rho(h) + \alpha \sum_{j=1}^n \eta_j(h) \|B_j\|}{1 - (T(\beta + \rho(h)) + \sum_{j=1}^n (L_j + \eta_j(h)) \|B_j\|)},$$

و در نتیجه  $\|X - X_m\| = o(h^4)$  که در آن

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= \frac{3h^4}{128} \|f^{(4)}\|, \\ \rho(h) &= \frac{3h^4}{128} (\|\mu_s^{(4)}\| + \|\mu_t^{(4)}\|) + \frac{9h^8}{16384} \|\mu_{s,t}^{(4+4)}\|, \\ \eta_j(h) &= \frac{3h^4}{128} (\|\sigma_{j_s}^{(4)}\| + \|\sigma_{j_t}^{(4)}\|) + \frac{9h^8}{16384} \|\sigma_{j_s,t}^{(4+4)}\|, \\ & \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

برهان: اثبات شبیه به اثبات قضیه ۵ بوده با این تفاوت که در آن از قضایای ۳ و ۴ استفاده می‌شود.

## مثال‌های عددی

برای نشان دادن دقت و همچنین کاربردی بودن روش به حل دو مثال می‌پردازیم. نرم‌افزار مورد استفاده و روش برنامه‌نویسی، متلب ۷ و منبع [۲۷] می‌باشد.

مثال ۱: فرض کنید

$$X(t) = X_0 + \int_0^t rX(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \alpha_j X(s)dB_j(s), s, t \in [0,1],$$

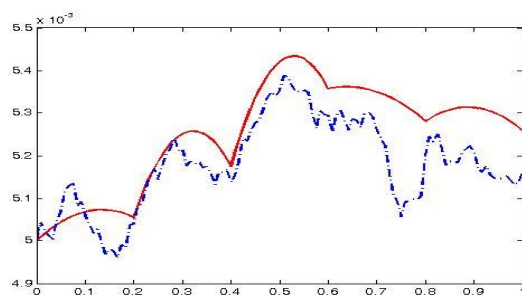
معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی باشد. جواب دقیق این معادله برابر با

$$X(t) = X_0 e^{(r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2)t + \sum_{j=1}^n \alpha_j B_j(t)},$$

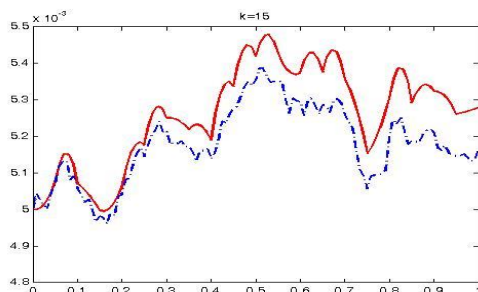


می‌باشد که در آن  $X$  فرآیند تصادفی تعریف شده بر روی فضای احتمال  $(\Omega, F, P)$  بوده و  $B_j(t)$  و  $j = 1, 2, \dots, n$  فرآیندهای حرکت براونی هستند. خطای عددی موجود در مثال فوق برای  $X_0 = \frac{1}{200}$  و  $r = \frac{1}{20}$ ،  $\alpha_1 = \frac{1}{50}$  و  $\alpha_2 = \frac{2}{50}$  و  $\alpha_3 = \frac{4}{50}$  و  $\alpha_4 = \frac{9}{50}$  در جداول شماره ۱ و ۲ آمده است.

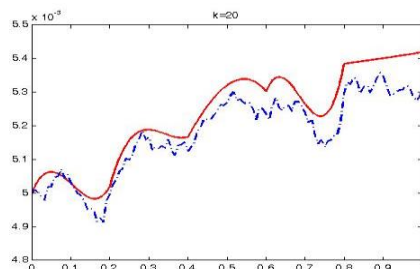
جدول شماره ۱، خطای روش اول را به ازای  $m = 10$  و  $m = 40$  نشان می‌دهد. جدول شماره ۲، بیان‌گر خطای روش دوم به ازای  $m = 15$  و  $m = 30$  می‌باشد. منظور از  $k$  در هر دو جدول تعداد تکرار بوده و شکل‌های شماره ۱-۴ نشان‌گر جواب‌های به دست آمده از دو روش به ازای تعداد مختلف پایه می‌باشد.



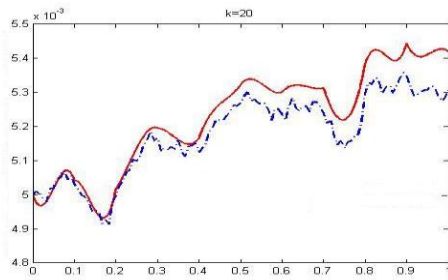
شکل ۱: . . . جواب دقیق و \_\_ جواب بدست آمده با روش توابع کلاهی اصلاح شده برای مثال اول و به ازای  $m=10$



شکل ۲: . . . جواب دقیق و \_\_ جواب به دست آمده با روش توابع کلاهی اصلاح شده برای مثال اول و به ازای  $m=40$



شکل ۳: . . . جواب دقیق و \_\_ جواب به دست آمده با روش توابع کلاهی بهبود یافته برای مثال اول و به ازای  $m=15$



شکل ۴: جواب دقیق و جواب به دست آمده با روش توابع کلاهی بهبود یافته برای مثال اول و به ازای  $m=30$

جدول شماره ۱: نتایج عددی مثال ۱ برای روش توابع پایه کلاهی اصلاح شده

| نقاط | k=15                     |                      |                                |                          |                      |                                |
|------|--------------------------|----------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------|--------------------------------|
|      | m=10                     |                      |                                | m=40                     |                      |                                |
|      | خطای روش توابع بلاک پالس | خطای روش توابع کلاهی | خطای روش توابع کلاهی اصلاح شده | خطای روش توابع بلاک پالس | خطای روش توابع کلاهی | خطای روش توابع کلاهی اصلاح شده |
| ۰    | 7.9e-5                   | 0                    | 0                              | 3.6e-5                   | 0                    | 0                              |
| ۰,۱  | 5.4e-5                   | 1.6e-5               | 8.9e-6                         | 1.6e-5                   | 1.3e-5               | 1.0e-5                         |
| ۰,۲  | 1.4e-4                   | 3.9e-5               | 1.5e-5                         | 6.6e-5                   | 3.4e-5               | 2.2e-5                         |
| ۰,۳  | 1.1e-5                   | 9.1e-5               | 3.8e-5                         | 1.7e-6                   | 8.2e-5               | 3.8e-5                         |
| ۰,۴  | 1.9e-4                   | 1.3e-4               | 3.7e-5                         | 7.4e-5                   | 1.2e-4               | 5.1e-5                         |
| ۰,۵  | 7.2e-5                   | 1.9e-4               | 6.7e-5                         | 8.9e-5                   | 1.7e-4               | 6.5e-5                         |
| ۰,۶  | 7.1e-5                   | 2.7e-4               | 6.2e-5                         | 4.8e-5                   | 2.5e-4               | 7.9e-5                         |
| ۰,۷  | 1.0e-4                   | 3.5e-4               | 9.0e-5                         | 4.8e-5                   | 3.2e-4               | 9.6e-5                         |
| ۰,۸  | 9.7e-5                   | 2.9e-4               | 8.2e-5                         | 1.2e-4                   | 2.5e-4               | 1.0e-4                         |
| ۰,۹  | 5.7e-5                   | 2.8e-4               | 1.0e-4                         | 5.2e-5                   | 2.4e-5               | 1.1e-4                         |
| ۱    | 1.0e-4                   | 2.3e-4               | 9.4e-5                         | 5.1e-3                   | 1.9e-4               | 1.1e-4                         |

جدول شماره ۲: نتایج عددی مثال ۱ برای روش توابع پایه کلاهی بهبود یافته

| نقاط | k=20                     |                      |                                  |                          |                      |                                  |
|------|--------------------------|----------------------|----------------------------------|--------------------------|----------------------|----------------------------------|
|      | m=15                     |                      |                                  | m=30                     |                      |                                  |
|      | خطای روش توابع بلاک پالس | خطای روش توابع کلاهی | خطای روش توابع کلاهی بهبود یافته | خطای روش توابع بلاک پالس | خطای روش توابع کلاهی | خطای روش توابع کلاهی بهبود یافته |
| ۰    | 1.6e-5                   | 0                    | 0                                | 4.4e-6                   | 0                    | 0                                |
| ۰,۱  | 1.1e-5                   | 3.0e-7               | 2.5e-6                           | 1.8e-5                   | 1.3e-5               | 9.4e-6                           |
| ۰,۲  | 1.0e-4                   | 3.4e-5               | 2.1e-5                           | 6.7e-5                   | 3.1e-5               | 1.9e-5                           |
| ۰,۳  | 3.1e-5                   | 5.6e-5               | 2.2e-5                           | 9.2e-6                   | 7.3e-5               | 3.0e-5                           |
| ۰,۴  | 1.1e-4                   | 1.2e-4               | 4.3e-5                           | 7.1e-5                   | 1.1e-4               | 4.1e-5                           |
| ۰,۵  | 5.3e-5                   | 1.5e-4               | 5.1e-5                           | 9.1e-5                   | 1.5e-4               | 5.3e-5                           |
| ۰,۶  | 8.3e-5                   | 2.2e-4               | 6.5e-5                           | 9.4e-5                   | 2.1e-4               | 6.3e-5                           |
| ۰,۷  | 7.5e-5                   | 2.2e-4               | 2.7e-5                           | 5.7e-5                   | 2.7e-4               | 7.4e-5                           |
| ۰,۸  | 1.2e-4                   | 2.5e-4               | 8.8e-5                           | 1.1e-4                   | 2.4e-4               | 8.7e-5                           |
| ۰,۹  | 9.7e-5                   | 1.9e-4               | 5.5e-5                           | 4.9e-5                   | 2.4e-4               | 9.8e-5                           |
| ۱    | 1.0e-4                   | 2.2e-4               | 1.0e-4                           | 7.3e-5                   | 2.0e-4               | 1.0e-4                           |

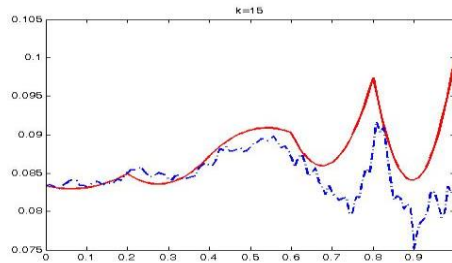
مثال ۲: فرض کنید

$$X(t) = X_0 + \int_0^t r(s)X(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \alpha_j(s)X(s)dB_j(s),$$

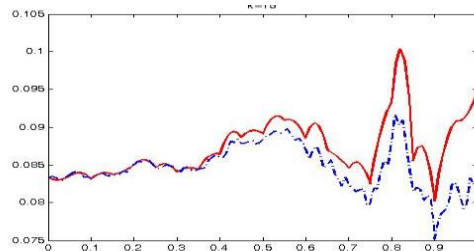
و  $s, t \in [0,1]$ ، معادله انتگرال ایتو ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی باشد. جواب دقیق این معادله برابر با

$$X(t) = X_0 e^{\left(\int_0^t r(s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2(s) ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \alpha_j(s) dB_j(s)\right)}$$

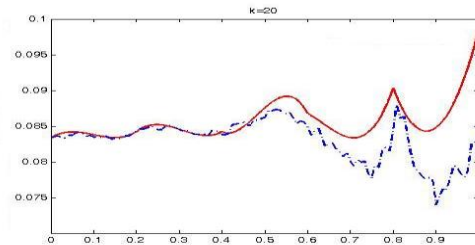
است که در آن  $X$  فرآیند تصادفی تعریف شده بر روی فضای احتمال  $(\Omega, F, P)$  بوده و  $B_j(t)$  و  $j = 1, 2, \dots, n$  فرآیندهای حرکت براونی هستند. خطای عددی موجود در این مثال برای  $X_0 = \frac{1}{12}$  و  $r = \frac{1}{30}$  و  $\alpha_1 = \frac{1}{10}$  و  $\alpha_2(s) = s^2$  و  $\alpha_3(s) = \frac{\sin(s)}{3}$  در جداول ۳ و ۴ آمده است. جدول شماره ۳، خطای روش اول را به ازای  $m = 10$  و  $m = 40$  و جدول شماره ۴، خطای روش دوم را به ازای  $m = 15$  و  $m = 30$  نشان می‌دهد. منظور از  $k$  در هر دو جدول تعداد تکرار بوده و شکل‌های شماره ۵-۸ نمایان‌گر جواب‌های به دست آمده از هر دو روش به ازای تعداد مختلف پایه می‌باشد.



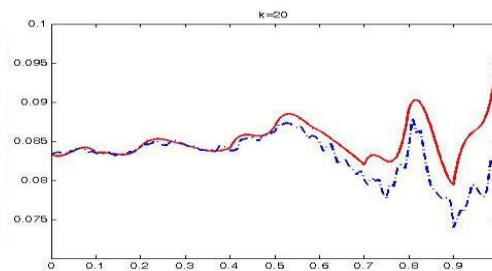
شکل ۵: . . . جواب دقیق و . . . جواب به دست آمده با روش توابع کلاهی اصلاح شده برای مثال دوم و به ازای  $m=10$



شکل ۶: . . . جواب دقیق و . . . جواب بدست آمده با روش توابع کلاهی اصلاح شده برای مثال دوم و به ازای  $m=40$



شکل ۷: . . . جواب دقیق و . . . جواب بدست آمده با روش توابع کلاهی بهبود یافته برای مثال دوم و به ازای  $m=15$



شکل ۸: . . . جواب دقیق و . . . جواب بدست آمده با روش توابع کلاهی بهبود یافته برای مثال دوم و به ازای  $m=30$

جدول شماره ۳: نتایج عددی مثال ۲ برای روش توابع پایه کلاهی اصلاح شده

| نقاط | $k=15$                   |                      |                                |                          |                      |                                |
|------|--------------------------|----------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------|--------------------------------|
|      | $m=10$                   |                      |                                | $m=40$                   |                      |                                |
|      | خطای روش توابع بلاک پالس | خطای روش توابع کلاهی | خطای روش توابع کلاهی اصلاح شده | خطای روش توابع بلاک پالس | خطای روش توابع کلاهی | خطای روش توابع کلاهی اصلاح شده |
| ۰    | 4.3e-4                   | 0                    | 0                              | 1.0e-4                   | 0                    | 0                              |
| ۰,۱  | 7.5e-4                   | 1.2e-4               | 1.8e-4                         | 3.3e-4                   | 1.2e-4               | 1.3e-4                         |
| ۰,۲  | 9.5e-5                   | 3.2e-4               | 1.7e-4                         | 4.1e-4                   | 2.2e-4               | 4.3e-5                         |
| ۰,۳  | 9.5e-4                   | 7.6e-4               | 4.4e-4                         | 3.1e-4                   | 4.7e-4               | 1.0e-4                         |
| ۰,۴  | 3.7e-3                   | 5.6e-3               | 1.2e-3                         | 9.7e-4                   | 2.6e-3               | 5.1e-4                         |
| ۰,۵  | 4.2e-3                   | 3.4e-2               | 2.2e-3                         | 1.6e-3                   | 1.1e-2               | 8.0e-4                         |
| ۰,۶  | 1.1e-3                   | 5.3e-3               | 3.1e-3                         | 8.3e-4                   | 1.5e-1               | 1.4e-3                         |
| ۰,۷  | 1.5e-3                   | 5.7e-2               | 3.9e-3                         | 1.5e-3                   | 3.5e-2               | 2.1e-3                         |
| ۰,۸  | 4.2e-4                   | 6.5e-3               | 9.3e-3                         | 8.2e-3                   | 2.6e-2               | 5.2e-3                         |
| ۰,۹  | 2.4e-2                   | 2.9e-2               | 8.8e-3                         | 1.0e-2                   | 1.0e-2               | 5.0e-3                         |
| ۱    | 1.6e-2                   | 6.9e-2               | 1.6e-2                         | 1.1e-2                   | 6.3e-1               | 1.1e-2                         |

جدول شماره ۴: نتایج عددی مثال ۲ برای روش توابع پایه کلاهی بهبود یافته

| نقاط | $k=20$                         |                         |  |                                |                         |  |
|------|--------------------------------|-------------------------|--|--------------------------------|-------------------------|--|
|      | $m=15$                         |                         |  | $m=30$                         |                         |  |
|      | خطای روش<br>توابع بلاک<br>پالس | خطای روش<br>توابع کلاهی | خطای روش<br>توابع کلاهی<br>بهبود یافته | خطای روش<br>توابع بلاک<br>پالس | خطای روش<br>توابع کلاهی | خطای روش<br>توابع کلاهی<br>بهبود یافته |
| ۰    | 2.6e-5                         | 0                       | 0                                      | 2.5e-4                         | 0                       | 0                                      |
| ۰,۱  | 8.3e-2                         | 4.3e-4                  | 3.3e-4                                 | 6.0e-5                         | 1.2e-4                  | 3.4e-5                                 |
| ۰,۲  | 1.0e-3                         | 4.8e-5                  | 7.5e-5                                 | 4.3e-4                         | 8.0e-5                  | 1.6e-6                                 |
| ۰,۳  | 8.4e-2                         | 6.8e-4                  | 1.1e-4                                 | 1.7e-4                         | 5.6e-4                  | 1.2e-4                                 |
| ۰,۴  | 2.2e-3                         | 2.8e-3                  | 3.9e-4                                 | 7.3e-4                         | 2.0e-3                  | 3.4e-4                                 |
| ۰,۵  | 8.6e-2                         | 1.8e-2                  | 1.3e-3                                 | 2.1e-3                         | 9.3e-3                  | 7.7e-4                                 |
| ۰,۶  | 4.3e-4                         | 1.6e-2                  | 1.8e-3                                 | 1.0e-3                         | 5.9e-2                  | 1.4e-3                                 |
| ۰,۷  | 8.0e-2                         | 4.1e-3                  | 3.3e-3                                 | 3.0e-3                         | 5.5e-2                  | 1.9e-3                                 |
| ۰,۸  | 4.5e-3                         | 1.4e-2                  | 6.1e-3                                 | 7.2e-3                         | 2.1e-2                  | 4.8e-3                                 |
| ۰,۹  | 7.3e-2                         | 2.9e-3                  | 1.0e-2                                 | 1.0e-2                         | 6.3e-3                  | 5.4e-3                                 |
| ۱    | 8.3e-2                         | 6.3e-2                  | 1.4e-2                                 | 8.3e-2                         | 4.0e-2                  | 1.2e-2                                 |

## نتیجه گیری

با توجه به این نکته که جواب دقیقی برای بسیاری از معادلات تصادفی وجود ندارد، لذا یافتن جواب‌های تقریبی با دقت بالا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. استفاده از توابع پایه کلاهی اصلاح شده و بهبود یافته دو روش عددی برای یافتن جواب‌های تقریبی بوده که با توجه به این که بردارها و ماتریس‌های ضرایب و ماتریس‌های عملیاتی دو پایه به سادگی به دست آمده و در محاسبات عددی به کار می‌روند، روش عددی مناسبی جهت یافتن تقریب‌های جواب مسائل به شمار می‌آیند. با توجه به آنالیز خطایی که برای این دو روش بحث شد، توابع کلاهی اصلاح شده دارای خطایی از مرتبه  $o(h^3)$  و توابع کلاهی بهبود یافته دارای خطایی از مرتبه  $o(h^4)$  هستند که هر دو نمایانگر دقت بالای این دو روش است.

## References

1. Kloeden P., Platen E., "Numerical solution of stochastic differential equations", Springer-Verlag, Berlin, 1999.
2. Maleknejad K., Khodabin M, Rostami M., "Numerical solution of stochastic Volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions", Math. Comput. Model., 55 (2012) 791-800.

3. Khodabin M., Maleknejad K., Hosseini Shekarabi F., "Application of triangular functions to numerical solution of stochastic Volterra integral equations", *Int. J. Appl. Math.*, 43 (2013) 1-9.
4. Mirzaee. F, Hamzeh. A, "A computational method for solving nonlinear stochastic Volterra integral equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 306 (2016) 166-178.
5. Ahmadi N., Vahidi A. R., Allahviranloo T., "An efficient approach based on radial basis functions for solving stochastic fractional differential equations", *Math. Sci.*, 11(2) (2017) 113-118.
6. Vahidi A. R., Damercheli T., "A modified ADM for solving systems of linear Fredholm integral equations of the second kind", *Appl. Math. Sci.*, 6(26) (2012) 1267-1273.
7. Platen E., Bruti-Liberati N., "Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance", Springer, 2010.
8. Shen Y., Meng Q., Shi P., "Maximum principle for mean-field jump-diffusion stochastic delay differential equations and its application to finance", *Automatica*, 50 (2014) 1565-1579.
9. Salmi S., Toivanen J., "An iterative method for pricing American options under jump-diffusion models", *Appl. Numer. Math.*, 61 (2011) 821-831.
10. Laurini M. P., Caldeira J. F., "A macro-finance term structure model with multivariate stochastic volatility", *Int. Rev. Econ. Financ.*, (44)(2016) 68-90.
11. Tien Dung N., "A stochastic Ginzburg-Landau equation with impulsive effects", *Physica A* 392 (2013) 1962-1971.
12. Sousedík B., Elman H. C., "Stochastic Galerkin methods for the steady-state Navier-Stokes equations", *J. Comput. Phys.*, 316 (2016) 435-452.

13. Heydari M. H. , Hooshmandasl M. R. , Cattani C. , Maalek Ghaini F. M., “An efficient computational method for solving nonlinear stochastic Ito-integral equations: Application for stochastic problems in physics”, *J. Comput. Phys.*, 283 (2015) 148-168.
14. Jin S., Shu R., “A stochastic asymptotic-preserving scheme for a Kinetic-fluid model for disperse two-phase flows with uncertainty”, *J. Comput. Phys.*, 335 (2017) 905-924.
15. Oroji A., Omar M., Yarahmadian S., “An Ito stochastic differential equations model for the dynamics of the MCF-7 breast cancer cell line treated by radiotherapy”, *J. Theor. Biol.*, 407 (2016) 128-137.
16. Khodabin M. , Maleknejad K. , Rostami M., Nouri M., "Interpolation solution in generalized stochastic exponential population growth model", *Appl. Math. Model.*, 36 (2012) 1023-1033.
17. Khodabin M. , Maleknejad K. , Rostami M. , Nouri M., "Numerical approach for solving stochastic Volterra-Fredholm integral equations by stochastic operational matrix", *Comput. Math. With Appl.*, 64 (2012) 1903-1913.
18. Heydari M. H., Hooshmandasl M. R., Maalek Ghaini F. M., Cattani C., “A computational method for solving stochastic Ito-Volterra integral equations based on stochastic operational matrix for generalized hat basis functions”, *J. Comput. Phys.*, 270 (2014) 402-415.
19. Maleknejad K., Tavassoli Kajani M., “Solving second kind integral equations by Galerkin methods with hybrid Legendre and block pulse functions”, *App. Math. Comput.*, 145 (2003) 623-629.
20. Maleknejad K., Mahmoudi Y., "Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block pulse functions”, *Appl. Math. Comput.*, 149 (2004) 799-806.
21. Mohammadi F., "A wavelet-based computational method for solving stochastic Ito-Volterra integral equations”, *J. Comput. Phys.*, 298 (2015) 254-265.

22. Mohammadi F., "Numerical solution of stochastic Ito-Volterra integral equations using Haar wavelets", *Numer. Math.: Theor. Meth. Appl.*, 9 (2016) 416-431.
23. Mirzaee F., Hadadiyan E., "Approximation solution of nonlinear Stratonovich Volterra integral equations by applying modification of hat functions", *J. Comput. Appl. Math.*, 302 (2016) 272-284.
24. Atkinson K. E., "The numerical solution of integral equations of the second kind", Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
25. Mirzaee F. , Hamzeh A., "A Computational method for solving nonlinear stochastic Volterra integral equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 306 (2016) 166-178.
26. Mirzaee F. , Hadadiyan E., "Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations via modification of hat functions", *Appl. Math. Comput.*, 280 (2016) 110-123.
27. Higham D. J., "An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations", *Siam. Rev.*, 43 (2001) 525-546.