Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2025, Volume 11, Issue 3, pp. 1–17

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

Chebotarev Density Theorem and Geodesic Foliations of Hyperbolic Three–Dimensional Manifolds

Arash Rastegar[1]

Faculty of Mathematics Science, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Received:23 February 2021 Accepted:16 November 2025 Published online: 17 December 2025

Abstract: In this paper, we review the MKR dictionary between prime numbers from algebraic number theory and knots in three–dimensional manifolds. Consider a hyperbolic geodesic foliation on a three–dimensional manifold for which some of the leaves are closed knotted geodesics. We then introduce a notion of height for these knots using the hyperbolic metric, and formulate an analogue of the Chebotarev density theorem for such knots.

Keywords: Prime numbers, Knot theory, Hyperbolic manifold, Analogy.

©2025 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (Arash Rastegar) rastegar1352@gmail.com

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۱—۱۷

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸

شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸

DOI: xxxx

قضیه چگالی چپوتارف و برگ‌بندی‌های ژئودزیک منیفلدهای سه بعدی هذلولوی

آرش رستگار [۱]

دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۲۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۹/۲۶

چکیده: در این مقاله دیکشنری MKR بین اعداد اول از نظریه جبری اعداد و گره در منیفلدهای سه بعدی مرور می‌شوند. یک برگ‌بندی ژئودزیک هذلولوی برای یک منیفلد سه بعدی را که برخی از برگ‌های آن ژئودزیک‌های گره‌خورده بسته هستند در نظر بگیرید. در ادامه مفهومی از ارتفاع را در این گره‌ها با استفاده از متر هذلولوی تعریف و قضیهٔ چگالی چپوتارف را برای این گره‌ها بیان می‌کنیم.

واژه‌هاي كليدي: اعداد اول، نظریه گره ها، خمینه هذلولوی، آنالوژی.

۱. سرآغاز

دیدگاه سه‌بعدی به حلقهٔ اعداد صحیح در میدان‌های اعداد جبری توسط تیت[۲]، آرتین[۳] و وردیر[۴] با تفسیر توپولوژیک نظریهٔ کلاس‌زمینه[۵] معرفی شد. در این فرمول‌بندی، نظریهٔ کلاس کلاسیک که توسط تاکاگی[۶] و آرتین[۷] به‌عنوان یک دوگانگی پوانکاره[۸] در کوهومولوژیِ اتال[۹] طیف حلقهٔ اعداد صحیح یک میدان عددی بازنگری شد[۱].

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(Arash Rastegar) rastegar1352@gmail.com

[2] John Tate
[3] M. Artin
[4] Verdier
[5] Class field theory
[6] Takagi
[7] E. Artin
[8] Poincaré duality
[9] étale cohomology

این همانندی بین گره‌ها و اعداد اول برای اولین بار توسط مازور[۱] و مانین[۲] مطرح شد. کاپرانوف[۳] و رازتیکوف[۴] این همانندی را برای بین میدان‌های اعداد و منیفلدهای سه‌بعدی مورد بررسی قرار دادند و آن را توپولوژی حسابی نام‌گذاری کردند.

در [۲]، [۳] و [۴]، مازور یک قضیهٔ چگالی چپوتارف را برای دنباله‌ای نامتناهی از گره‌های ثابت روی یک منیفلد سه‌بعدی فرموله‌بندی کرد. مک‌مولن[۵][۶] قضیهٔ چگالی چپوتارف فرموله‌بندی‌شده توسط مازور را در چند حالت نشان داد.

این امر ما را به فکر فرمول‌بندی مجدد دیکشنری MKR[۶] برای برگ‌بندی‌های ژئودزیک روی منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی انداخت. منیفلد سه‌بعدی مذکور می‌تواند فشرده نباشد ولی باید با در نظر گرفتن یک دایره در بی‌نهایت فشرده شود. مثالی که در ذهن داریم، یک گره هذلولوی در کرهٔ سه‌بعدی (S^3) و یک برگ‌بندی ژئودزیک روی مکمل آن گره است. این گرهٔ معادلِ میدان اعدادِ گویا و گرهٔ هذلولویِ معادلِ اعدادِ اولِ $\mathbb{Q}$ است. ژئودزیک‌های بسته معادلِ اعدادِ اولِ متناهی هستند که بر اساس مترِ هذلولوی بر حسب طول مرتب شده‌اند. مثال دیگری دال بر این‌که این ژئودزیک‌های بسته می‌توانند نشمارا گره باشند کلافِ دایره به همراه یک مترِ طبیعی است ــ که یک منیفلد هذلولوی است ــ روی یک سطحِ ریمانیِ هذلولویِ بسته است.

در نتیجه یک شارِ جریانِ ژئودزیک داریم که تمامِ ژئودزیک‌های بسته سطحِ ریمانی به کلافِ کره بالاکشی می‌شوند. توجه داریم که این کلافِ دایره روی یک سطحِ ریمانیِ پیچیده شده‌است. همچنین می‌توان منیفلدهایی سه‌بعدی را در نظر گرفت که دورِ یک دایره با تارهای هذلولوی پیچیده شده‌اند.

این فضا را می‌توان به یک مترِ هذلولوی مجهز کرد که روی تارها خمشِ -1 ایجاد کند. اگر این تاربندی با استفاده از دیفئومورفیسمِ شبه‌آتوسوف[۷] تعریف شود؛ ما یک برگ‌بندی داریم که قضیهٔ چگالیِ چپوتارف را ارضا می‌کند. خواهیم دید در این مورد مشابهِ یک خمِ روی میدانِ توابع از بعد یک است.

۲. دیکشنری MKR

انگیزه‌ی ما در مطالعه‌ی توپولوژیِ حسابی از مقاله‌ی توضیحی موریشیتا[۸] [۷] نشأت می‌گیرد. در ادامه، روش [۷] در ارایه‌ی دیکشنری MKR را دنبال خواهیم کرد. یک دایره مشابه یک میدان متناهی $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ است، زیرا دایره از لحاظ هموتوپیک معادل فضای لینزری — مک‌لین[۹] $K(\mathbb{Z},1)$ است. در نتیجه معادل حسابی آن $K(\widehat{\mathbb{Z}},1)$ است. یک پوشش دوری متناهی

$$S^1 = \frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}} \to S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

معادل یک اکستنشن دوری متناهی F_{q^n}/F_q است. در این معادل‌سازی تناظر زیر برقرار است:

$$l \in \pi_1(S^1) = \mathrm{Gal}(\mathbb{R}/S^1),\ l(x) = x+1\ (x \in \mathbb{R}) \ \leftrightarrow$$

[1] B. Mazur
[2] Y. Manin
[3] Kapranov
[4] Reznikov
[5] Curtis McMullen
[6] Mazur–Kapranov–Reznikov
[7] Pseudo-Anosov
[8] Morishita
[9] Eilenberg–MacLane space

$$Fr \in \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q),\ Fr(x) = x^q\ (x \in \overline{\mathbb{F}}_q) \tag{۱.۲}$$

یک همسایگی لوله‌ای[1] $V = S^1 * D^2$ (که در آن D^2 دیسک دو بعدی است) از S^1 با S^1 هم‌ارز هموتوپیک است. V/S^1 هم‌ارز هموتوپیک با چیزی دو بعدی، یعنی S^1 است. از طرفی دیگر، برای یک حلقه‌ی صحیح pـ ادیک $(\mathcal{O}_p)$ با میدان باقیمانده‌ی $\mathbb{F}_q$ و میدان pـ ادیک $\mathbb{K}_p$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p) \overset{\text{هموتوپیک}}{\simeq} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \\ \dfrac{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)}{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p) \leftrightarrow V \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p) \leftrightarrow \partial V \end{array} \right\} \tag{۲.۲}$$

در واقع، ما یک همانندی بین گروه‌های بنیادی آنها به شرح ذیل پیدا کردیم. برای هم‌ریختیِ طبیعی

$$\pi_1(\partial V) \to \pi_1(V) = \pi_1(S^1)$$

داریم: $\pi_1(S^1) = \langle a \rangle$ هسته‌ی آن گروه دوری نامتناهی تولید شده با یک لوپ

$$\alpha = \{a\} * \partial D^2\ (a \in S^1)$$

است که نصف‌النهار نامیده می‌شود. برای $b = \beta$ $(b \in \partial D^2)$ یک عرض نامیده می‌شود. به طور مشابه تصویر معکوس

$$\beta = S^1 * \{b\}\ (b \in \partial D^2)$$

یک عرض نامیده می‌شود. گروه $\pi_1(\partial V)$ یک گروه آبلی آزاد تولیدشده توسط α و β تحت رابطه‌ی $[\alpha, \beta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$ است. از طرف دیگر برای هستای هم‌ریختیِ

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)) \to \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p)) = \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q))$$

را (I_p) گروه اینرسی می‌نامیم و مشابه قبل تصویر معکوسِ σ از $Fr \in \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q))$ نیز (یک توسیع) خودریختی فروبنیوس نام دارد. خارج قسمتِ تام[2] ماکسیمال از I_p که از لحاظ توپولوژیک تولیدشده با یک مونودرومی τ خارج‌قسمت رامِ ماکسیمال $\pi_1^{tame}(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p))$ از $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p))$ است، می‌توان τ و σ را تحت رابطه‌ی $\tau^{q-1}[\tau, \sigma] = 1$ تولید کرد.

جدول ۲-۱

V	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)$
∂V	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p)$
αنصف‌النهار	$\leftrightarrow$	τمونودرومی
βعرض	$\leftrightarrow$	σخودریختی فروبنیوس
$\pi_1(\partial V) = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 \rangle$	$\leftrightarrow$	$\pi_1^{tame}(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p)) = \langle \tau, \sigma \mid \tau^{q-1}[\tau, \sigma] = 1 \rangle$

[1] Tubular neighborhood
[2] tame

گره، یک نشان‌دادنِ یک ژئودزیکِ بسته‌ی S^1 به عنوانِ یک برگ در یک تاربندیِ ژئودزیکِ یک منیفلدِ سه‌بعدیِ هذلولویِ M است. از طرفِ دیگر، برای حلقه‌ی اعدادِ صحیحِ یک میدانِ عددیِ k از درجه‌ی متناهی رویِ $\mathbb{Q}$ این حقیقت که $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$، دارای بعدِ کُوهومولوژیکِ ۳ (در حدِ ۲—تاب) است توسط م. آرتین و وردیر ثابت شد[۱] و نوعی دوگانگیِ پوانکاره‌ی سه‌بعدی در کُوهومولوژیِ اتال بر آن حاکم است.

پس $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ را می‌توان به عنوانِ یک منیفلدِ سه‌بعدی به همراهِ یک برگ‌بندیِ هذلولوی، روی مکملِ لینکی به یک برگ‌بندیِ هذلولوی روی مکملِ یک گره، روی تعدادی از برگ‌های بسته‌ی این برگ‌بندی، نگاه کرد و آن را روی پوششِ شاخه‌دارِ برگشت (Pullback) داد.

$$\begin{aligned} S^3 \text{ منیفلد برگ‌بندی‌شده سه بعدی پیچیده شده روی} \quad &\leftrightarrow \quad \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \\ \ell \subset S^3 \quad &\leftrightarrow \quad p\ (p \neq 0) \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

برای یک ایده‌آل اول $p(\neq 0)$ از $\mathcal{O}_K$ همراه با میدانِ باقیمانده‌ی $\mathbb{F}_p = \mathcal{O}_K/p$ می‌توان نگاشت طبیعی

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$$

را به عنوان یک گره از نقطه نظر (۱.۲) دید:

$$S^1 \text{ گره} \hookrightarrow M \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{PrimeSpec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$$

مطابق قضیه‌ی هرمیت‌ـ مینکوفسکی می‌دانیم $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = 1$ به خصوص با همانندی منتجه، از فرضیه‌ی پوانکاره، $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ به‌علاوه اول نامتناهی، را می‌توان آن به عنوان یک کره‌ی سه‌بعدی استاندارد به همراه یک گره‌ی هذلولوی K_∞ - که نقش اعداد اول نامتناهی را بازی می‌کند‌ـ در نظر گرفت. در این همانندی ایده‌آل اول (p) از $\mathbb{Z}$ که در آن p یک عدد اول است—مانند یک گره در مکمل K_∞ است:

$$S^1 \hookrightarrow (S^3 \setminus K_\infty) \cup K_\infty = S^3 \leftrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$$

در اینجا می‌توان S^3 را به‌عنوان یک فشرده‌سازی $S^3 \setminus K_\infty$ دید. در این فشرده‌سازی ∞ را می‌توان به‌عنوان یک گره هذلولوی و اول بی‌نهایت $\mathbb{Q}$ را به‌عنوان K_∞ دید.

برای یک برگ ژئودزیک K که در یک منیفلد سه‌بعدی بسته M پیچیده شده‌است. X_K- مکمل درون V_K (یک همسایگی لوله‌ای از یک گره K در M) ـ یک منیفلد سه‌بعدی فشرده با مرز ∂V_K است. گروه بنیادی آن

$$G_K := \pi_1(X_K) = \pi_1(M \setminus K)$$

است. گروه G_K «گروه گره» نام دارد. این گروه G_K نشان می‌دهد که K چگونه در M گره خورده‌است. در واقع، ویتن[۱]، گوردن[۲] و لوک[۳] نشان دادند برای گره‌های اول K و L در S^3 داریم:

$$G_K \simeq G_L \iff K \simeq L \quad \text{(در حد جهت روی گره).} \tag{۲.۴}$$

[1] E. Witten
[2] C. Gordon
[3] J. Luecke

نصف‌النهار و عرض در یک گره K به‌معنای دو دور α و β روی

$$\partial X_K = \partial V_K$$

مشابه جدول ۱-۲ هستند. گروه

$$D_K := \pi_1(\partial X_K) = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 \rangle$$

«گروه پیرامونی» (peripheral) گره K نام دارد. در حالت $M = S^3$، گروه G_K دارای نمایش ویرتینگر (Wirtinger representation) است. این امر نشان می‌دهد G_K با مزدوج‌های

$$I_K = \langle \alpha \rangle$$

تولید می‌شود.

از طرفی، با توجه به جدول ۱-۲، میدانp ـ ادیک ، $\mathrm{Spec}(k_p)$ برای یک ایده‌آل اول p از $\mathcal{O}_k$ نقش «مرز»

$$X_p := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus \{p\}$$

را بازی می‌کند و

$$G_{\{p\}} := \pi_1(X_p)$$

نشان می‌دهد که p چگونه در $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ گره خورده‌است. معادل حالتی که برای یک گره داشتیم، $G_{\{p\}}$ را «گروه اولِ p» می‌نامیم. مشابه قبل داریم:

$$G_{\{p\}} \simeq G_{\{q\}} \iff p = q \quad \text{(در حد جهت روی گره)}. \tag{۲.۵}$$

معادلِ گروه پیرامونی D_K، می‌توان گروهِ تجزیه (decomposition group)

$$D_{\{p\}} := \pi_1(\mathrm{Spec}(k_p))$$

را فرض کرد. برای دقت بیشتر همانندی توان خارج‌قسمت رام ماکسیمال این گروه را در نظر گرفت، به‌عنوان یک همانندی از نمایش ویرتینگر، مشاهده می‌کنیم که $G_{\{p\}}$ از لحاظ توپولوژیک با مزدوج‌های گروه اینرسی $I_{\{(p)\}}$ تولید می‌شود:

جدول ۲-۲

$$\partial V_K \subset M \setminus V_K^\circ \qquad \iff \qquad \mathrm{Spec}(k_p) \subset \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus \{p\}$$

$$D_K \to G_K \text{ گروه پیرامونی} \qquad \iff \qquad D_{\{p\}} \to G_{\{p\}} \text{ گروه تجزیه}$$

برای یک میدان عددی k و یک مجموعهٔ متناهی S از ایده‌آل‌های اول، گروه بنیادی اِتَال

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k \setminus S))$$

که همان گروه گالوا

$$G_S = \mathrm{Gal}(k_S/k)$$

توسّع ماکسیمال k_S روی k که خارج از S بدون انشعاب (unramified) است، مجموعهٔ گره‌های نامتناهی را نیز می‌توان به‌عنوان گروه لینک دید:

$$\text{گروه لینک}\, G_L = \pi_1(M \setminus S) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{گروه گالوا}\, G_S = \mathrm{Gal}(k_S/k)$$

مفهوم گروه گالوا در حالت کلی یک مفهوم جامع است. اینکه آیا $G_{\{(p)\}}$ با تولید متناهی است یا خیر مشخص نیست.

با ارجاع به مقاله‌ی موریشیتا، می‌توانیم یک منیفلد هذلولویِ پیچیده‌شده حولِ S^1 را به‌عنوان یک خمِ جبریِ C حولِ یک میدانِ متناهی $\mathbb{F}_q$ در نظر بگیریم. این کار را می‌توان با دنباله‌ی دقیقِ زیر انجام داد:

$$1 \longrightarrow \pi_1(C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) \longrightarrow 1,$$

و می‌توان C را از لحاظ هموتوپیک به شکل یک کلاف سطح روی "دایره" $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ به‌همراهِ تارِ $C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ دید.

۳. دیکشنری بین اعداد اتصال و سمبل‌های لژاندر

مبانی نظریه‌ی گره و نظریه‌ی جبری اعداد را می‌توان در مقالات گاوس در مورد اعداد اتصال [۸] و باقی‌مانده‌های مربعی[1] [۹] یافت. وقتی این دو مفهوم را از دیدگاه همانندیِ بخشِ قبل نگاه می‌کنیم، شباهت نزدیکی بین آن‌ها می‌بینیم.

یک راه برای یافتن اعداد اتصال این است که آن‌ها را مانند یک مونودرومی نگاه کنیم؛ برای رفع مشکل نامشخص بودنِ علامتِ عددِ اتصال، که در اثر جهت به‌وجود می‌آید، اعداد اتصال را به پیمانه‌ی ۲ نگاه می‌کنیم. فرض کنید $K \cup L$ یک لینکِ دارای دو مؤلفه است. این لینک را می‌توان به‌عنوان اجتماعِ دو برگ در $S^3 \setminus K_\infty$ در نظر گرفت. اگر پوششِ یکتای دوتاییِ بدون انشعاب

$$Y_K \longrightarrow X_K := S^3 \setminus K$$

را در نظر بگیریم، می‌توان باقی‌مانده‌ی عدد اتصال $\mathrm{lk}(K, L)$ بر ۲ را به‌عنوان تبدیلِ پوششیِ مشخص‌شونده با عرضِ β_L حولِ L توصیف کرد:

$$\pi_1(X_K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(Y_K/X_K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad [\beta_L] \longmapsto \mathrm{lk}(K, L) \bmod 2.$$

روش دیگر برای رسیدن به مفهوم عدد اتصال استفاده از عدد تقاطع (Intersection number) K به‌همراهِ سطح سیفرت Σ (Seifert surface) از L، یعنی $\partial\Sigma = L$ است. برای مثال، می‌توان عدد اتصال را به‌عنوان ضرب فنجانی

[1] Quadratic residues

(Cup product) کلاس‌های کوهُمولوژی K و Σ برای

$$X_L := S^3 \setminus L$$

و Σ در نظر گرفت:

$$H_c^2(X_L, \mathbb{F}_2) \times H^1(X_L, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup} H_c^3(X_L, \mathbb{F}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$([K], [\Sigma]) \longmapsto [K] \cup [\Sigma] = \mathrm{lk}(K, L) \bmod 2.$$

از طرفی دیگر، فرض کنید p و q دو عددِ اولِ فردِ متمایز هستند. توسعه‌ی مربعی $\mathbb{Q}(\sqrt{p})/\mathbb{Q}$ روی p منشعب می‌شود اگر و تنها اگر باقی‌مانده‌ی p بر ۴ برابر با یک باشد. فرض کنید باقی‌مانده‌ی p و q بر ۴ برابر با یک است. مشابهِ قبل،

$$Y_p \longrightarrow X_p := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{(p)\} = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}[1/p]\big)$$

پوشش دوتایی اتال یکتا باشد که در آن Y_p طیفِ نرمال‌سازیِ $\mathbb{Z}[1/p]$ در $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ باشد. با توجه به جدول (۲.۲)، می‌توانیم باقی‌مانده‌ی اعدادِ اتصالِ p و q، که ما آن را $\mathrm{lk}_2(p, q)$ می‌نامیم، با استفاده از کلاسِ تزویجِ خودریختی فروبنیوس روی q در

$$\mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

تعریف کرد:

$$\pi_1(X_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$[\sigma_q] \longmapsto \mathrm{lk}_2(p, q)$$

چون $\sigma_q|_{Y_p} = \mathrm{id}_{Y_p} \iff \sigma_q(\sqrt{p}) = \sqrt{p} \iff p$ که در آن p یک باقی‌مانده‌ی مربعی به پیمانه‌ی q است، داریم:

$$(-1)^{\mathrm{lk}_2(p,q)} = \left(\frac{p}{q}\right). \tag{۱.۳}$$

مشابه حالتی که در لینک داشتیم، سمبل لژاندر نیز به عنوان عدد تقاطع دیده می‌شود. اولاً، ایده‌آلِ اول (q) را به عنوان دوگان یک «نصف‌النهار» حول (q) در نظر می‌گیریم. عبارت دیگر، مشخصه‌ی کومر (Kummer character) که به صورت

$$\chi_q : \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_q(\sqrt{q})/\mathbb{Q}_q\big), \qquad \frac{\tau(\sqrt{q})}{\sqrt{q}} = (-1)^{\chi_q(\tau)}$$

تعریف می‌شود. برای

$$X_q := \mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}[1/q]\big)$$

نگاشتِ مرز

$$\partial : H^1(X_q, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\sim} H_q^2\big(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_q), \mathbb{F}_2\big) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q(\sqrt{q})/\mathbb{Q}_q), \mathbb{F}_2\big)$$

را در نظر بگیرید و کلاسِ یک «سطح سیفرت» از (q) را به صورت

$$\partial([\Sigma]) = \chi_q, \text{ به طوری که } [\Sigma] \in H^1(X_q, \mathbb{F}_2)$$

تعریف می‌کنیم. از طرفی دیگر، می‌توان یک «گره» را از طریق (p) که

$$p \in \mathbb{Q}_q^\times/(\mathbb{Q}_q^\times)^2 = H^1(\mathbb{Q}_q, \mathbb{F}_2)$$

شناسایی کرد و کلاس

$$[(p)] \in H_c^2(X_q, \mathbb{F}_2)$$

را از طریق تصویر آن تحت نگاشت $H^1(\mathbb{Q}_q, \mathbb{F}_2) \to H_c^2(X_q, \mathbb{F}_2)$ تعریف کرد. در این تعریف H_c^* نماینده‌ی یک کوهُمولوژی اِتَال با محمل فشرده است که اول نامتناهی در آن وارد بازی شده است. در حالت لینک، می‌توان عدد اتصال در باقی‌مانده‌ی ۲ را به صورت ضرب فنجانی

$$[\Sigma] \cup [(p)]$$

تعریف کرد:

$$H_c^2(X_q, \mathbb{F}_2) \times H^1(X_q, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup} H_c^3(X_q, \mathbb{F}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$([(p)], [\Sigma]) \longmapsto [(p)] \cup [\Sigma] = \mathrm{lk}_2(K, L).$$

از این رابطه مجدداً می‌توان رابطه‌ی (۳.۱) را نتیجه گرفت (رجوع کنید به [۱۰]). در نتیجه، سمبل لژاندر چیزی جز عددِ اتصال به پیمانه‌ی ۲ نیست. قانون وارونگی گاوس نیز تبدیل به تقارن اعداد اتصال می‌شود:

سمبل لژاندر $\iff$ اعداد اتصال

$$\mathrm{lk}(K, L) = \mathrm{lk}(L, K) \qquad \iff \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \quad (p, q \equiv 1 \pmod 4). \tag{۲.۳}$$

در بین تمام اثبات‌هایی که گاوس برای قانون وارونگی مربعی ارائه کرد، روشی برای نمایش سمبل لژاندر با استفاده از جمع گاوسی وجود دارد:

$$\left(\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta^{x^2}\right)^{q-1} = \left(\frac{p}{q}\right), \tag{۳.۳}$$

که در آن ζ یک pاُمین ریشه‌ی واحدِ اولیه در $\overline{\mathbb{F}}_q$ است. توجه داریم که جمع گاوسی $\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta^{x^2}$ روی $\mathbb{F}_p$معادلِ انتگرال گاوسی $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ است. از طرف دیگر، گاوس عبارت انتگرالی زیر در مورد عدد اتصال را در مطالعات

الکترومغناطیسی خود نشان داد [۸]:

$$\int_{x\in K}\int_{y\in L}\omega(x-y)=\mathrm{lk}(K,L).$$

که در آن

$$\omega=\big(4\pi\|x\|^3\big)^{-1}\big(x_1\,dx_2\wedge dx_3+x_2\,dx_3\wedge dx_1+x_3\,dx_1\wedge dx_2\big).$$

در حالت نظریه گیج (gauge theory) [۱۱] می‌نویسیم. در واقع برای یک لینک فریم‌دار داریم:

$$\int_{A(\mathbb{R}^3)}\exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}a\wedge da+\sqrt{-1}\int_{K_1}a+\sqrt{-1}\int_{K_2}a\Big)\,Da=\exp\Big(\pi\sqrt{-1}\sum_{1\le i,j\le 2}\mathrm{lk}(K_i,K_j)\Big). \tag{۳.۴}$$

در اینجا انتگرال سمت چپ انتگرال فینمن[1] روی فضای $A(\mathbb{R}^3)$ از ۱ـ فرم‌های دیفرانسیل با مقدار حقیقی روی $\mathbb{R}^3$ است. چون انتگرال‌های $\int_{\mathbb{R}^3}a\wedge da$ و $\int_{K_1}a$ به‌ترتیب فرم خطی و فرم مربعی روی $A(\mathbb{R}^3)$ هستند، رابطه‌ی (۴.۳) معادل بی‌نهایت‌بعدی انتگرال گاوس است. در نتیجه بین (۳.۳) و (۴.۳) یک همانندی داریم.

۴. همانندی بین گروه گالوا و گروه لینک

همان‌طور که در بخش ۱ گفته شد، ایده‌ی ما همانند دانستن گروه گالوا

$$G_S=\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\setminus S)\qquad S=\{(p_1),\dots,(p_n)\}$$

و گروه لینک

$$G_L=\pi_1(S^3\setminus L),\quad L=K_1\cup\ldots\cup K_n$$

است. چون گروه G_S گروه بزرگی است فقط خارج‌قسمتِ pro-ℓ آن $G_S(\ell)$ را برای عدد اولِ ℓ در نظر می‌گیریم. با مراجعه به تحقیقات سِفرویک[2] و کوچ[3] می‌توان درک بهتری از توسعه‌های pro-ℓ میدان‌های عددی به‌دست آورد [۱۲]. در واقع، ما یک همانندی بین یک قضیه از کوچ روی $G_S(\ell)$ و یک قضیه از جان میلنور روی G_L به‌دست آوردیم. در ادامه منظور از

$$\{G^{(d)}\}_{d\ge 1}$$

سری مرکزیِ پایینیِ یک گروه توپولوژیک G است. این سری به‌صورت

$$G^{(1)}:=G,\qquad G^{(d+1)}:=[G^{(d)},G]$$

تعریف می‌شود که در آن منظور از کروشه، زیرگروهِ بسته‌ای است که از لحاظ توپولوژیک توسط

$$[a,b],\qquad a\in G^{(d)},\ b\in G$$

[1] R. Feynman
[2] I. Safarevich
[3] H. Koch

تولید شده است.

اگر

$$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$$

یک لینکِ دارای n مؤلفه در S^3 و G_L گروه لینکِ آن باشد، چِن [1] و میلنور[2] اطلاعات زیر را در مورد نمایش خارج‌قسمت پوچ‌توان G_L به‌دست آوردند.

قضیه ۱.۴ [۲۳]. اگر F یک گروه آزاد تولیدشده توسط

$$x_1, \ldots, x_n$$

باشد، برای هر $d \geq 1$ یک کلمه‌ی

$$y_i^{(d)}$$

از $x_1, \ldots, x_n$ موجود است که:

$$y_i^{(d)} \equiv y_i^{(d+1)} \pmod{F^{(d)}} \qquad (1 \leq i \leq n),$$

و

$$G_L/G_L^{(d)} = \langle x_1, \ldots, x_n \mid [x_i, y_i^{(d)}] = 1 \ (1 \leq i \leq n),\ F^{(d)} = 1 \rangle.$$

در اینجا $x_1, \ldots, x_n$ یک پایه برای گروه آزادِ F است. در این پایه، نمایانگرِ یک نصف‌النهار α_i از K_i و $y_i^{(d)}$ یک کلمه در F است که تصویر عرض β_i از K_i را در $G_L/G_L^{(d)}$ نمایش می‌دهد. در ضمن رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\beta_j \equiv \prod_{i \neq j} \alpha_i^{\mathrm{lk}(K_i, K_j)} \pmod{G_L^{(2)}}.$$

قضیه‌ی ۱.۴ میلنور قابل تعمیم برای هر لینک در هر هومولوژی کرویِ ۳ بعدی است [۱۴]. قضیه‌ای که در ادامه مطرح می‌کنیم به ما می‌گوید که هر لینک پس از کامل‌سازی pro-ℓ از گروه لینک، که در آن ℓ یک عدد اول است، در یک هومولوژی کرویِ ۳ بعدی مانند یک لینک تافته (braid) خالص است.

قضیه‌ی ۲.۴ [۱۵]. اگر

$$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$$

یک لینکِ دارای n مؤلفه در یک هومولوژی کرویِ ۳ بعدی M باشد، به ازای عدد اول ℓ، $\hat{G}_L(M)$ را کامل‌سازی pro-ℓ گروه لینکِ آن را فرض کنید. آنگاه گروهِ pro-ℓ مربوط به $\widehat{G}_L(M)$ دارای نمایشِ زیر است:

$$\widehat{G}_L(M) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid [x_1, y_1] = \cdots = [x_n, y_n] = 1 \rangle,$$

که در آن x_i یک نصف‌النهار از K_i و y_i کلمه‌ای است که عرض K_i را در pro-ℓ نمایش می‌دهد.

با اعمال روش آنیک[3] [۱۶] به قضیه‌ی ۲.۴ می‌توان به قضیه‌ی ۳.۴ (ترجمه‌ی pro-ℓ فرضیه‌ای از موراسوگی [۱۷، ۱۸]) که در مورد ساختار سری‌های مرکزی پایینی از گروه $\widehat{G}_L(M = S^3)$ است رسید. فرض کنید $D_L(\ell)$

[1] K.T. Chen
[2] J. Milnor
[3] D. Anick

یک دیاگرام اتصال به پیمانه‌ی ℓ باشد، به عبارت دیگر، گرافی باشد که رأس‌های آن مؤلفه‌های L، به‌همراه دو رأس K_i و K_j باشد که این رأس وقتی به هم متصلند که $\mathrm{lk}(K_i, K_j) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ به پیمانه‌ی ℓ باشد.

قضیه‌ی ۳.۴ [۱۵]. اگر گراف $D_L(\ell)$ همبند باشد آنگاه $\widehat{G}_L^{(d)}/\widehat{G}_L^{(d+1)}$ یک $\mathbb{Z}_\ell$ـ مدول آزاد است که $\mathbb{Z}_\ell$ـ رتبه‌ی آن a_d در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\prod_{d\geq 1}(1-t^d)^{a_d} = (1-t)(1-(n-1)t).$$

به‌خصوص همریختی

$$\widehat{G}_L^{(d)}/\widehat{G}_L^{(d+1)} \simeq \widehat{F}_1^{(d)}/\widehat{F}_1^{(d+1)} \times \widehat{F}_{n-1}^{(d)}/\widehat{F}_{n-1}^{(d+1)}$$

را برای هر $d \geq 1$ داریم که در آن $\widehat{F}_r$ گروهِ pro-ℓ از رتبه‌ی r است.

از طرف دیگر، برای یک عددِ اول ℓ، فرض کنید $S = \{(p_1), \ldots, (p_n)\}$ یک مجموعه‌ی متناهی شامل n عددِ اول باشد، به‌طوری‌که $p_i \equiv 1$ برای هر i به پیمانه‌ی ℓ باشد. اگر $G_S(\ell)$ نماد یک خارج‌قسمت pro-ℓ ماکسیمال از $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus S)$ باشد، به عبارت دیگر،

$$G_S(\ell) = \mathrm{Gal}(Q_S(\ell)/\mathbb{Q}),$$

که در آن $Q_S(\ell)$ خارج‌قسمت pro-ℓ ماکسیمال بدون انشعاب روی $\mathbb{Q}$ است. کوچ قضیه‌ی ۴.۴ را در مورد $G_S(\ell)$ اثبات کرد.

قضیه‌ی ۴.۴ [۱۲، ۱۹]. گروهِ pro-ℓ $G_S(\ell)$ نمایشِ زیر را دارد:

$$G_S(\ell) = \left\langle x_1, \ldots, x_n \,\middle|\, x_i^{p_i-1}[x_i, y_i] = 1 \ (1 \leq i \leq n) \right\rangle$$

که در آن x_i مونودرومی τ_i روی p_i و y_i یک توسعه‌ی از خودریختیِ فروبنیوس σ_i روی p_i را نمایش می‌دهد. عدد اتصال

$$\mathrm{lk}_\ell(p_i, p_j) \in \mathbb{F}_\ell$$

به پیمانه‌ی ℓ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\sigma_j \equiv \prod_{i\neq j} \tau_i^{\mathrm{lk}_\ell(p_ip_j)} \pmod{G_S(\ell)^{(2)}}, \qquad \zeta_\ell^{\mathrm{lk}_\ell(p_ip_j)} = \left(\frac{p_j}{p_i}\right)_\ell,$$

که در آن ζ_ℓ یک ریشه‌ی ℓامِ واحدِ اول است که به‌طور مناسب انتخاب شده‌است و $\left(\frac{p_j}{p_i}\right)_\ell$ ℓامین توانِ سمبلِ باقی‌مانده در $\mathbb{Q}_{p_i}$ است. همانندی بین قضیه‌ی ۴.۴ با قضیه‌ی ۱.۴ و ۲.۴ واضح است و همانندی بین اعداد اتصال و سمبل باقی‌مانده‌ی توان را از دید نظریه‌ی گروه تشریح می‌کند. عبارت‌های

$$x_i^{p_i-1}[x_i, y_i] = 1, \qquad [x_i, y_i] = 1$$

که در این نمایش ظاهر شده‌اند نیز به‌ترتیب از آن‌چه در جدول ۲.۲ گفته شد یعنی گروه بنیادی موضعی $\pi_1(\partial V_{K_i})$ (V_{K_i} همسایگی لوله‌ای K_i است) و $\pi_1^{\mathrm{tame}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_{p_i}))$ می‌آیند. به‌علاوه قضیه‌ی میلنور برای هر لینک در هر هومولوژی سه‌بُعدی قابل تعمیم است. قضیه‌ی کوچ نیز قابل تعمیم به یک مجموعه‌ی متناهی از اعدادِ اول در یک

میدان عددی است. فرض کنید k یک میدان عددی شامل یک ریشه‌ی واحدِ اولِ ℓام، و

$$S = \{p_1, \dots, p_n\}$$

یک مجموعه‌ی متناهی از عددِ اولِ متمایز باشد، به‌طوری‌که

$$N_{p_i} := \#(\mathcal{O}_k/p_i) \equiv 1 \quad (mod\, \ell) \quad \text{for each i}$$

و

$$B_S := \{\, \alpha \in k^\times \mid (\alpha) = \mathfrak{a}^\ell \ (\exists\, \mathfrak{a} : \ \text{of ideal} k),\ \alpha \in (k_{\mathfrak{p}_i}^\times)^\ell \,\}$$

قضیه‌ی ۵.۴ [۱۲]: فرض کنید k شامل یک ریشه‌ی ℓامِ واحدِ اولیه باشد، $B_S = 1$ و عددِ کلاسِ k نسبت به ℓ اول باشد. آنگاه خارج‌قسمتِ pro-ℓ ماکسیمالِ $G_S(k)(\ell)$ از $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k))$ نمایشِ زیر را دارد:

$$G_S(k)(\ell) = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_1^{N_{\mathfrak{p}_1}-1}[x_1, y_1] = \dots = x_n^{N_{\mathfrak{p}_n}-1}[x_n, y_n] = 1 \rangle,$$

که در آن x_i یک مونودرومی τ_i روی $\mathfrak{p}_i$ و y_i یک توسعِ خودریختیِ فروبنیوس σ_i روی $\mathfrak{p}_i$ را نمایش می‌دهد. یافتنِ معادلِ فرضیه‌ی موراسوگی برای گروه گالوا $G_S(\ell)$ یک مسأله‌ی ظریف‌تر است. در واقع، نمی‌می‌توان انتظارِ وجودِ یک همانندی برای اول‌ها در حالت $\ell > 2$ را داشت. زیرا عددِ اتصال $\mathrm{lk}_\ell(p_i, p_j)$ متقارن نیست. با این وجود، لابوت[1] قضیه‌ی ۶.۴ را روی سری‌های مرکزیِ ℓـ پایینی $\{G_S(\ell)_d\}$ از $G_S(\ell)$ ثابت کرده است که به شکلِ

$$G_S(\ell)_1 := G_S, \qquad G_S(\ell)_{d+1} := \big(G_S(\ell)_d\big)^\ell [G_S(\ell)_d, G_S]$$

است. گرافِ اتصالِ $D_S(\ell)$ از S به پیمانه‌ی ℓ با استفاده از گرافی تعریف می‌شود که رأس‌های آن اول‌های S باشد و دو رأسِ (p_i) و (p_j) در صورتی به هم متصلند که $\mathrm{lk}_\ell(p_i, p_j) \neq 0$.

قضیه‌ی ۶.۴ [۲۰]: فرض کنید $\ell > 2$ و قرار دهید $a_d = \dim_{\mathbb{F}_\ell} G_S(\ell)_d/G_S(\ell)_{d+1}$ برای $d \geq 1$. فرض کنید شرایط زیر در مورد گرافِ $D_S(\ell)$ برقرار باشد:

۱. رأس‌های $p_1, p_2, \dots, p_n$ یک دور $p_1p_2 \dots p_np_1$ تشکیل دهند.

۲. اگر i, j هر دو فرد باشند، آنگاه p_ip_j یک یالِ $D_S(p)$ نیست.

۳. $l_{12}l_{23} \dots l_{n-1,n}l_{n,1} \neq l_{1,n}l_{2,1} \dots l_{n,n-1}$، برای

$$l_{ij} := \mathrm{lk}_\ell(p_i, p_j),$$

برقرار باشد.

در آن صورت رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\prod_{d \geq 1} (1 - t^d)^{a_d} = (1 - t)(1 - nt + nt^2).$$

[1] J. Labute

برای حالت‌های $p = 2$ و $p_i \equiv 1 \pmod 4$ چون عددِ اتصال به پیمانه‌ی ۲ متقارن است انتظار وجود یک همانندِ فرضیه‌ی موراسوگی[1] را برای پالایشِ زاسنهاوس[2] $G_S(2)$ داریم، اما نتیجه‌ای به این شکل هنوز برای $D_S(2)$ وجود ندارد. برای مطالعه‌ی عدد اتصال روی $G_S(\ell)$ از روی $D_S(\ell)$ مراجعه کنید به [۲۱].

۵. فرمول‌بندیِ مجدد دیکشنری MKR

در ابتدا، می‌خواهیم دیکشنری همانندی ابتدایی بین منیفلدهای سه‌بعدی و حلقه‌های عددی را مجدداً فرمول‌بندی کنیم [۳، ۴، ۲۲، ۲۳]. هدف از این کار به‌دست آوردن دیکشنری بین پوشش‌های منیفلدهای سه‌بعدی برگ‌بندی‌شده و توسعه‌یافته‌ی میدان‌های عددی است.

$(M \setminus \{K_i\}_i) \cup \{K_i\}_i$ برگ‌بندی ژئودزیک روی هذلولی	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \cup \{v \mid \infty\}$
$(S^3 \setminus K_0) \cup K_0$ برگ‌بندی ژئودزیک روی هذلولی	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$
برگ ژئودزیک بسته K	$\leftrightarrow$	$\mathfrak{p}$ اول
اجتماع برگ‌های بسته $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$	$\leftrightarrow$	مجموعه اولها $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$
همسایگی لوله‌ای V_K	$\leftrightarrow$	حلقه صحیح $\mathfrak{p}$ـ ادیک $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$
مرز ∂V_K	$\leftrightarrow$	میدان $\mathfrak{p}$ـ ادیک $\mathrm{Spec}(k_{\mathfrak{p}})$
$C_2(M) \to C_1(M);\ \Sigma \mapsto \partial\Sigma$	$\leftrightarrow$	$k^\times \to I_k = \bigoplus_p (a)$
$H_1(M)$	$\leftrightarrow$	H_k
$H_2(M)$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{O}_k^\times$
$\pi_1(M \setminus \{K_i\}_i)$	$\leftrightarrow$	$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k))$
$\pi_1(M \setminus L)$	$\leftrightarrow$	$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus S)$
یکریختی هورویکز (Hurewicz isomorphism)	$\leftrightarrow$	نظریه کلاس پایه بدون انشعاب
$H_1(M) \cong \mathrm{Gal}(M^a/M)$	$\leftrightarrow$	$H_k \cong \mathrm{Gal}(k^a/k)$
M^a پوشش آبی ماکسیمال M	$\leftrightarrow$	k^a کلاس پایه هیلبرت k

مطابق قضیهٔ الکساندر، هر منیفلد ۳ بعدی بسته، همبند و جهت‌پذیر به شکل یک پوشش متناهی S^3 با انشعاب یک لینک است. دقیقاً مانند یک میدان عددی که یک توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$ با انشعاب تعداد متناهی عدد اول است. در نتیجه، انتظار داریم که یک همانندی مفهومی بین پوشش‌های منیفلدهای ۳ بعدی و توسیع‌های میدان‌های عددی باشد.

در ادامه با اتکا به دیکشنری مذکور، در مورد همانندی نظریه هیلبرت در بحث توپولوژی منیفلدهای ۳ بعدی می‌خواهیم بپردازیم. نظریه هیلبرت ساختار تجزیه‌ای یک عدد اول در یک توسیع میدان‌های عددی را مورد بحث قرار می‌دهد. مشابهًا، یک همانندی توپولوژیک نظریه هیلبرت، که ساختار تجزیه‌ای یک گره را در پوشش یک منیفلد ۳

[1] Murasugi conjecture
[2] Zassenahus filtration

بعدی بیان می‌کند، وجود دارد.

اگر $f : N \to M$ یک پوشش برای یک منیفلد ۳ بعدی بسته از درجه متناهی n باشد که روی لینک L منشعب شده‌است، می‌توان فرض کرد که یک لینک هذلولوی روی M و یک متر هذلولوی به همراه یک برگ‌بندی ژئودزیک روی مکمل آن وجود دارد. همین ساختار را می‌توان روی N القا کرد. فرض کنید L اجتماعِ از برگ‌ها و K یک برگ گره هذلولوی در M باشد که یک مؤلفه از L یا کاملا مجزا از آن باشد. اگر $f^{-1}(K) = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ یک لینک داری $r = r(K)$ مولفه باشد. فرض کنید V_K یک همسایگی لوله‌ای از K و V_i یک مولفه همبندی از $f^{-1}(V_K)$ باشد که شامل K_i است. اگر K_i شامل $f^{-1}(V_K)$ باشد، V_i یک مؤلفه همسایگی لوله‌ای از K_i است، با در نظر گرفتن $b \in \partial V_K$ به‌عنوان نقطه پایه و $f^{-1}(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ و همچنین نمایش مونودرومی

$$\psi : G_L = \pi_1(M \setminus L, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(f^{-1}(b)).$$

پوشش متناهی $g : \bar{N} \to N$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $fog : \bar{N} \to M$ یک پوشش گالوا منشعب‌شونده روی L باشد. با فرض $G = \mathrm{Gal}(N/M), H = \mathrm{Gal}(N/N)$، ψ روی G فاکتورگیری می‌شود و از طریق نمایش جایگشتی G روی $H\backslash G = \{H\sigma_1, ..., H\sigma_n\}$ شناسایی می‌شود. برای یک گره $\bar{K}$ در $\bar{N}$ روی K، گروه تجزیه‌ی $\bar{K}$ را تعریف کرد:

$$D(\bar{K}) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\bar{K}) = \bar{K}\}.$$

هر $\sigma \in D(\overline{K})$ یک تبدیل پوششی از $\overline{K}$ به K القا می‌کند. در ضمن همریختی

$$D(\bar{K}) \ni \sigma \mapsto \sigma|_{\overline{K}} \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

را نیز داریم. گروه اینرسی $\overline{K}$ به صورت زیر است:

$$I(\overline{K}) := \{\sigma \in D(\overline{K}) \mid \sigma|_{\overline{K}} = id_{\overline{K}}\}.$$

برای انتخاب دیگری از $\overline{K}$ روی K، $I(\overline{K})$ و $G(\overline{K})$ در حد مزدوج شدن تغییر می‌کنند. مجموعهٔ مدارهای O_j از $f^{-1}(b)$ تحت عمل $D(\overline{K})$ از طریق ψ را می‌توان از مجموعهٔ گره‌های K_i شناسایی کرد:

$$f^{-1}(b)/D(\overline{K}) \simeq \{K_1, \ldots, K_r\}, \qquad \psi(D(\overline{K}))(b_j) \mapsto q(\sigma_j(\overline{K})).$$

از لحاظ هندسی، مدار O_j مربوط به K_j با مجموعه‌ای از b_iها که $b_i \in \partial V_j$ باشند مشخص شده‌اند. اگر $f(K_j)$ درجهٔ پوششی K_j روی K باشد و شاخص انشعاب $e(K_j)$ مربوط به K_j را به صورت $(\#O_j/f(K_j))$ تعریف کنیم، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n = \sum_{j=1}^{r} e(K_j)\, f(K_j).$$

برای یک پوشش گالوا $f : N \to M$ به همراه گروه گالوا G، شاخص‌های انشعاب و درجه‌های پوشش مستقل از K_j ها بوده‌اند و به ترتیب برابر با $e(k)$ و $f(k)$ هستند.

قضیهٔ ۱.۵ ([۲۴]): اگر $f : N \to M$ یک پوشش گالوا باشد، دنباله‌ی دقیق کوتاه زیر را داریم:

$$1 \to I(K_j) \to D(K_j) \to \mathrm{Gal}(K_j/K) \to 1,$$

که با تغییرات زیر مشابه تعاریف ما می‌شود:

$$\#I(K_j) = e(K), \qquad \#D(K_j) = e(K)f(K), \qquad n = e(K)f(K)r(K).$$

حال فرض کنید $\pi_1(M \setminus L)$ به طور نرمال با نصف‌النهارهای مؤلفه‌های L تولید شده‌است. این شرط وقتی برقرار است که M یک همولوژی کره‌ی ۳ بعدی (نمایش ویرتینگر) باشد. در آن صورت همانندی زیر را در مورد قضیه‌ی تصاعد عددی داریم:

قضیه ۵.۲ ([۲۴]): برای هر کلاس ازدواج C از $\mathrm{Gal}(N/M)$، تعداد نامتناهی از گره‌ها K (در حد ایزوتوپی محیطی) در $M \setminus L$ وجود دارد. در نتیجه، کلاس ازدواج تصویر K در $\mathrm{Gal}(N/M)$ تحت نگاشت

$$\pi_1(M \setminus L) \to \mathrm{Gal}(N/M)$$

برابر با C است.

مک‌مولن نسخهٔ زیر از قضیه‌ی چوتارف را اثبات کرده‌است:

قضیه ۵.۳ ([۶]): گره‌های K در $M \setminus L$ که به ترتیب طول هذلولوی مرتب شده‌اند، به‌طور مناسب توزیع شده‌اند. یعنی تعداد گره‌های K از یک کلاس ازدواج C در $\mathrm{Gal}(N/M)$ تحت نگاشت

$$\pi_1(M \setminus L) \to \mathrm{Gal}(N/M)$$

متناسب با $\#C/\#\,\mathrm{Gal}(N/M)$ است.

مراجع

[1] Mazur, B.,1973. *Notes on étale cohomology of number fields*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.

[2] Kapranov, M., 1996. *Analogies between number fields and 3-manifolds*. Unpublished note.

[3] Reznikov, A., 1997. *Three-manifolds class field theory (Homology of coverings for a nonvirtually b 1-positive manifold)*. Selecta Mathematica, 3(3), pp. 361–399.

[4] Reznikov, A.,2000. *Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds*. Selecta Mathematica, 6(1), p. 1.

[5] Mazur, B.,2008. *Finding meaning in error terms*. Bulletin of the American Mathematical Society, 45(2), pp. 185–228.

[6] McMullen, C.T.,2013. *Knots which behave like the prime numbers*. Compositio Mathematica, 149(8), pp. 1235–1244.

[7] Morishita, M.,2009. *Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings*. arXiv preprint arXiv:0904.3399.

[8] Gauss, C.F.,1833. *Zur Mathematischen Theorie der Electrodynamische Wirkungen*. Collected Works Vol. 5. Königlichen Gesellschaft des Wissenschaften, Göttingen, p. 605.

[9] Gauss, C.F.,1966. *Disquisitiones arithmeticae*. Vol. 157. Yale University Press.

[10] Waldspurger, J.-L.,1976. *Entrelacements sur Spec (Z)*. Bull. Sc. Math., 100, pp. 113–139.

[11] Kohno, T., 2002. *Conformal field theory and topology*. Vol. 210. American Mathematical Society.

[12] Koch, H.,1970. *Galoische Theorie der p–Erweiterungen*. Berlin VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[13] Milnor, J.W.,1954. *Isotopy of links*. Princeton University.

[14] Turaev, V.G.,1979. *Milnor invariants and Massey products*. Journal of Soviet Mathematics, 12(1), pp. 128–137.

[15] Hillman, J., D. Matei, and M. Morishita., 2005. *Pro-p link groups and p-homology groups*. arXiv preprint math/0505433.

[16] Anick, D.J.,1987. *Inert sets and the Lie algebra associated to a group*. Journal of Algebra, 111(1), pp. 154–165.

[17] Maeda, T., 1985. *Lower Central Series of Link Groups*.

[18] Massey, W. and L. Traldi., 1986. *On a conjecture of K. Murasugi*. Pacific Journal of Mathematics, 124(1), pp. 193–213.

[19] Morishita, M.,2002. *On certain analogies between knots and primes*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,550, pp. 141–167.

[20] Labute, J.,2006. *Mild pro-p-groups and Galois groups of p-extensions of* $\mathbb{Q}$. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 596, pp. 155–182.

[21] Schmidt, A., 2006. *Circular sets of prime numbers and p-extensions of the rationals*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 596, pp. 115–130.

[22] Kapranov, M.M.,1995. *Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory*, in *Functional analysis on the eve of the 21st century*. Springer, pp. 119–151.

[23] Morishita, C. and M. Morishita., 2003. *Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number fields*.

[24] Sikora, A.S.,2003. *Analogies between group actions on 3-manifolds and number fields*. Commentarii Mathematici Helvetici, 78(4), pp. 832–844.