Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

On fundamental hypergroups and their applications in fundamental particles and nuclear physics

Morteza Jafarpour[1], **Hossien Aghabozorgi**[2]✉, **Zyenab Arabpour**[3]

1. Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.
   E-mail: m.j@vru.ac.ir
2. Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.
   ✉E-mail: h.aghabozorgi@vru.ac.ir
3. Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.
   E-mail: zeynab.arabpour1398@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
27 February 2021
Received in revised form:
11 June 2021
Accepted:
10 July 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:
algebraic hyperstructures, hyperoperation, fundamental hypergroup, subhypergroup, fundamental chain, fundamental particles.

ABSTRACT

Introduction

The theory of hyperstructure has been introduced as a generalization of structure theory. This theory works on sets instead of elements in algebraic systems. In recent years, not only the theory of hyperstructures has received more attention from mathematicians, but also scientists from other sciences such as physics, chemistry, and biology have investigated on it, and many articles have been published in this field. In this research, we introduce fundamental hypergroups and dependent hypergroups. A connection between hypergroup theory, nuclear physics and fundamental particles is investigated. We show that interaction process such as Lepton actions in fundamental particle physics forms a fundamental hypergroup.

Material and methods

In this study, first using the definitions, notions and theorems of hypergroup theory we introduce the classes of fundamental and dependent hypergroups. Then describe standard model of particle physics and investigate the hyperstucture associated from interaction of Lepton actions in fundamental particle physics satisfies the associativity condition and forms a fundamental hypergroup.

Results and discussion

In this paper, using the concepts of hyperstructure theory, the categories of fundamental and dependent hypergroups are introduced and some of their properties have been investigated. By introducing the class of fundamental hypergroups, we have shown that the hyperstructure which is derived from the process of interaction between leptons forms a fundamental hypergroup. This connection, in addition to showing the establishment of a new order in the execution of processes, also makes it possible to take advantage of the interaction process of the elements of this set by using the associativity condition in the collection of leptons. Moreover, from the point of view of hyperstructure theory, the category of fundamental hypergroups can be further studied.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Introducing a new class of hypergroups which is named the class of fundamental hypergroups.
- Strong connection between hypergroup theory and nuclear physics and fundamental particles.

How to cite: Jafarpour, M., Aghabozorgi, H., Arabpour, Z. (2023). On fundamental hypergroups and their applications in fundamental particles and nuclear physics. *Mathematical Researches*, 9 (1), 85-107.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

معرفی ابرگروه‌های بنیادی و کاربرد آنها در فیزیک ذرات بنیادی و هسته‌ای

مرتضی جعفرپور[1]، حسین آقابزرگی[2]، زینب عرب پور[3]

۱. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران. رایانامه: m.j@vru.ac.ir
۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران.. رایانامه: h.aghabozorgi@vru.ac.ir
۳. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران. رایانامه: zeynab.arabpour1398@gmail.com

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۰۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۱۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

در این تحقیق ابرگروه‌های وابسته و ابرگروه‌های بنیادی را معرفی و خواص آن را مورد تحقیق قرار می‌دهیم. سپس ارتباط بین نظریه ابرگروه‌ها و فیزیک ذرات بنیادی و هسته ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان، نشان می‌دهیم ابرساختار برهم کنش بین لپتون ها در فیزیک ذرات بنیادی، یک ابرگروه بنیادی تشکیل می‌دهد.

واژه‌های کلیدی:
ابرساختارجبری،
ابرعمل،
ابرگروه بنیادی،
زیرابرگروه،
زنجیر بنیادی،
ذرات بنیادی.

استناد: جعفرپور، مرتضی؛ آقابزرگی، حسین؛ عرب‌پور، زینب؛ (۱۴۰۲). معرفی ابرگروه‌های بنیادی و کاربرد آنها در فیزیک ذرات بنیادی و هسته‌ای. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۱۰۷-۸۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

ابرساختارهای جبری تعمیمی از ساختارهای جبری می‌باشند که برای برای اولین باردر سال ۱۹۳۴ توسط ریاضیدان فرانسوی به نام مارتی[1] مطرح گردید [۱۲]. مارتی مفهوم گروه را به یک ابرگروه تعمیم داد که در آن ترکیب دو عنصر به جای یک عنصر زیر مجموعه ناتهی از عناصر است. از آن زمان تا کنون تحقیقات زیادی در این زمینه صورت گرفته است که برای آشنایی و تحقیق در زمینه ابرساختار ها می‌توان به منابع [۲،۳،۵] مراجعه کرد. در سال های اخیر نه تنها نظریه ابر ساختار ها مورد توجه بیشتر ریاضیدانان قرار گرفته است، بلکه مورد توجه دانشمندان علوم دیگر همچون فیزیک، شیمی و زیست شناسی نیز قرار گرفته و در این زمینه مقالات زیادی به چاپ رسیده است که از جمله می‌توان به مراجع [۱،۴،۶،۷،۸] و [۹-۱۶] اشاره کرد. در این تحقیق رده جدیدی از ابرساختارها باعنوان ابرگروه‌های بنیادی معرفی و سپس زیر ابرگروه‌های آن را شناسایی می‌کنیم. در علم فیزیک، یک ذره بنیادی به ذره‌ای گفته می‌شود که هیچ ساختار داخلی ندارد. لذا این ذره یکی از بلوک‌های ساختمانی جهان اطراف ما را تشکیل می‌دهد. عملاً از سال ۱۸۹۷ که الکترون به عنوان بنیادی ترین عنصر جهان توسط تامسون کشف شد، فیزیک ذرات بنیادی پدید آمد و از آن پس ذرات بنیادی به تدریج معرفی گردیدند. به منظور ایجاد نظم در مجموعه بزرگ از ذرات و ارائه الگوی مناسب برای توجیه ساز و کار برهم کنش ذرات، مدل‌های متفاوتی ارائه گردیده است که مهم‌ترین آن‌ها مدل استاندارد نامیده می‌شود [۱۳]. در مدل استاندارد شش لپتون و شش پاد لپتون در سه نسل ظاهر می‌شود. نسل اول شامل الکترون، پوزیترون، نوترینوی الکترون و پادنوترینوی الکترون، نسل دوم شامل میون، پادمیون، نوترینوی میون و پادنوترینوی میون و نسل سوم شامل تائون، پاد تائون، نوترینوی تائون و پاد نوترینوی تائون می‌باشد. بنابراین مجموعه لپتون‌ها شامل ۱۲ عنصر به صورت زیر است.

$$H=\{ e^{+}, \mu^{+}, \tau^{+}, e^{-}, \mu^{-}, , \tau^{-}, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \overline{\nu_e}, \overline{\nu_\mu}, \overline{\nu_\tau} \}.$$

در ادامه ارتباط بین ابرگروه‌های بنیادی و فیزیک ذرات بنیادی و فیزیک هسته ای را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم ابرساختار برگرفته از فرآیند برهم کنش بین لپتون ها با در نظرگرفتن پایستگی اعداد لپتونی که برای اولین بار توسط موسوی نژاد و همکاران در[۱] معرفی گردیده است، تشکیل یک ابرگروه بنیادی می دهد.

درزیر ابتدا به ذکر مفاهیمی از نظریه ابر ساختارها می‌پردازیم. تعاریف و قضایایی که بیان می‌کنیم از مرجع [۲] انتخاب شده‌اند. فرض کنید H یک مجموعه ناتهی است. در نظر بگیرید $P^*(H)$ خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی H است. تابع $* : H \times H \to P^*(H)$ را یک ابرعمل دوتایی یا به اختصار یک ابر عمل روی H و زوج مرتب $(H,*)$ را یک ابرگروه‌وار می‌نامیم. اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H باشند، آن‌گاه مجموعه $A * B$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A * B := \bigcup_{a\in A, b\in B} a * b.$$

همچنین قرارداد می‌کنیم که $x * A := \{x\} * A$ و $A * x := A * \{x\}$. به طورکلی در نظریه ابر ساختار ها مجموعه تک عضوی $\{ x \}$ را با x نشان می‌دهند با پذیرفتن این قرارداد می‌توان گفت هر گروه واریک ابرگروه وار نیز می‌باشد.

با در نظر گرفتن مفاهیم بالا ابرعمل $*$ را شرکت‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in H$، شرط زیر برقرار باشد،

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

[1] Marty

اگر ابرعمل $*$ شـرکت‌پذیر باشـد، آن‌گاه زوج $(H,*)$ را یک نیم‌ابرگروه می‌نامیم. ابرگروه‌وار H را شـبه‌ابرگروه گوییم، هرگاه در خاصـیت اصـل تکثیر صـدق کند یعنی برای هر $a \in H$، $a * H = H * a = H$. نیم‌ابرگروهی که یک شبه ابرگروه نیز با شد یک ابرگروه نامیده می شود. فرض کنید $(H,*)$ یک ابرگروه‌وار با شد. عضو $e \in H$ را همانی را ست می‌نامیم، هرگاه برای هر y، $y \in y * e$. (همانی چپ نیز به طریق مشابه تعریف می شود). عضو $e \in H$ را همانی گوییم، هرگاه هم همانی راست و هم همانی چپ باشد. به عبارت دیگر $e \in H$ همانی است اگر و تنها اگر برای هر $y \in H$،

$$y \in y * e \cap e * y.$$

عضو $e \in H$ را یک اسکالر همانی می‌نامیم هرگاه درشرط زیر صدق کند،

$$\forall x \in H, \quad x * e = e * x = x.$$

به طورکلی عنصر x از H را یک اسکالر می‌نامیم هرگاه :

$$\forall y \in H, \qquad \mathrm{card}(x * y) = \mathrm{card}(y * x) = ۱$$

ابرگروه‌وار $(H,*)$ را جابه‌جایی می‌نامیم، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$\forall x, y \in H, \quad x * y = y * x.$$

فرض کنید ابرگروه $(H,*)$ دارای حداقل یک عضو همانی است. عضو $a' \in H$ را معکوس عنصر $a \in H$ می‌نامیم، هرگاه عضو همانی $e \in H$ موجود باشد بطوری که

$$e \in a * a' \cap a' * a.$$

۲. ابرگروه‌های بنیادی و برخی خواص آنها

فرض کنید A و B مجموعه‌هایی مجزا و ناتهی باشند. همچنین فرض کنید $f: A \to B$ تناظری یک به یک باشد. ابر عمل o_f که آن را ابر عمل وابسته به f می‌نامیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر $\mathrm{H} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ آنگاه:

$$\forall x, y \in H: \; y o_f x = x o_f y = \begin{cases} H & y = f(x) \\ \{x, y\} & y \neq f(x) \end{cases}$$

گزارۀ۱. زوج (H, o_f) ابرگروه است.

اثبات. فرض کنید $x, y, z \in H$. اگر $y = f(x)$ یا $y = f(z)$ آنگاه

$$(x o_f y) o_f z = H o_f z = H.$$

از طرف دیگر

$$x o_f (y o_f z) = x o_f H = H.$$

بنابراین در این حالت $(x o_f y) o_f z = x o_f (y o_f z)$.

حال فرض کنید $y \neq f(x)$ و $y \neq f(z)$ در این صورت داریم:

$$(x o_f y) o_f z = \{x, y\} o_f z = x o_f y \cup x o_f z.$$

اگر $z = f(x)$

$$(x o_f y) o_f z = x o_f (y o_f z) = H.$$

لذا خاصیت شرکت پذیر برقرار است. فرض کنیم $z \neq f(x)$ بنابراین $xo_f y = \{x, y\}$، $xo_f z = \{x, z\}$ و لذا $yo_f z = \{y, z\}$

$$(xo_f y)o_f z = xo_f z \cup yo_f z = \{x, y, z\}.$$

همچنین

$$xo_f(yo_f z) = xo_f y \cup yo_f z = \{x, y, z\}.$$

پس داریم

$$(xo_f y)o_f z = xo_f(yo_f z).$$

علاوه بر این برای هر x از H داریم $Ho_f x = xo_f H = H$

پس عمل o درخاصیت اصل تکثیر نیز صدق می‌کند و لذا (H, o_f) یک ابرگروه است که آن را ابرگروه وابسته به f می‌نامیم.

مثال. فرض کنید $A = \{۱,۲\}, B = \{۳,۴\}$. همچنین فرض کنید $f: A \to B$ تناظر دوسویی باشد که $f(۱) = ۳$, $f(۲) = ۴$. در این صورت ابرگروه وابسته بصورت زیر است.

o_f	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۱,۲	۱,۲,۳,۴	۱,۴
۲	۱,۲	۲	۲,۳	۱,۲,۳,۴
۳	۱,۲,۳,۴	۲,۳	۳	۳,۴
۴	۱,۴	۱,۲,۳,۴	۳,۴	۴

تعریف۲. فرض کنید $F = \{X, X^+, X^-, V_X, \bar{V}_X\}$ خانواده از از مجموعه‌های دو به دو مجزا و $\varphi^+: X \to X^+$،

$\varphi^-: X \to X^-$ و $\vartheta: X^+ \to V_X$ و $\bar{\vartheta}: X^- \to \bar{V}_X$، تناظرهای یک به یکی بین اعضای F باشند. در این صورت پنج تایی $(X, \varphi^+, \vartheta, \varphi^-, \bar{\vartheta})$ را یک رنجیر بنیادی روی F با دامنه X می‌نامیم. علاوه بر این قرار می‌دهیم:

$$H^+ = Dom\vartheta \cup Im\vartheta, \qquad H^- = Dom\bar{\vartheta} \cup Im\bar{\vartheta}$$

برای هر $s, t \in X$ نمادگذاری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L[\varphi^+(s), \varphi^-(t)] = L[\varphi^-(t), \varphi^+(s)] = \{\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)), \vartheta(\varphi^+(t))\}.$$

و

$$L\big[\vartheta(\varphi^+(s)), \bar{\vartheta}(\varphi^-(t))\big] = L[(\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)), \vartheta(\varphi^+(s)] = \{\varphi^-(s), \varphi^+(t)\}.$$

و همچنین

$$L[\varphi^+(s), \bar{\vartheta}(\varphi^-(t))] = L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)), \varphi^+(s)] = \{\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)), \varphi^+(t)\}$$

و

$$L[\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(t))] = L[(\vartheta(\varphi^+(t)), \varphi^-(s)] = \{\vartheta(\varphi^+(s)), \varphi^-(t)\}.$$

تعریف۳. فرض کنید F خانواده ای از مجموعه‌های دو به دو مجزا و $(X, \varphi^+, \vartheta, \varphi^-, \bar{\vartheta})$ یک زنجیر بنیادی روی F با دامنه X باشد. همچنین فرض کنید $H = H^+ \cup H^-$.

از حالا به بعد H را دامنه بنیادی می‌نامیم. ابر عمل بنیادی o روی H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall(x,y) \in H^2 : xoy = yox = \begin{cases} x \ominus y & x, y \in H^- \\ x \oplus y & x, y \in H^+ \\ H \quad \begin{cases} x = \varphi^+(t), & y = \varphi^-(t) \\ x = \vartheta\big(\varphi^+(t)\big), & y = \bar{\vartheta}(\varphi^-(t)) \end{cases} & \\ \{x, y\} \quad \begin{cases} x = \varphi^-(t), y = \vartheta(\varphi^+(t)) \\ x = \varphi^+(t), y = \bar{\vartheta}(\varphi^-(t)) \end{cases} & \\ L[x, y] \cup \{x, y\} & \text{در سایر حالت ها} \end{cases}$$

که در آن $\ominus$ ابر عمل وابسته به $\bar{\vartheta}$ و $\oplus$ ابر عمل وابسته به ϑ می‌باشند.

گزارهٔ ۴. ابرعمل o روی H شرکت‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید $x, y, z \in H$ در این صورت:

الف) اگر $x, y, z \in H^-$ یا $x, y, z \in H^+$ آنگاه با توجه به اینکه $(H^-,\ominus)$ و $(H^+,\oplus)$ ابرگروه هستند داریم:

$$(xoy)oz = (x \ominus y) \ominus z = x \ominus (y \ominus z) = xo(yoz).$$

یا

$$(xoy)oz = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = xo(yoz).$$

بنابراین در این حالت خاصیت شرکت پذیر برقرار است.

ب) اگر $\{x, y, z\} \cap H^- \neq \phi$ و $\{x, y, z\} \cap H^+ \neq \phi$ آنگاه بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم x ،$y \in H^-$ و $z \in H^+$. در این صورت حالت های زیر اتفاق می‌افتند.

ب۱) $x, y \in Dom\bar{\vartheta}$ و $z \in Dom\vartheta$

ب۲) $x, y \in Dom\bar{\vartheta}$ و $z \in Im\vartheta$

ب۳) $y \in Im\bar{\vartheta}$ ،$x \in Dom\bar{\vartheta}$ و $z \in Dom\vartheta$

ب۴) $y \in Im\bar{\vartheta}$ ،$x \in Dom\bar{\vartheta}$ و $z \in \mathrm{Im}\vartheta$

ب۵) $x, y \in Im\bar{\vartheta}$ و $z \in Dom\vartheta$

ب۶) $x, y \in Im\bar{\vartheta}$ و $z \in Im\vartheta$

در هر یک از این حالات ، برقراری خاصیت شرکت پذیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در حالت ب۱) فرض کنید $x = \varphi^-(t)$، $y = \varphi^-(s)$ و $z = \varphi^+(u)$ که در آن $s,t,u \in X$. در این صورت

ب۱-۱) اگر $u \in \{s,t\}$ آن‌گاه

$$(xoy)oz = \{x,y\}oz = xoz \cup yoz = \varphi^-(t)o\varphi^+(u) \cup \varphi^-(s)o\varphi^+(u) = H.$$

از طرف دیگر اگر $u = s$ آنگاه

$$xo(yoz) = \varphi^-(t)o(\varphi^-(s)o\varphi^+(s)) = \varphi^-(t)oH = H.$$

اما اگر $u = t$ آنگاه

$$\begin{aligned} xo(yoz) &\supseteq xo\{y,z\} = xoy \cup xoz \\ &= \varphi^-(t)o\varphi^-(s) \cup \varphi^-(t)o\varphi^+(u) \\ &\supseteq \varphi^-(t)o\varphi^+(t) = H. \end{aligned}$$

بنابراین

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۱-۲)

اگر $u \notin \{s,t\}$ آنگاه

$$\begin{aligned} (xoy)oz &= (\varphi^-(t)o\varphi^-(s))o\varphi^+(u) = \{\varphi^-(t),\varphi^-(s)\}o\varphi^+(u) \\ &= \varphi^-(t)o\varphi^+(u) \cup \varphi^-(s)o\varphi^+(u) \\ &= L[\varphi^-(t),\varphi^+(u)] \cup \{\varphi^-(t),\varphi^+(u)\} \cup L[\varphi^-(s),\varphi^+(u)] \\ &\cup \{\varphi^-(s),\varphi^+(u)\} \\ &= \{\vartheta(\varphi^+(t)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\vartheta(\varphi^+(s)),\varphi^-(t),\varphi^-(s),\varphi^+(u)\}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} xo(yoz) &= \varphi^-(t)o\big(\varphi^-(s)o\varphi^+(u)\big) \\ &= \varphi^-(t)o(L[\varphi^-(s),\varphi^+(u)] \cup \{\varphi^-(s),\varphi^+(u)\}) \\ &= \varphi^-(t)o\big\{\vartheta\big(\varphi^+(s)\big),\bar{\vartheta}\big(\varphi^-(u)\big),\varphi^-(s),\varphi^+(u)\big\} \\ &= \varphi^-(t)o\vartheta\big(\varphi^+(s)\big) \cup \varphi^-(t)o\bar{\vartheta}\big(\varphi^-(u)\big) \cup \varphi^-(t)o\varphi^-(s) \\ &\cup \varphi^-(t)o\varphi^+(u) \\ &= L\big[\varphi^-(t),\vartheta\big(\varphi^-(s)\big)\big] \cup L\big[\varphi^-(t),\bar{\vartheta}\big(\varphi^-(u)\big)\big] \cup L[\varphi^-(t),\varphi^+(u)] \\ &\cup \big\{\varphi^-(t),\vartheta\big(\varphi^+(s)\big),\bar{\vartheta}\big(\varphi^-(u)\big),\varphi^+(u)\big\} \\ &= \{\vartheta(\varphi^+(t)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\vartheta(\varphi^+(s)),\varphi^-(t),\varphi^-(s),\varphi^+(u)\}. \end{aligned}$$

لذا در این حالت نیز داریم $(xoy)oz = xo(yoz)$.

برای اثبات حالت ب۲) فرض کنید $x = \varphi^-(t)$، $y = \varphi^-(s)$ و $z = \vartheta(\varphi^+(u))$ که در آن $s,t,u \in X$.

ب۲-۱) فرض کنیم $u \in \{s,t\}$.

ب۲-۱-۱) اگر $u = s = t$ آن‌گاه

$$(xoy)oz = (\varphi^-(t)o\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(u)) = \varphi^-(s)o\vartheta(\varphi^+(s)) = \{\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(s))\}.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} xo(yoz) &= \varphi^-(t)o((\varphi^-(s)o\varphi^+(u)) = \varphi^-(s)o(\varphi^-(s)o\vartheta(\varphi^+(s))) \\ &= \varphi^-(s)o\varphi^-(s) \cup \varphi^-(s)o\vartheta(\varphi^+(s)) = \{\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(s))\ \}. \end{aligned}$$

لذا

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۲-۱-۲) اگر $\mathrm{u} = \mathrm{s}$ و $u \neq t$ آنگاه

$$\begin{aligned} (xoy)oz &= (\varphi^-(t)o\varphi^-(s))o\vartheta\big(\varphi^+(u)\big) = \{\varphi^-(t), \varphi^-(s)\}o\vartheta(\varphi^+(u)) \\ &= \{\varphi^-(t), \varphi^-(s)\}o\vartheta(\varphi^+(s)) = \varphi^-(t)o\vartheta(\varphi^+(s)) \cup \varphi^-(s)o\vartheta(\varphi^+(s)) \\ &= L[\varphi^-(t), \vartheta(\varphi^+(s))] \cup \{\varphi^-(t), \vartheta(\varphi^+(s))\} \cup L[\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(s))] \\ &\cup \{\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(s))\} = \big\{\vartheta\big(\varphi^+(t)\big), \varphi^-(s), \varphi^-(t), \vartheta\big(\varphi^+(s)\big)\big\} \\ &= \big\{x, y, z, \vartheta\big(\varphi^+(t)\big)\big\}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} xo(yoz) &= \varphi^-(t)o(\varphi^-(s)o\vartheta\big(\varphi^+(u)\big)) = \varphi^-(t)o(\varphi^-(s)o\vartheta\big(\varphi^+(s)\big)) \\ &= \varphi^-(t)o(L[\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(s)] \cup \{\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(u))\}) \\ &= \varphi^-(t)o\{\vartheta(\varphi^+(s)), \varphi^-(s)\} = \varphi^-(t)o\vartheta\big(\varphi^+(s)\big) \cup \varphi^-(t)o\big(\varphi^-(s)\big) \\ &= L\big[\varphi^-(t), \vartheta\big(\varphi^+(s)\big)\big] \cup \big\{\varphi^-(t), \vartheta\big(\varphi^+(s)\big), \varphi^-(s)\big\} \\ &= \big\{\vartheta\big(\varphi^+(t)\big), \varphi^-(s), \varphi^-(t), \vartheta\big(\varphi^+(s)\big)\big\} = \big\{x, y, z, \vartheta\big(\varphi^+(t)\big)\big\}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۲-۱-۳) اگر $u = t$ و $u \neq s$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} (xoy)oz &= (\varphi^-(t)o\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(u)) = \big(\varphi^-(t)o\varphi^-(s)\big)o\vartheta\big(\varphi^+(t)\big) \\ &= \{\varphi^-(t), \varphi^-(s)\}o\vartheta(\varphi^+(t)) = \varphi^-(t)o\vartheta\big(\varphi^+(t)\big) \cup \varphi^-(s)o\vartheta\big(\varphi^+(t)\big) \\ &= \{\varphi^-(t), \vartheta(\varphi^+(t))\} \cup L[\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(t))] \cup \{\varphi^-(s), \vartheta(\varphi^+(t))\} \\ &= \big\{\vartheta\big(\varphi^+(s)\big), \vartheta(\varphi^+(t)), \varphi^-(t), \varphi^-(s)\big\} = \big\{x, y, z, \vartheta\big(\varphi^+(s)\big)\big\}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} xo(yoz) &= \varphi^-(t)o(\varphi^-(s)o\vartheta(\varphi^+(u))) = \varphi^-(t)o(\varphi^-(s)o\vartheta(\varphi^+(t))) \\ &= \varphi^-(t)o\big(L[\varphi^-(s),\vartheta(\varphi^+(t)] \cup \{\varphi^-(s),\vartheta(\varphi^+(t))\}\big) \\ &= \varphi^-(t)o\{\vartheta(\varphi^+(s)),\varphi^-(t),\varphi^-(s),\vartheta(\varphi^+(t))\} \\ &= \varphi^-(t)o\vartheta(\varphi^+(s)) \cup \varphi^-(t)o\varphi^-(t)o \cup \varphi^-(t)o\varphi^-(s) \\ &\cup \varphi^-(t)o\vartheta(\varphi^+(t)) \\ &= L[\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(s))] \cup L[\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(t))] \\ &\cup \{\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(s)),\vartheta(\varphi^+(t)\} = \{\vartheta(\varphi^+(t)),\varphi^-(s),\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(s))\} \\ &= \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(s))\}. \end{aligned}$$

لذا

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

برای اثبات برقراری خاصیت شرکت پذیری در حالت ب۳) فرض کنید $x=\varphi^-(t)$،

$y=\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))$ و $z=\varphi^+(u)$ که در آن $s,t,u\in X$.

ب۳-۱) نخست فرض می‌کنیم $u\in\{s,t\}$ در این صورت:

ب۳-۱-۱) اگر $u=t$ آنگاه

$$\begin{aligned} (xoy)oz &= (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u) = \\ &\big(\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)\big)o\varphi^+(t) \\ &\supseteq \varphi^-(t)o\,\varphi^+(t) = H. \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$xo(yoz) = \varphi^-(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u)\right) = \varphi^-(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(t)\right) \supseteq \varphi^-(t)o\varphi^+(t) = H.$$

بنابراین

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۳-۱-۲) اگر $u\neq t$ و $u=s$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} (xoy)oz &= \big(\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\big)o\varphi^+(u) = \big(\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\big)o\varphi^+(s) \\ &= \{\varphi^-(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}o\varphi^+(s) \\ &= L[\varphi^-(t),\varphi^+(s)] \cup L[\varphi^+(s),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))] \cup \{\varphi^-(t),\varphi^+(s),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\} \\ &= \{\vartheta(\varphi^+(t)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(s),\varphi^+(t)\} = \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(t))\}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$
\begin{aligned}
xo(yoz) &= \varphi^-(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u)\right) = \varphi^-(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(s)\right)\\
&= \varphi^-(t)o(L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(s)] \cup \{\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(s)\}\\
&= \varphi^-(t)o\{\varphi^+(s),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\} = \varphi^-(t)o\varphi^+(s) \cup \varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\\
&= L[\varphi^-(t),\varphi^+(t)] \cup L[\varphi^-(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))] \cup \{\varphi^-(t),\varphi^+(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}\\
&= \{\vartheta(\varphi^+(t)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(s),\varphi^+(t)\} = \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(t))\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۳-۲) حال فرض کنیم $u \notin \{s,t\}$.

بنابراین $x = \varphi^-(t)$، $y = \bar{\vartheta}(\varphi^-(s))$ و $z = \varphi^+(u)$ که در آن $s,t,u \in X$.

ب۳-۲-۱) اگر $s = t$ آنگاه

$$
\begin{aligned}
(xoy)oz &= (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))o\varphi^+(u) = (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)))o\varphi^+(u) = H^-o\varphi^+(u)\\
&\supseteq \varphi^-(u)o\varphi^+(u) = H.
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر

$$
\begin{aligned}
xo(yoz) &= \varphi^-(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u)\right) = \varphi^+(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(t))o\varphi^+(u)\right)\\
&= \varphi^-(t)o(L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)),\varphi^+(u)] \cup \{\varphi^+(u),\bar{\vartheta}(\varphi^-(t))\}\\
&= \varphi^-(t)o\{\varphi^+(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\varphi^+(u),\bar{\vartheta}(\varphi^-(t))\} = H.
\end{aligned}
$$

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۳-۲-۲) اگر $s \neq t$ آنگاه

$$
\begin{aligned}
(xoy)oz &= (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))o\varphi^+(u) = \{\varphi^-(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}o\varphi^+(u)\\
&= \varphi^-(t)o\varphi^+(u) \cup \bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u)\\
&= L[\varphi^-(t),\varphi^+(u)] \cup L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(u)] \cup \{\varphi^-(t),\varphi^+(u),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}\\
&= \{\vartheta(\varphi^+(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\varphi^+(s),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(u),\varphi^-(t)\}\\
&= \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(t)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\varphi^+(s)\}
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر

$$
\begin{aligned}
xo(yoz) &= \varphi^-(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u)\right)\\
&= \varphi^-(t)o\left(L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(u)] \cup \{\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\varphi^+(u)\}\right.\\
&= \varphi^-(t)o\{\varphi^+(s),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\overline{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(u)\}\\
&= \varphi^-(t)o\varphi^+(s) \cup \varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)) \cup \varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))\\
&\cup \varphi^-(t)o\varphi^+(u)\\
&= L[\varphi^-(t),\varphi^+(t)] \cup L[\varphi^-(t),\varphi^+(u)]\\
&\cup \{\varphi^-(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^+(u),\varphi^+(s)\}\\
&= \{\vartheta(\varphi^+(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\varphi^-(s),\varphi^+(u),\varphi^+(s)\}\\
&= \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(t)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(u)),\varphi^+(s)\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

برای اثبات خاصیت شرکت پذیر در حالت ب۴) فرض کنید $x = \varphi^{-}(t)$،

$y = \bar{\vartheta}(\varphi^{-}(s))$ و $z = \vartheta(\varphi^{+}(u))$ که در آن $s, t, u \in X$.

ب۴-۱) فرض می‌کنیم $u \in \{s, t\}$ در این صورت:

ب۴-۱-۱) اگر $u = t = s$ آنگاه

$$\begin{aligned}(xoy)oz &= (\varphi^{-}(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(s))o\vartheta(\varphi^{+}(u)) \\ &= (\varphi^{-}(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(t)))o\vartheta(\varphi^{+}(t)) \\ &= H^{-}o\vartheta(\varphi^{+}(u)) \supseteq \bar{\vartheta}(\varphi^{-}(t))o\vartheta(\varphi^{+}(t)) = H.\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$xo(yoz) = \varphi^{-}(t)o\left(\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(s)\right)o\vartheta(\varphi^{+}(u)) = \varphi^{-}(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(t))o\vartheta(\varphi^{+}(t))) = \varphi^{-}(t)oH = H.$$

پس

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۴-۱-۲) اگر $u = t \neq s$ آنگاه

$$\begin{aligned}(xoy)oz &= \left(\varphi^{-}(t)o\bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big)o\vartheta(\varphi^{+}(u)\right) \\ &= \left(\varphi^{-}(t)o\bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big)o\vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big)\right) = \left\{\varphi^{-}(t), \bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big)\right\}o\vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big) \\ &= \varphi^{-}(t)o\vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big) \cup \bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big)o\vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big) \\ &= \left\{\varphi^{-}(t), \vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big)\right\} \cup \left(L\left[\bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big), \vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big)\right] \cup \left\{\bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big), \vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big)\right\}\right) \\ &= \{x, y, z, \varphi^{+}(s)\}.\end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}xo(yoz) &= \varphi^{-}(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(s))o\vartheta(\varphi^{+}(u)) = \varphi^{-}(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(s))o\vartheta(\varphi^{+}(t)) \\ &= \varphi^{-}(t)o(L\left[\overline{\vartheta}(\varphi^{-}(s)), \vartheta(\varphi^{+}(t))\right] \cup \left\{\bar{\vartheta}(\varphi^{-}(s), \vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big)\right\}) \\ &= \varphi^{-}(t)o\left\{\varphi^{+}(s), \varphi^{-}(t), \bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big), \vartheta\big(\varphi^{+}(t)\big)\right\} \\ &= \varphi^{-}(t)o\varphi^{+}(s) \quad \cup \varphi^{-}(t)o\varphi^{-}(t) \cup \varphi^{-}(t)o\bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big) \cup \varphi^{-}(t)o\vartheta(\varphi^{+}(t) \\ &= L[\varphi^{-}(t), \varphi^{+}(s)] \cup L[\varphi^{-}(t), \vartheta(\varphi^{+}(t))] \cup \left\{\varphi^{-}(t), \varphi^{+}(s), \bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big)\right\} \\ &= \left\{\vartheta(\varphi^{+}(t)), \bar{\vartheta}\big(\varphi^{-}(s)\big), \varphi^{-}(t), \varphi^{+}(s)\right\} = \{x, y, z, \varphi^{+}(s)\}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۴-۱-۳) اگر $u = s \neq t$ آن‌گاه

$$(xoy)oz = (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))o\vartheta(\varphi^+(u) = (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))o\vartheta(\varphi^+(s)$$
$$\supseteq \bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(s)) = H.$$

از طرف دیگر داریم:

$$xo(yoz) = \varphi^-(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(u))) = \varphi^-(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(s))) = \varphi^-(t)oH$$
$$= H.$$

پس داریم

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

ب۴-۲) حال فرض کنیم $u \notin \{s,t\}$ و $x = \varphi^-(t)$، $y = \bar{\vartheta}(\varphi^-(s))$ و

$z = \vartheta(\varphi^+(u))$ که در آن $s,t,u \in X$.

ب۴-۲-۱) اگر $s = t$ آنگاه

$$(xoy)oz = (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))o\vartheta(\varphi^+(u) = (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)))o\vartheta(\varphi^+(u))$$
$$= H^-o\vartheta(\varphi^+(u)) \supseteq \bar{\vartheta}(\varphi^-(u))o\vartheta(\varphi^+(u)) = H.$$

از طرف دیگر:

$$xo(yoz) = \varphi^-(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(u))) = \varphi^-(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^-(t))o\vartheta(\varphi^+(u)))$$
$$= \varphi^-(t)o(L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)),\vartheta(\varphi^+(u))] \cup \{\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)),\vartheta(\varphi^+(u))\}$$
$$= \varphi^-(t)o\{\varphi^+(t),\varphi^-(u),\bar{\vartheta}(\varphi^-(t)),\vartheta(\varphi^+(u))\} = H.$$

بنابراین

$$(xoy)oz = xo(yoz)$$

ب۴-۲-۲) اگر $s \neq t$ آن‌گاه

$$(xoy)oz = (\varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)))o\vartheta(\varphi^+(u)) = \{\varphi^-(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}o\vartheta(\varphi^+(u))$$
$$= \varphi^-(t)o\vartheta(\varphi^+(u)) \cup \bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(u))$$
$$= L[\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(u))] \cup L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\vartheta(\varphi^+(u))]$$
$$\cup \{\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(u)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}$$
$$= \{\vartheta(\varphi^+(t)),\varphi^-(u),\varphi^+(s),\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(u)),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))\}$$
$$= \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(t)),\varphi^-(u),\varphi^+(s)\}$$

از طرف دیگر داریم:

$$xo(yoz) = \varphi^-(t)o(\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))o\vartheta(\varphi^+(u)))$$
$$= \varphi^-(t)o(L[\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\vartheta(\varphi^+(u))] \cup \{\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\vartheta(\varphi^+(s))\}$$
$$= \varphi^-(t)o\{\varphi^+(s),\varphi^-(u),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\vartheta(\varphi^+(u))\}$$
$$= \varphi^-(t)o\varphi^+(s) \cup \varphi^-(t)o\varphi^-(u) \cup \varphi^-(t)o\bar{\vartheta}(\varphi^-(s))$$
$$\cup \varphi^-(t)o\vartheta(\varphi^+(u))$$
$$= L[\varphi^-(t),\varphi^+(s)] \cup L[\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(u))]$$
$$\cup \{\varphi^+(s),\varphi^-(t),\varphi^-(u),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\vartheta(\varphi^+(u))\}$$
$$= \{\vartheta(\varphi^+(t),\bar{\vartheta}(\varphi^-(s)),\varphi^-(u),\varphi^+(s),\varphi^-(t),\vartheta(\varphi^+(u))\}$$
$$= \{x,y,z,\vartheta(\varphi^+(t)),\varphi^-(u),\varphi^+(s)\}$$

در این حالت نیز داریم

$$(xoy)oz = xo(yoz).$$

برای حالت های ب۵) و ب۶) نیز خاصیت شرکت پذیری برقرار می‌باشد.

گزاره ۵. (H, o) یک ابرگروه است.

اثبات. بنا به گزاره قبل ابرعمل o دارای خاصیت شرکت پذیری است. همچنین برای هر $x \in H$ ، $xoH = Hox = H$ برقرار است، پس ابر عمل o در خاصیت اصل تکثیر نیز صدق می‌کند. بنابراین (H, o) یک ابرگروه است که آن را ابرگروه بنیادی روی H می‌نامیم.

فرض کنید $(X, \varphi^+, \vartheta, \varphi^-, \bar{\vartheta})$ یک زنجیر بنیادی باشد. قرار می‌دهیم:

$$\forall x \in X, \quad R(x) = \{\varphi^+(x), \bar{\vartheta}(\varphi^-(x))\}, \quad S(x) = \{\varphi^-(x), \vartheta(\varphi^+(x))\}$$

در این صورت گزاره زیر برقرار است.

گزاره ۶. فرض کنید (H, o) ابرگروه متناهی برگرفته از زنجیر بنیادی $(X, \varphi^+, \vartheta, \varphi^-, \bar{\vartheta})$ باشد. در این صورت:

الف) $|H| \equiv 0$ (پیمانه ۴).

ب) اگر K زیر ابرگروه H باشد آنگاه، $K = H$ اگر و تنها اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $R(x) \cap K \neq \phi$ و $S(x) \cap K \neq \phi$.

ج) اگر K زیر ابرگروه سره H باشد آنگاه $|K| \leq \frac{|H|}{۲}$.

د) K زیر ابرگروهی از مرتبه $\frac{|H|}{۲}$ است اگر و تنها اگر به ازای هر x از X داشته باشیم:

$$[R(x) \subseteq K, S(x) \cap K = \phi]$$

یا

$$[R(x) \cap K = \phi, S(x) \subseteq K].$$

اثبات. الف) بر طبق نمادگذاری های انجام شده داریم :

$$|H| = |H^-| + |H^+| = ۲|\varphi^-(X)| + ۲|\varphi^+(X)| = ۲|X| + ۲|X| = ۴|X|$$

بنابراین داریم، $|H| \equiv 0$ (پیمانه ۴).

ب) فرض کنید K زیر ابرگروه H، و x ای در X وجود دارد به طوریکه $R(x) \cap K \neq \phi$ و $S(x) \cap K \neq \phi$، بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $\{\varphi^+(x), \bar{\vartheta}(\varphi^-(x))\} \subseteq K$ یا $\{\varphi^+(x), \varphi^-(x)\} \subseteq K$ بنابراین داریم $\varphi^+(x)o\vartheta(\varphi^+(x)) \subseteq K$ یا $\varphi^+(x)o\varphi^-(x) \subseteq K$، اما چون $\varphi^+(x), \varphi^-(x) \in \varphi^+(x)o\vartheta(\varphi^+(x))$ پس در هر حالت داریم $H = \varphi^+(x)o\varphi^-(x) \subseteq K$ لذا $H = K$ عکس مطلب نیز به وضوح برقرار است.

ج) فرض کنید K زیر ابرگروهی از H با مرتبه بزرگتر از $\frac{|H|}{۲}$ باشد در این صورت داریم:

$$\left|\begin{matrix}\cup R(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\cup S(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = \frac{|H|}{۲}$$

اگر $|K| \geq \frac{|H|}{۲}$ پس x ای در X وجود دارد به طوریکه $R(x) \cap K \neq \phi$ و $S(x) \cap K \neq \phi$، بنا به قسمت ب) K=H نتیجه می‌شود.

د) فرض کنید K زیر ابرگروهی از مرتبه $\frac{|H|}{۲}$ باشد، بنابراین K سره است.

بنا به قسمت ب) اگر $x \in X$، $R(x) \subseteq K$ آنگاه $S(x) \cap K \neq$ و یا اگر $S(x) \subseteq K$ آنگاه $R(x) \cap K \neq \phi$ حال کافی است ثابت کنیم برای هر x از X داریم $S(x) \subseteq K$. برای این مقدار فرض کنید x ای در X وجود دارد به طوری که $S(x) \not\subset K$ و $R(x) \not\subset K$. چون

$$H = \left|\begin{matrix}\cup R(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\cup S(x)\\ x\in X\end{matrix}\right|$$

$|\cup R(x)| = |\cup S(x)| = \frac{|H|}{۲}$ پس داریم:

$$K \cap [\cup R(x)] = t < \frac{|H|}{۲} - ۲$$

و

$$K \cap [\cup S(x)] = \left(\frac{|H|}{۲} - ۲\right) - t$$

لذا $\frac{|H|}{۲} > t - \left(\frac{|H|}{۲} - ۲\right) + t \geq |K|$ که این یک تناقض است. بنابراین برای هر $x \in X$ داریم $S(x) \subseteq K$ یا $R(x) \subseteq K$. همچنین اگر $R(x) \subseteq K$ آنگاه $S(x) \cap K = \phi$ و اگر $S(x) \subseteq K$ آنگاه $R(x) \cap K = \phi$. بر عکس، فرض کنید K زیر مجموعه ای از H باشد به طوری که برای x از X داشته باشیم:

$$[R(x) \subseteq K, S(x) \cap K = \phi]$$

یا

$$[S(x) \subseteq K, R(x) \cap K = \phi]$$

ثابت می‌کنیم K زیر ابرگروهی از مرتبه $\frac{|H|}{۲}$ است.

می‌دانیم

$$\left|\begin{matrix}\cup R(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\cup S(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = \frac{|H|}{2} \text{ و } H = \left|\begin{matrix}\cup R(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| \cup \left|\begin{matrix}\cup S(x)\\ x\in X\end{matrix}\right|$$

و همچنین $|R(x)| = |S(x)| = ۲$. بنا به فرض اگر $K \cap \left|\begin{matrix}\cup R(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = t$ آنگاه

$$K \cap \left|\begin{matrix}\cup S(x)\\ x\in X\end{matrix}\right| = \frac{|H|}{۲} - t.$$

بنابراین $|K| = \frac{|H|}{۲}$. حال کافی است نشان دهیم که K بسته است. برای این منظور فرض کنید $b, a \in K$

الف) اگر $R(a) \subseteq K$ و $R(b) \subseteq K$ آنگاه داریم:

$$R(a) = \{\varphi^+(a), \bar{\vartheta}(\varphi^-(a))\} \subseteq \mathrm{K}$$
$$R(b) = \{\varphi^+(b), \bar{\vartheta}(\varphi^-(b))\} \subseteq \mathrm{K}$$
$$\varphi^+(a) o \varphi^+(a) = \{\varphi^+(a)\}$$
$$\varphi^+(a) o \bar{\vartheta}(\varphi^-(a)) = \{\varphi^+(a), \bar{\vartheta}(\varphi^-(a))\} = R(a) \subseteq K$$
$$\varphi^+(b) o \bar{\vartheta}(\varphi^-(b)) = \{\varphi^+(b), \bar{\vartheta}(\varphi^-(b))\} = R(b) \subseteq K.$$

لذا

$$aob \subseteq R(a) o R(b) = \{\varphi^+(a), \bar{\vartheta}(\varphi^-(a))\} o \{\varphi^+(b), \bar{\vartheta}(\varphi^-(b))\} = R(a) \cup R(b) \subseteq K$$

ب) اگر $R(a) \subseteq K$ و $S(b) \subseteq K$ آنگاه داریم:

$$R(a) = \{\varphi^+(a), \bar{\vartheta}(\varphi^-(a))\}, \;\; S(b) = \{\varphi^-(b), \bar{\vartheta}(\varphi^+(b))\}$$

چون $a \neq b$ داریم

$$aob \subseteq R(a) o S(b) = R(a) \cup S(b) \subseteq K.$$

همچنین در حالت های $R(b) \subseteq K$ و $S(a) \subseteq K$ و یا $S(a) \subseteq K$ و $S(b) \subseteq K$ نیز به طور مشابه حکم برقرار است. بنابراین K تحت ابر عمل o بسته است. چون برای هر a و b از K، داریم $\{a, b\} \subseteq K$ پس K در خاصیت اصل تکثیر نیز صدق می‌کند و بنابراین K زیر ابرگروه H است.

۳. ابرگروه‌های بنیادی وابسته به فیزیک ذرات بنیادی و هسته‌ای

مدل استاندارد فیزیک ذرات، نظریه‌ای ریاضی است که به توصیف برهم کنش‌های ضعیف الکترومغناطیسی و قوی بین لپتون‌ها و کوارک‌ها می‌پردازد. لپتون‌ها و کوارک‌ها ذرات پایه‌ای مدل استاندارد می‌باشند. در زیر ابتدا مفاهیمی مربوط به مدل استاندارد فیزیک ذرات بنیادی که برگرفته شده از نتایج مرجع [۱] می‌باشند را بیان می‌کنیم و سپس ابرساختار معرفی شده روی مجموعه لپتون ها به لحاظ شرکت پذیری و تشکیل یک ابر گروه بنیادی را مورد بررسی و تحقیق قرار می دهیم. مطابق با مدل کوارک در نظریه مدل استاندارد، کوارک‌ها آزادانه در طبیعت یافت نمی‌شوند بلکه در ترکیب‌های قابل مشاهده هادرونی همچون باریون‌ها و مزون‌ها وجود دارند. برخلاف کوارک‌ها لپتون‌ها می‌توانند آزادانه در طبیعت یافت شوند، آنها یک گروه مهم از ذرات بنیادی هستند. مخصوصاً الکترون‌ها که یکی از اجزاء اتم هستند.

تفاوت اصلی بین نوتریون‌ها و پاد نوترون‌ها در عدد کوانتومی به نام عدد لپتونی است. در مدل استاندارد به اعضای هر نسل از لپتون‌ها عدد لپتونی یکسانی نسبت داده می‌شود. به نسل اول عدد الکترونی l_e به نسل دوم عدد میونی l_μ و به نسل سوم عدد تائونی l_τ نسبت می‌دهند. این اعداد لپتونی به همراه بار لپتون‌ها در جدول۱ دسته بندی شده‌اند.

جدول۱. دسته بندی لپتون ها براساس بار الکتریکی واعدادلپتونی

Symbol	Q	l_e	l_μ	l_τ
e^-/e^+	−۱/+۱	+۱/−۱	۰	۰
$\nu_e/\overline{\nu_e}$	۰	+۱/−۱	۰	۰
μ^-/μ^+	−۱/+۱	۰	+۱/−۱	۰
$\nu_\mu/\overline{\nu_\mu}$	۰	۰	+۱/−۱	۰
τ^-/τ^+	−۱/+۱	۰	۰	+۱/−۱
$\nu_\tau/\overline{\nu_\tau}$	۰	۰	۰	+۱/−۱

لپتون‌ها فاقد عدد کوانتومی می‌باشند لذا در برهم کنش‌های قوی شرکت نمی‌کنند و تنها از طریق بر هم کنش‌های الکتروضعیف بر یکدیگر تاثیر می‌گذارند به ویژه نوترینوها که بدون بار الکتریکی هستند و تنها در برهم کنش‌های ضعیف شرکت می‌کنند در برهم کنش‌های الکترو ضعیف علاوه بر پایستگی بار الکتریکی پایستگی عدد لپتونی نیز همواره برقرار است. این پایستگی جدید بدین معنی است که لپتون‌ها و پاد لپتون‌ها همواره به صورت زوج از یک نسل در برهم کنش شرکت می‌کنند . درمرجع [۱] موسوی نژاد و همکاران با نشان دادن فرآیند محصولات خروجی برهم کنش‌ها به صورت جدول ابرساختاری (جدول ۲)، با بهره گرفتن از نرم افزار میپل ۱۴ نشان دادند که این ابرساختار خاصیت شرکت پذیری ضعیف دارد. در زیر ابتدا جدول ابر عمل معرفی شده را باز نویسی و سپس نشان می‌دهیم که این ابرساختار تشکیل یک ابرگروه بنیادی می‌دهد. از این پس برای راحتی در نوشتن نمادهای e^-, μ^-, τ^- به ترتیب از e, μ, τ استفاده خواهیم نمود.

جدول۲. برهم کنش بین لپتون ها

$\otimes$	e	ν_e	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ	ν_μ	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ	ν_τ	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$
e	e	e,ν_e	L	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	e,μ	e,ν_e μ,ν_μ	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_\mu$	e,τ	e,ν_e τ,ν_τ	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$e,\bar{\nu}_\tau$
ν_e	e,ν_e	ν_e	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	L	e,ν_e μ,ν_μ	ν_e,ν_μ	μ^+,ν_e	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	e,ν_e τ,ν_τ	ν_τ,ν_e	ν_e,τ^+	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
e^+	L	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	e^+	$e^+,\bar{\nu}_e$	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	e^+,ν_μ	e^+,μ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	e^+,ν_τ	e^+,τ^+	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_e$	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	L	$e^+,\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e$	$\mu,\bar{\nu}_e$	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\mu$	$\tau,\bar{\nu}_e$	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\tau$
μ	e,μ	e,ν_e μ,ν_μ	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\mu,\bar{\nu}_e$	μ	μ,ν_μ	L	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	μ,τ	τ,ν_τ μ,ν_μ	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ	$\mu,\bar{\nu}_\tau$
ν_μ	e,ν_e μ,ν_μ	ν_e,ν_μ	e^+,ν_μ	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	μ,ν_μ	ν_μ	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	L	τ,ν_τ μ,ν_μ	$\nu_\mu,\bar{\nu}_\tau$	τ^+,ν_μ	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ
μ^+	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	μ^+,ν_e	e^+,μ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	L	e^+,ν_e μ^+,ν_μ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	μ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	μ^+,ν_τ	μ^+,τ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_\mu$	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	L	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\tau,\bar{\nu}_\mu$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau,\bar{\nu}_\mu$
τ	e,τ	e,ν_e τ,ν_τ	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	$\tau,\bar{\nu}_e$	μ,τ	τ,ν_τ μ,ν_μ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	$\tau,\bar{\nu}_\mu$	τ	τ,ν_τ	L	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$
ν_τ	e,ν_e τ,ν_τ	ν_τ,ν_e	e^+,ν_τ	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	τ,ν_τ μ,ν_μ	ν_μ,ν_τ	μ^+,ν_τ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	τ,ν_τ	ν_τ	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	L
τ^+	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	ν_e,τ^+	e^+,τ^+	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ	τ^+,ν_μ	μ^+,τ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	L	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	τ^+	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_\tau$	$e,\bar{\nu}_\tau$	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\tau$	$\mu,\bar{\nu}_\tau$	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau,\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	L	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$

در ادامه نشان می‌دهیم که نه تنها ابر ساختار برهم کنش بین لپتون ها با در نظر گرفتن پایستگی اعداد لپتونی دارای خاصیت شرکت پذیری ضعیف می‌باشد بلکه دارای خاصیت شرکت پذیری نیز می‌باشد و ساختار معرفی شده یک ابرگروه بنیادی ایجاد می‌کند.

نمادگذاری. فرض کنید

$F=\{X,X^{+},X^{-},V_X,\bar{V}_X\}$، $X^{+}=\{e^{+},\mu^{+},\tau^{+}\}$ ،$X=X^{-}=\{\mathrm{e},\mu,\tau\}$

.$\bar{V}_X=\{\overline{v_e},\overline{v_\mu},\overline{v_\tau}\}$ و $V_X=\{v_e,v_\mu,v_\tau\}$.

$$\varphi^{-}:X\to X^{-}،\varphi^{-}(x)=x,\qquad \varphi^{+}:X\to X^{+}،\varphi^{+}(x)=x^{+}$$

$$\vartheta:X^{+}\to V_X\ ،\vartheta(x^{+})=v_x$$

$$\bar{\vartheta}:X^{-}\to \bar{V}_X\ ،\bar{\vartheta}(x^{-})=\overline{v_x}$$

تناظرهای یک به یکی بین اعضای F تشکیل می‌دهند و لذا پنج تایی $(X,\varphi^{+},\vartheta,\varphi^{-},\bar{\vartheta})$ یک زنجیر بنیادی روی F با دامنهٔ X است که آن را زنجیر بنیادی لپتو ن ها می‌نامیم.

لم۷. با توجه به نمادهای بالا، جداول ابرگروه‌های وابسته به ϑ و $\bar{\vartheta}$ به صورت زیر است.

جدول۳. ابرگروه وابسته به ϑ

$\ominus$	e	μ	τ	$\overline{v_e}$	$\overline{v_\mu}$	$\overline{v_\tau}$
e	e	e, μ	e, τ	e $\overline{v_e}$ μ, τ $\overline{v_\mu}$, $\overline{v_\tau}$	e $\overline{v_\mu}$	e $\overline{v_\tau}$
μ	e, μ	μ	μ, τ	μ, $\overline{v_e}$	e $\overline{v_e}$ μ, τ $\overline{v_\mu}$, $\overline{v_\tau}$	μ $\overline{v_\tau}$
τ	e, τ	μ, τ	τ	τ, $\overline{v_e}$	$\overline{v_\mu}$, τ	e $\overline{v_e}$ μ, τ $\overline{v_\mu}$, $\overline{v_\tau}$
$\overline{v_e}$	e $\overline{v_e}$ μ, τ $\overline{v_\mu}$, $\overline{v_\tau}$	μ, $\overline{v_e}$	τ, $\overline{v_e}$	$\overline{v_e}$	$\overline{v_e}$, $\overline{v_\mu}$	$\overline{v_e}$, $\overline{v_\tau}$
$\overline{v_\mu}$	e $\overline{v_\mu}$	e $\overline{v_e}$ μ, τ $\overline{v_\mu}$, $\overline{v_\tau}$	$\overline{v_\mu}$, τ	$\overline{v_e}$, $\overline{v_\mu}$	$\overline{v_\mu}$	$\overline{v_\mu}$ $\overline{v_\tau}$
$\overline{v_\tau}$	e $\overline{v_\tau}$	μ $\overline{v_\tau}$	e $\overline{v_e}$ μ, τ $\overline{v_\mu}$, $\overline{v_\tau}$	$\overline{v_e}$, $\overline{v_\tau}$	$\overline{v_\mu}$ $\overline{v_\tau}$	$\overline{v_\tau}$

جدول۴. ابرگروه وابسته به $\bar{\vartheta}$

$\oplus$	e^+	μ^+	τ^+	ν_e	ν_μ	ν_τ
e^+	e^+	e^+,μ^+	e^+,τ^+	$e^+,\mu^+,\tau^+,\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$	e^+,ν_μ	e^+,ν_τ
μ^+	e^+,μ^+	μ^+	μ^+,τ^+	μ^+ ν_e	$\nu_\mu,$ e^+,μ^+ ν_e	μ^+,ν_τ
τ^+	e^+,τ^+	μ^+,τ^+	τ^+	ν_e τ^+	ν_μ τ^+	$e^+,\mu^+,\tau^+,\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$
ν_e	$e^+,\mu^+,\tau^+,\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$	μ^+ ν_e	ν_e τ^+	ν_e	ν_e ν_μ	ν_τ ν_e
ν_μ	e^+,ν_μ	$\nu_\mu,$ e^+,μ^+ ν_e	ν_μ τ^+	ν_e ν_μ	ν_μ	ν_μ ν_τ
ν_τ	e^+,ν_τ	μ^+,ν_τ	$e^+,\mu^+,\tau^+,\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$	ν_τ ν_e	ν_μ ν_τ	ν_τ

درادامه نشان می‌دهیم که ابرگروه بر گرفته از زنجیربنیادی لپتون ها همان جدول ابر ساختاری برهم کنش بین لپتون‌ها می‌باشد. (جدول۲).

گزارۀ۸. ابر ساختار برهم کنش بین لپتون‌ها یک ابرگروه بنیادی است.

اثبات. در جدول۲ مشاهده می‌شود که در دوازده مکان ترکیب اعضا ۱۲ عضوی است و در۱۰ مکان ترکیب عناصر مجموعه ۶ عضوی است. همچنین در ۲۴ مکان تعداد اعضا ۴ عضوی و درسایر مکانها ترکیب دو عضوی است. با توجه به اینکه ابر عمل * در جدول۱، خاصیت جابجایی دارد کافیست مکان های بالای قطر اصلی آن را مورد بررسی قرار دهیم که این مکان ها عبارتند از:

$$x \in \mathrm{X}, x * x^+ = H$$

$$x \in \mathrm{X}, \nu_x * \overline{\nu_x} = H$$

بر طبق ضابطه ابرعمل بنیادی (تعریف ۳) ، نتیجه می‌گیریم که:

$$x \in \mathrm{X}\,, x\ o\ x^+ = \nu_x o\ \overline{\nu_x} = H$$

همچنین برای ترکیب های ۶ عضوی در جدول۱ داریم:

$$\nu_e * e^+ = \nu_\tau * \tau^+ = \{e^+, \mu^+, \tau^+, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$$

$$e * \overline{\nu_e} = \mu * \overline{\nu_\mu} = \tau * \overline{\nu_\tau} = \{e, \overline{\nu_e}\ \mu, \tau, \overline{\nu_\mu}, \overline{\nu_\tau}\}$$

حال بر طبق ضابطه ابرعمل بنیادی (تعریف ۳) ، نتیجه می‌گیریم که:

$$\nu_e\ o\ e^+ = \nu_\tau o\, \tau^+ = \{ e^+, \mu^+, \tau^+, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$$

$$e\ o\ \overline{\nu_e} = \mu o\, \overline{\nu_\mu} = \tau o\, \overline{\nu_\tau} = \{e, \overline{\nu_e}\ \mu, \tau, \overline{\nu_\mu}, \overline{\nu_\tau}\}$$

با استفاده از لم قبل مشاهده می‌کنیم که در سایر حالات نیز انطباق دو ابر عمل * و o برقرار است و لذا ابر ساختار برهم کنش بین لپتون ها یک ابرگروه بنیادی است.

گزارۀ ۹. اگر K زیر ابرگروهی از ابرگروه برهم کنش بین لپتون‌ها با حداقل هفت عضو باشد ، آن‌گاه $K = H$.

اثبات. درستی این گزاره از قسمت ج) گزاره۶ حاصل می‌شود.

گزارۀ ۱۰. ابرگروه بنیادی برهم کنش بین لپتون‌ها دارای دقیقاً ۸ زیر ابرگروه از مرتبۀ ۶ است.

اثبات. برطبق گزارۀ ۶ قسمت د) چون $|H| = ۱۲$، K زیر ابرگروهی از مرتبۀ ۶ است اگر و تنها اگر به ازای هر x از $X = \{e, \mu, \tau\}$ داشته باشیم:

$$[R(x) \subseteq K, S(x) \cap K = \phi]$$

یا

$$[R(x) \cap K = \phi, S(x) \subseteq K].$$

بنابراین K زیر ابرگروهی از مرتبه ۶ است اگر و تنها اگر به صورت یکی از موارد زیر باشد:

$$K = R(e) \cup R(\mu) \cup R(\tau), \qquad K = R(e) \cup R(\mu) \cup S(\tau)$$

$$K = R(e) \cup S(\mu) \cup R(\tau), \qquad K = R(e) \cup S(\mu) \cup S(\tau)$$

$$K = S(e) \cup R(\mu) \cup R(\tau), \qquad K = S(e) \cup S(\mu) \cup R(\tau)$$

$$K = S(e) \cup R(\mu) \cup S(\tau), \qquad K = S(e) \cup S(\mu) \cup S(\tau)$$

گزاره ۱۱. الف) زیرابرگروه های مرتبه ۲ و مرتبه ۴ از ابرگروه بنیادی $(H,\ o)$ بفرم $x\ o\ y$ هستند که $x\ o\ y$ دارای به ترتیب ۲ و ۴ عضو است.

ب) K زیر ابرگروه های مرتبه ۳ است اگروتنها اگر $K \in \{X,\ X^+, \bar{V}_X, V_X\}$.

اثبات. الف) بنا به جدول کیلی ابرگروه برهم کنش بین لپتون ها برای هر x وy از H اگر ۴ یا ۲ $= |x\ o\ y|$ آنگاه $x\ o\ y$ زیر ابرگروهی از H است. همچنین اگر $K = \{x, y\}$ زیر ابرگروهی از مرتبه ۲ باشد آنگاه $x\ o\ y \subseteq K$. چون $x \neq y$ پس $|x\ o\ y| \neq ۱$ و لذا $x\ o\ y = K$. اگر K زیر ابرگروهی از مرتبۀ۴ باشد آنگاه بنا به لم ۷ چون جداول ابرگروه‌های وابسته به ϑ و $\bar{\vartheta}$ فاقد زیر ابرگروه از مرتبۀ ۴ هستند پس داریم:

$$K \cap \{ e^{+}, \mu^{+}, \tau^{+}, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \} \neq \emptyset$$

و

$$K \cap \{ e, \mu, \tau, \overline{\nu_e}, \overline{\nu_\mu}, \overline{\nu_\tau} \} \neq \emptyset$$

حال با توجه به ضابطه ابرعمل بنیادی تعریف ۳ داریم:

$$\forall x, y \in K, \qquad xoy = \begin{cases} x \ominus y & x, y \in H^{-} \\ x \oplus y & x, y \in H^{+} \\ \{x, y\} & \begin{cases} x = \varphi^{-}(t), y = \vartheta(\varphi^{+}(t)) \\ x = \varphi^{+}(t), y = \bar{\vartheta}(\varphi^{-}(t)) \end{cases} \\ L[x, y] \cup \{x, y\} & \text{در سایر حالت ها} \end{cases}$$

لذا برای هر x و y از K داریم، $|x\ o\ y| = $ ۲ یا ۴ . در حالتی که $x\ o\ y = L[x, y] \cup \{x, y\}$ به وضوح داریم $|x\ o\ y| = $ ۴ و به این ترتیب $x\ o\ y = K$.

ب) این قسمت همانند قسمت الف با توجه به ضابطهٔ ابرعمل بنیادی تعریف ۳ ثابت می‌شود.

۴. نتیجه‌گیری

نظریه ابر ساختارهای جبری یکی از مباحثی است که در دهه‌های اخیر مورد توجه دانشمندان علوم مختلف قرار گرفته و تحقیقات ارزشمندی به چاپ رسیده است. در این مقاله با استفاده از مفاهیم ابرساختارها، رده ابرگروه‌های بنیادی معرفی و مورد تحقیق قرار گرفته است. با معرفی این رده از ابر ساختارها نشان داده‌ایم که ابرساختار برگرفته از فرآیند برهم کنش بین لپتون‌ها با در نظرگرفتن پایستگی اعداد لپتونی که برای اولین بار توسط موسوی نژاد و همکاران در[۱] معرفی گردیده است، تشکیل یک ابرگروه بنیادی می‌دهد. این ارتباط علاوه بر آنکه برقراری یک نظم نوین در انجام فرآیندها را نشان می‌دهد، این امکان را نیز فراهم می سازد تا با استفاده ازبرقراری خاصیت شرکت پذیری در مجموعه لپتون‌ها، بتوان پیشگویی‌هایی از فرآیند برهم کنش عناصر این مجموعه بهره‌مند شویم. ازجنبه نظریه ابرساختارها، رده ابرگروه‌های بنیادی را می‌توان مورد مطالعه بیشتر نیز قرار داد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان به پاس قدردانی از زحمات داوران محترم این مقاله که نظرات ارزشمند شان باعث بهتر شدن کیفیت این مقاله گردیده است کمال تشکر و امتنان را دارند.

References

۱. سید محمد موسوی نژاد، محمد اسلامی کلانتری و اکبر دهقان نژاد، *تعمیم نظریه ابر ساختارهای جبری به فیزیک بنیادی و فیزیک هسته ای*. **مجله پژوهش فیزیک ایران** جلد ۱۱، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۰.

2. Corsini, P., *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Second edition, Aviani Editore, Italy, 1993.

3. Corsini, P. and Leoreanu, V., *Applications of Hyperstructures Theory*, Advances in Mathematics, Kluwer Academic Publisher, 2003.

4. Chung, S., Chemical hyperstructures for Vanadium, *J. Chungcheong Math. Soc.* 27 (2) (2014) 309−317.

5. Davvaz, B., *Polygroup Theory and Related Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

6. Davvaz, B., Weak algebraic hyperstructures as a model for interpretation of chemical reactions, *Iranian J. Math. Chem.* 7 (2) (2016) 267−283.

7. Davvaz, B., Dehghan Nezhad, A. and Benvidi, A., Chemical hyperalgebra: Dismutation reactions, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 67 (2012) 55−63.

8. Davvaz, B., Dehghan Nezhad,A. and Benvidi, A., Chain reactions as experimental examples of ternary algebraic hyperstructures, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 65 (2) (2011) 491−499.

9. Davvaz, B., Dehghan Nezhad, A. and. Moosavi Nejad, S. M, Algebraic hyperstructure of observable elementary particles including the Higgs boson, Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 90(1) (2020) 169-176 (Springer).

10. Dehghan Nezhad, A., Moosavi Nejad, S. M., Nadjafikhah, M. and Davvaz, B. A physical example of algebraic hyperstructures: Leptons, Indian Journal of Physics, 86(11) (2012) 1027-1032 (Springer).

11. Ghadiri Harati, M., Davvaz, B. and Nekouian, R., Hv-semigroup structure on F2-offspring of a gene pool, International Journal of Biomathematics, 5(4), (2012), 1-13.

12. Marty. F., *Sur une Generalization de la Notion de Groupe*, 8th Congress Math. Scandenaves, Stockholm, Sweden, (1934) 45-49.

13. Muta, T., "*Foundations of Quantum Chromodynamics*". Second edition, World Sci. Lect. (Notes Phys. 57, 1998) 1

14. Al-Tahan, M. and Davvaz, B., Algebraic hyperstructures associated to biological inheritance, *Math. Biosci.* 285 (2017) 112−118.

15. Al-Tahan, M. and Davvaz, B., n-ary hyperstructures associated to the genotypes of F2-offspring, *Int. J. Biomath.*, 10(8) (2017) 1750118 (17 pages).

16. Vougiouklis, T., *“Hyperstructures and their representations”*, Hadronic Press, Florida (1994).