Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Grobner bases of determinantal ideals

Rashid Zaare Nahandi[1]

1. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

E-mail: rashidzn@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
14 April 2021
Received in revised form:
28 June 2021
Accepted:
3 July 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:
Grobner bases,
monomial order,
determinantal ideal.

ABSTRACT

Introduction

Determinantal ideals are one of important topics in Algebraic Geometry and Commutative Algebra. There are several examples of varieties as rational normal scrolls which their defining ideals are generated by minors of a matrix. In general, Grobner bases for an ideals helps us to correspond a monomial ideal to the main ideal with the same invariants in some senses. In this paper, we compute a Grobner bases for an ideal generated by 2-minors of a 2×n matrix of monomials.

Main results

Let $S = k[x_1, \dots, x_n]$ be the polynomial ring over a field k. Let for $1 \le i \le n$, $X_i = \{x_{il}, 1 \le l \le s\}$ for some positive integer s. Let

$$M=\begin{bmatrix} m_{11}(X_1) & \cdots & m_{1n}(X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{t1}(X_1) & \cdots & m_{tn}(X_n) \end{bmatrix}$$

be a matrix such that $m_{ij}(Xj)$ is a monomial of indeterminates in Xj. A t-minor $[r_1\, r_2 \dots r_t \mid c_1\, c_2 \dots c_t]$ of M is determinant of the submatrix with rows $r_1\, r_2 \dots r_t$ and columns $c_1\, c_2 \dots c_t$. Let $I_t(M)$ be the ideal generated by all t-minors of M. Let $\le$ be a monomial order and the following conditions are satisfied:

1. Each column is decreasing from top to bottom.

2. Each monomial in a column is greater that each monomial in a column in the right.
3. Each two monomials are different.

With these assumptions, we have the following theorem.

Theorem. For *t = 2,* set of all 2-minors of M is a Grobner bases for $I_2(M)$.

Proposition. Height of $I_t(M)$ is equal to n-t+1.

Conclusion

A 2 by n matrix of monomials appears in some topics of algebraic combinatorics and if we omit each one of the above conditions, the theorem might be false.

How to cite: Zaare Nahandi, R. (2023). Grobner bases of determinantal ideals. *Mathematical Researches*, 9 (1), 119-130.

 Publisher: Kharazmi Universit

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Kharazmi University
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

پایه گربنر ایده‌آل‌های دترمینانی

رشید زارع‌نهندی[1]✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: rashidzn@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۰۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

واژه‌های کلیدی:
ایده‌آل دترمینانی،
پایه گربنر،
ارتفاع ایده‌آل،
تک جمله‌ای.

ایده‌آل‌های دترمینانی از اهمیت زیادی در هندسه جبری و جبرجابجایی برخوردار هستند. مثال‌های مهم متعددی مانند واریته‌های طوماری نرمال گویا وجود دارند که ایده‌آل تعریف کننده آنها توسط کهادهای یک ماتریس عام تولید می‌شود. در حالت کلی یافتن پایه گربنر برای دسته‌ای از ایده‌آل‌ها در حلقه چندجمله‌ای‌ها به ما کمک می‌کند بسیاری از خواص و ناورداهای این ایده‌آل‌ها را با استفاده از ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای متناظر آنان به دست آوریم. در این مقاله، نخست مروری می‌شود بر برخی تعاریف اصلی در ایده‌آل‌های دترمینانی و سپس پایه گربنر برای یک دسته از ایده‌آلهای دترمینانی به دست می‌آید. همچنین ارتفاع ایده‌آل کهادهای ماکسیمال دسته‌ای از ماتریس‌ها محاسبه شده است.

استناد: زارع نهندی، رشید؛ (۱۴۰۲). پایه گربنر ایده‌آل‌های دترمینانی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۱۳۰-۱۱۹.

مقدمه

در این مقاله همهٔ حلقه‌ها جابه‌جایی و یک‌دار فرض می‌شوند. فرض کنید R یک حلقه و M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های در R باشند. به ازای عدد صحیح مثبت t، یک t- کهاد عبارت است از دترمینان یک زیرماتریس $t \times t$ از ماتریس M. در واقع برای ماتریس

$$M = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

یک t- کهاد به صورت آرایه $[r_1\, r_2 \dots r_t \mid c_1\, c_2 \dots c_t]$ نشان داده می‌شود که در آن $r_1, r_2, \dots, r_t$ شمارهٔ سطرها و $c_1, c_2, \dots, c_t$ شمارهٔ ستون‌های زیرماتریسی است که دترمینان آن محاسبه می‌شود. هر ایده‌آل از R که توسط تعدادی از t- کهادهای چنین ماتریسی تولید شود یک ایده‌آل دترمینانی گفته می‌شود.

فرض کنید $S = k[x_1, \dots, x_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با n متغیر با ضرایب در میدان k باشد. در جبرجابه‌جایی و هندسهٔ جبری معمولاً ایده‌آل کهادهای ماتریسی مطرح می‌شود که درایه‌های آن از حلقهٔ چندجمله‌ای‌های S باشد. به عنوان مثال فرض کنید در ماتریس M درایه‌ها به صورت متغیرهای مستقل x_{ij} باشند و حلقه S برابر $k[x_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n]$ در نظر گرفته شود. اگر $I_t(M)$ ایده‌آل تولید شده توسط همه t-کهادهای ماتریس M باشد، آن‌گاه مجموعه صفرهای این ایده‌آل در فضای k^{mn} و یا به اصطلاح واریته این ایده‌آل متناظر با مجموعه تمام ماتریس‌های با درایه‌های در میدان (بستهٔ جبری) k است که رتبهٔ آنها کمتر از t است. در این مثال هر ماتریس $m \times n$ با درایه‌های در میدان k را با پشت سر هم قرار دادن سطرها می‌توان به عنوان یک بردار در k^{mn} در نظر گرفت.

مطالعات و تحقیقات بسیار وسیعی در زمینهٔ ایده‌آل‌های دترمینانی در جبر جابه‌جایی انجام شده است. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به [۲] به عنوان یک منبع غنی که بیشتر اطلاعات کسب شده تا دههٔ هشتاد قرن بیستم را در بر دارد مراجعه کند. در کل می‌توان گفت که کار با چنین ایده‌آل‌هایی پیچیده بوده و به دست آوردن ناورداهای آنها دشوار است. به همین دلیل سعی می‌شود پایهٔ گربنر این نوع ایده‌آل‌ها به دست آید تا متناظراً یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای داشته باشیم و ناورداهای آن محاسبه کنیم. در مقاله حاضر نخست یک پایهٔ گربنر برای ماتریس $2 \times n$ با درایه‌های تک‌جمله‌ای به دست می‌آوریم. در ادامه ارتفاع دسته خاصی از ایده‌آل‌های دترمینانی را با استفاده از ایده‌آل تک‌جمله‌ای متناظر آن محاسبه می‌کنیم. مفهوم ارتفاع نیز یکی از مفاهیم و ناورداهای بنیادی جبرجابه‌جایی است.

ترتیب تک‌جمله‌ای و پایهٔ گربنر

حلقهٔ $S = k[x_1, \dots, x_n]$ را در نظر بگیرید. منظور از یک تک‌جمله‌ای در این حلقه، عبارتی مانند $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ است که در آن a_iها اعداد صحیح نامنفی هستند. مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌های با n متغیر را با $\mathbb{T}^n$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱,۱. ترتیب تک‌جمله‌ای یک ترتیب خطی مانند $\geq$ در $\mathbb{T}^n$ است که دو شرط زیر را نیز داشته باشد:

- به ازای هر عضو دلخواه از $\mathbb{T}^n$ مانند m داشته باشیم $m \geq 1$.
- به ازای هر سه عضو دلخواه از $\mathbb{T}^n$ مانند a و b و c که $a \geq b$ داشته باشیم $ac \geq bc$.

مثال ۱,۲. یکی از مهمترین ترتیب‌ها، ترتیب لغت‌نامه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \geq_l x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

اگر و تنها اگر اولین درایه ناصفر از سمت چپ در بردار $(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ مثبت باشد. مثال دیگر ترتیب لغت‌نامه‌ای مدرج است که با $\geq_{dl}$ نشان داده می‌شود و اول درجه کلی دو تک‌جمله‌ای یعنی جمع توان‌های متغیرها را با هم مقایسه می‌کند و تک‌جمله‌ای با درجه بیشتر را بزرگ‌تر از دیگری قلمداد می‌کند و اگر درجه‌ها با هم مساوی باشند طبق ترتیب لغت‌نامه‌ای عمل می‌کند.

مثال ۱,۳. ترتیب عکس لغت‌نامه‌ای مدرج به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \geq_{drl} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

اگر و تنها اگر $a_1 + \cdots + a_n > b_1 + \cdots + b_n$ و یا تساوی برقرار بوده و اولین درایه ناصفر از سمت راست در بردار $(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ منفی باشد.

مجموعه $\mathbb{T}^n$ با هر ترتیب تک‌جمله‌ای یک مجموعه خوش‌ترتیب بوده و هر زیرمجموعه ناتهی از آن دارای کوچکترین عضو است.

فرض کنید یک ترتیب تک‌جمله‌ای در $\mathbb{T}^n$ داده شده است. نسبت به این ترتیب، برای هر چندجمله‌ای مانند f در S بزرگ‌ترین تک‌جمله‌ای با ضریب غیرصفر آن را تک‌جمله‌ای پیشرو، ضریب آن را ضریب پیشرو و تک‌جمله‌ای پیشرو به همراه ضریب پیشرو را جمله پیشرو f گویند و به ترتیب با $\mathrm{lp}_{\geq}(f)$، $\mathrm{lc}_{\geq}(f)$ و $\mathrm{lt}_{\geq}(f)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱,۴. برای ترتیب لغت‌نامه‌ای مدرج و $f = 4x_1^2x_2^4x_3^2 + 2x_1x_2^6x_3$ داریم

$$\mathrm{lp}_{\geq_{dl}}(f) = x_1^2x_2^4x_3^2, \qquad \mathrm{lc}_{\geq_{dl}}(f) = 4, \qquad \mathrm{lt}_{\geq_{dl}}(f) = 4x_1^2x_2^4x_3^2,$$

در حالی که با در نظر گرفتن ترتیب عکس لغت‌نامه‌ای مدرج داریم

$$\mathrm{lp}_{\geq_{drl}}(f) = x_1x_2^6x_3, \qquad \mathrm{lc}_{\geq_{drl}}(f) = 2, \qquad \mathrm{lt}_{\geq_{drl}}(f) = 2x_1x_2^6x_3.$$

تعریف ۱،۵ فرض کنید یک ترتیب تک‌جمله‌ای مانند $\geq$ داده شده است. فرض کنید I یک ایده‌آل ناصفر در S باشد. ایده‌آل جملات پیشرو I نسبت به این ترتیب را به صورت

$$\mathrm{lt}_{\geq}(I) = \langle \mathrm{lt}_{\geq}(f),\ \ f \in I \rangle$$

تعریف می‌کنیم. زیرمجموعهٔ $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ از ایده‌آل I را یک پایهٔ گربنر برای I نسبت به ترتیب $\geq$ گوییم اگر

$$\mathrm{lt}_{\geq}(I) = \langle \mathrm{lt}_{\geq}(g_1),\ \ \dots, \mathrm{lt}_{\geq}(g_s) \rangle.$$

این بدین معنی است که به ازای هر چندجمله‌ای دلخواه از I مانند f، عضوی از پایه گربنر وجود دارد که تک‌جمله‌ای پیشرو آن، تک‌جمله‌ای پیشرو f را عاد می‌کند. ثابت می‌شود که هر پایه گربنر یک ایده‌آل، یک مجموعه مولد برای آن ایده‌آل است ولی هر مجموعه مولد، لزوما یک پایه گربنر نیست. در واقع ممکن است جملات پیشرو دو چندجمله‌ای در یک ترکیب با هم حذف شوند و در چندجمله‌ای حاصل جمله پیشرو توسط جملات پیشرو چندجمله‌ای‌های قبلی عاد نشود. بر اساس همین بحث، نحوه کار الگوریتم بوخبرگر برای به دست آوردن یک پایه گربنر با استفاده از یک مجموعه مولد ایده‌آل توسط بوخبرگر معرفی شد. برای بیان الگوریتم بوخبرگر نخست باید الگوریتم تقسیم را بیان کنیم.

الگوریتم تقسیم. فرض کنید f و $f_1, f_2, \dots, f_t$چندجمله‌ای‌های غیرصفر باشند. می‌خواهیم f را به بقیه چندجمله‌ای‌ها تقسیم کرده و خارج قسمت و باقیمانده‌ای به دست آوریم. برای این کار جمله پیشرو f را در نظر گرفته و اگر توسط هیچ‌کدام از جملات پیشرو f_i ها عاد نشود، خارج قسمت را برابر صفر و خود f را به عنوان باقیمانده می‌گیریم. در غیر این صورت، اولین f_i را پیدا می‌کنیم که جمله پیشرو آن، جمله پیشرو f را عاد می‌کند. فرض کنید $\mathrm{lt}_{\geq}(f) = m \cdot \mathrm{lt}_{\geq}(f_i)$. در این صورت $f - m\, f_i$ را به دست آورده و همان مراحل را برای آن انجام می‌دهیم. اگر در نهایت به صفر رسیدیم، گوییم f به $f_1, f_2, \dots, f_t$ بخش‌پذیر است و یا تحویل‌پذیر به صفر است. اگر به مرحله‌ای برسیم که هیچ‌کدام از جملات پیشرو f_iها جمله پیشرو چندجمله‌ای حاصل را عاد نکند به آن چندجمله‌ای، باقیمانده تقسیم f بر $f_1, f_2, \dots, f_t$ گوییم.

تعریف ۱،۶. فرض کنید یک ترتیب تک‌جمله‌ای داده شده است. دو چندجمله‌ای f_1 و f_2 را در نظر بگیرید. S-چندجمله‌ای f_1 و f_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(f_1, f_2) = \frac{\mathrm{lcm}\left(\mathrm{lp}_{\geq}(f_1),\ \mathrm{lp}_{\geq}(f_2)\right)}{\mathrm{lt}_{\geq}(f_1)}\, f_1 \ - \ \frac{\mathrm{lcm}\left(\mathrm{lp}_{\geq}(f_1),\ \mathrm{lp}_{\geq}(f_2)\right)}{\mathrm{lt}_{\geq}(f_2)}\, f_2\,,$$

که در آن lcm نشان‌دهنده کوچکترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای است. در واقع S-چندجمله‌ای f_1 و f_2 طوری تعریف شده که جملات پیشرو f_1 و f_2 با هم حذف می‌شوند.

الگوریتم بوخبرگر. فرض کنید I ایده‌آلی باشد که توسط $f_1, f_2, \dots, f_t$ تولید می‌شود. هدف به دست آوردن مجموعه G است که یک پایه گربنر برای ایده‌آل I نسبت به ترتیب $\geq$ باشد.

قدم اول. گیریم $G := \{f_1, \dots, f_t\}$

قدم دوم. گیریم $\mathrm{L} = \{(f_i, f_j) \mid f_i \neq f_j \in G\}$

قدم سوم. تا زمانی که L مجموعه تهی نیست ادامه بده و اگر تهی باشد الگوریتم خاتمه می‌یابد.

قدم سوم. یک عضو از L را انتخاب کرده و آن را از L حذف می‌کنیم. سپس S-چندجمله‌ای این زوج را محاسبه و با الگوریتم تقسیم باقیمانده آن بر G را به دست می‌آوریم.

قدم چهارم. اگر این باقیمانده صفر باشد به قدم سوم می‌رویم و اگر باقیمانده صفر نبود، آن را به مجموعه G اضافه می‌کنیم و به قدم دوم برمی‌گردیم.

این الگوریتم پس از تعداد متناهی عملیات، به پایان می رسد و حاصل یک پایه گربنر است. برای مشاهده یک اثبات کامل می‌توان به قضیهٔ ۱,۷,۸ در [۱] مراجعه کرد.

محک بوخبرگر. مجموعهٔ مولد G از ایده‌آل I تشکیل یک پایهٔ گربنر برای I (نسبت به ترتیب داده شده) می‌دهد اگر و تنها اگر به ازای هر دو عضو آن مانند f_1 و f_2، باقیمانده تقسیم S-چندجمله‌ای f_1 و f_2 به G برابر صفر باشد.

نکتهٔ ۱,۷. فرض کنید $G := \{f_1, \dots, f_t\}$ و f یک چندجمله‌ای دلخواه باشد. شرط صفر بودن باقیمانده تقسیم f به G، معادل این است که چندجمله‌ای‌های $h_1, h_2, \dots, h_t$ موجود باشند که

$$f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_t f_t$$

مشروط بر این که به ازای هر $1 \leq i \leq t$، داشته باشیم $\mathrm{lp}_{\geq}(f) \geq \mathrm{lp}_{\geq}(h_i f_i)$. [۱]

خواننده علاقه‌مند می‌تواند مباحث مربوط به پایه گربنر را در منابع [۱]، [۵] و [۸] مطالعه کند.

۱. پایهٔ گربنر ایده‌آل کهادهای ماکسیمال ماتریس $2 \times \mathrm{n}$ از تک‌جمله‌ای‌ها

در این قسمت، ایده‌آل کهادهای ماکسیمال ماتریسی را در نظر می‌گیریم که درایه‌های آن تک‌جمله‌ای هستند. فرض کنید s یک عدد صحیح مثبت باشد و $[s] = \{1, \dots, s\}$. به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $X_i = \{x_{il}, 1 \leq l \leq s\}$ را به عنوان مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل می‌گیریم. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11}(X_1) & \cdots & m_{1n}(X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{t1}(X_1) & \cdots & m_{tn}(X_n) \end{bmatrix}$$

که در آن m_{ij}ها تک‌جمله‌ای‌هایی از متغیرهای X_j هستند و دو شرط زیر برقرار است:

۱. در هر ستون تک‌جمله‌ای‌ها از بالا به پایین با ترتیب لغت‌نامه‌ای به صورت نزولی چیده شده‌اند.
۲. هر تک‌جمله‌ای در هر ستون از هر تک‌جمله‌ای در ستون‌های بعدی بزرگ‌تر است.
۳. هیچ دو تک‌جمله‌ای باهم مساوی نیستند.

توجه شود که متغیرهای موجود در هر ستون با ستون دیگر متفاوت هستند و به ازای هر $l \geq j$ و هر $k \geq i$ داریم $m_{ij} \geq m_{kl}$ و اگر هر کدام از دو نامساوی اول اکید باشد، آن‌گاه نامساوی سوم نیز اکید است.

به ازای هر عدد صحیح r با شرط $1 \leq r \leq t$، ایده‌آل تولید شده توسط همه r-کهادهای M را با $I_r(M)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲٫۱. فرض کنید

$$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\},\ X_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}\}, X_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}\},$$
$$M=\begin{bmatrix} x_{12}x_{13} & x_{21}x_{23} & x_{31}x_{32} \\ x_{12}x_{14} & x_{22}x_{23} & x_{31}x_{34} \\ \mathrm{x}_{13}\mathrm{x}_{14} & x_{23}x_{24} & \mathrm{x}_{32}\mathrm{x}_{34} \end{bmatrix}.$$

لم ۲٫۲. با مفروضات بالا و با ترتیب لغت‌نامه‌ای، جمله پیشرو هر t-کهاد برابر حاصل‌ضرب تک‌جمله‌ای‌های روی قطر اصلی آن است.

برهان. فرض کنید $[1 \dots \mathrm{t} \mid c_1 \dots c_t]$ یک t-کهاد دلخواه باشد (از این به بعد در کهادهای ماکسیمال از نوشتن سطرها خودداری خواهد شد). این کهاد را طبق بسط لاپلاس می‌نویسیم. بزرگترین تک‌جمله‌ای حاضر در این کهاد برابر m_{1c_1} است. با حذف سطر و ستون این درایه، یک $(t-1)$-کهاد به صورت $[2 \dots t \mid c_2 \dots c_t]$ به دست می‌آید. با استقراء روی t، نتیجه می‌شود که جمله پیشرو برابر

$$m_{1c_1} m_{2c_2} \cdots m_{tc_t}$$

است که همان حکم مطلوب است. ■

قضیهٔ ۲٫۳. در حالتی که t برابر ۲ باشد، مجموعهٔ ۲-کهادهای ماتریس M یک پایه گربنر نسبت به ترتیب لغت‌نامه‌ای برای ایده‌آل $I_2(M)$ است.

برهان. فرض کنید $\mathrm{F}_1 = [\,\mathrm{b}_1\ \mathrm{b}_2]$ و $\mathrm{F}_2 = [\,\mathrm{b}_1'\ \mathrm{b}_2']$ دو کهاد 2×2 دلخواه باشند. ثابت می‌کنیم S-چندجمله‌ای این دو کهاد نسبت به مجموعهٔ ۲-کهادها به صفر تحویل‌پذیر است. چهار حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: $b_1 = b_1', b_2 < b_2'$. در این حالت با محاسبه ساده‌ای داریم:

$$F_1 = m_{1b_1}m_{2b_2} - m_{2b_1}m_{1b_2}$$

$$F_2 = m_{1b_1}m_{2b_2'} - m_{2b_1}m_{1b_2'}$$

$$S(F_1, F_2) = m_{2b_2'}F_1 - m_{2b_2}F_2$$

$$= -m_{2b_1}m_{1b_2}m_{2b_2'} + m_{2b_1}m_{2b_2}m_{1b_2'} = -\, m_{2b_1}[b_2\ \ b_2'].$$

حالت دوم: $b_2 = b_2', b_1 < b_1'$. در این حالت نیز داریم:

$$F_1 = m_{1b_1}m_{2b_2} - m_{2b_1}m_{1b_2}$$

$$F_2 = m_{1b_1'}m_{2b_2} - m_{2b_1'}m_{1b_2}$$

$$S(F_1, F_2) = m_{1b_1'}F_1 - m_{1b_1}F_2$$

$$= -m_{2b_1}m_{1b_1'}m_{1b_2} + m_{1b_1}m_{2b_1'}m_{1b_2} = \ m_{1b_2}[b_1\ \ b_1'].$$

حالت سوم: $b_2 = b_1'$. در این حالت داریم:

$$F_1 = m_{1b_1}m_{2b_2} - m_{2b_1}m_{1b_2}$$

$$F_2 = m_{1b_2}m_{2b_2'} - m_{2b_2}m_{1b_2'}$$

$$\begin{aligned}
S(F_1, F_2) &= \frac{lcm\left(m_{1b_1}m_{2b_2}, m_{1b_2}m_{2b_2'}\right)}{m_{1b_1}m_{2b_2}}F_1 - \frac{lcm\left(m_{1b_1}m_{2b_2}, m_{1b_2}m_{2b_2'}\right)}{m_{1b_2}m_{2b_2'}}F_2 \\
&= -\frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{2b_1}m_{1b_2}m_{1b_2}m_{2b_2'} + \frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{1b_1}m_{2b_2}m_{2b_2}m_{1b_2'} \\
&= -\frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{2b_1}m_{1b_2}m_{1b_2}m_{2b_2'} + \frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{1b_1}m_{2b_2}m_{2b_2}m_{1b_2'} \\
&\quad - \frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{2b_1}m_{1b_2}m_{2b_2}m_{1b_2'} + \frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{2b_1}m_{1b_2}m_{2b_2}m_{1b_2'} \\
&\quad - \frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{2b_1}m_{1b_2}m_{2b_2}m_{1b_2'} + \frac{1}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}m_{2b_1}m_{1b_2}m_{2b_2}m_{1b_2'} \\
&= \frac{m_{2b_2}m_{1b_2'}}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}[b_1\ b_2] - \frac{m_{2b_1}m_{1b_2}}{\gcd\left(m_{1b_2}, m_{2b_2}\right)}[b_2\ b_2'].
\end{aligned}$$

حالت چهارم: $\{b_1, b_2\} \cap \{b'_1, b'_2\} = \emptyset$. در این صورت جملات پیشرو دو کهاد نسبت به هم اول هستند و بنابر [۱]، S-چندجمله‌ای آنها به صفر تحویل می‌یابد. تمامی حالت‌ها در شرط نکته ۱٫۷ صدق می‌کنند و در نتیجه حکم برقرار است.■

محاسبات فراوان نشان می‌دهد که در قضیه بالا به جای عدد ۲ می‌توان هر عدد صحیح مثبت دیگری در نظر گرفت. بنابراین حدس زیر مطرح می‌شود.

حدس. مجموعه کهادهای ماکسیمال ماتریس M یک پایه گربنر برای ایده‌آل $I_t(M)$ نسبت به ترتیب مذکور در بالا است.

در [۵] ثابت شده است که در حالتی که درایه‌های ماتریس اصلی متغیرهای مستقل یعنی تک‌جمله‌ای‌های درجه ۱ متفاوت باشند، مجموعه r-کهادها برای هر $r \leq \mathrm{t}$، تشکیل یک پایه گربنر می‌دهد. این مطلب در حالت کلی صحیح نیست. مثال زیر شاهدی بر این ادعا است.

مثال ۲٫۴. ماتریس طرح شده در مثال ۲٫۱ را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم‌افزار CoCoA، یک پایه گربنر برای ایده‌آل ۲-کهادهای این ماتریس به دست می آوریم. مشاهده می‌شود که این پایه گربنر علاوه بر خود ۲-کهادها، شامل چندجمله‌ای‌های زیراست [۳]:

$$x_{22}x_{23}x_{31}x_{32}^2 - x_{23}x_{24}x_{31}^2x_{32}, \qquad x_{12}x_{14}x_{31}x_{32}^2 - x_{13}x_{14}x_{31}^2x_{32}$$

$$x_{13}^2x_{14}x_{31}x_{34} - x_{13}x_{14}^2x_{31}x_{32}, \qquad x_{13}^2x_{14}x_{22}x_{23} - x_{13}x_{14}^2x_{21}x_{23}$$

$$x_{13}^2x_{14}x_{23}x_{24}x_{31}^2x_{32} - x_{13}x_{14}^2x_{21}x_{23}x_{31}x_{32}^2.$$

قضیهٔ ۲٫۳ درصورتی که فرض متفاوت بودن درایه‌ها را در نظر نگیریم، حتی زمانی که درجه درایه‌ها یک باشد، ممکن است درست نباشد. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲٫۵. فرض کنید ماتریس M به صورت زیر باشد:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن ترتیب لغت‌نامه‌ای نسبت به $x_1 > x_2 > x_3$، داریم:

$$[2\ 3] = -x_1x_3 + x_2^2$$

$$[1\ 3] = x_1x_2 - x_3^2$$

$$x_2[2\ 3] + x_3[1\ 3] = x_2^3 - x_3^3 \in I_2(M).$$

جمله پیشرو این چندجمله‌ای برابر x_2^3 است که توسط هیچ‌کدام از جملات پیشرو ۲-کهادهای M عاد نمی‌شود. بنابراین، مجموعه ۲-کهادها نسبت به ترتیب گفته شده، تشکیل پایه گربنر نمی‌دهد. البته باید توجه داشته باشیم که قضیهٔ ۲٫۳ یک

طرفه است و اگر مجموعه ۲-کهادهای ماتریسی یک پایهٔ گربنر باشد، لزوما مفروضات مطرح شده برای ماتریس که در ابتدای این قسمت بیان شده است، برقرار نباشد.

یک ایده‌آل در حلقه چندجمله‌ای‌ها را ایده‌آل تک‌جمله‌ای گوییم اگر توسط تعدادی تک‌جمله‌ای تولید شود. اگر ایده‌آل تک‌جمله‌ای ایده‌آلی اول باشد، لزوما مولدهای آن تک‌جمله‌ای‌های درجه یک یعنی متغیرها هستند. ارتفاع یک ایده‌آل اول برابر طول بلندترین زنجیری از ایده‌آلهای اول مشمول در آن ایده‌آل تعریف می‌شود. ارتفاع ایده‌آل دلخواه نیز برابر کمترین ارتفاع ایده‌آلهای اول شامل آن ایده‌آل گرفته می‌شود. بنابراین ارتفاع یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای اول برابر تعداد مولدهای آن است. ارتفاع ایده‌آل I را با نماد $\mathrm{height}(I)$ نشان می‌دهیم.

ثابت شده است که ارتفاع یک ایده‌آل در حلقه چندجمله‌ای‌ها برابر ارتفاع ایده‌آل جملات پیشرو آن است (به عنوان مثال به [4, Corol. 6.1.5] مراجعه شود).

گزارهٔ ۲،۶. فرض کنید $I_t(M)$ ایده‌آل t-کهادها (کهادهای ماکسیمال) ماتریس M باشد. در این صورت، ارتفاع این ایده‌آل برابر $n-t+1$ است.

برهان. ثابت می‌کنیم ارتفاع ایده‌آل جملات پیشرو $I_t(M)$ برابر $n-t+1$ است. در [2, Thm. 2.1] ثابت شده است که $\mathrm{height}\left(\mathrm{lt}_{\geq}\left(I_t(M)\right)\right) = \mathrm{height}(I_t(M)) \leq n-t+1$. از طرف دیگر اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی باشد که شامل $\mathrm{lt}_{\geq}\left(I_t(M)\right)$ بوده و ارتفاع آن از $n-t+1$ اکیدا کوچک‌تر است، آنگاه تعداد مولدهای آن از $n-t+1$ کمتر بوده و در نتیجه حداقل t ستون در ماتریس M وجود دارند که متغیرهای موجود در آن‌ها در $\mathfrak{p}$ ظاهر نشده‌اند. بنابراین تک‌جمله‌ای پیشرو کهاد حاصل از این t ستون در ایده‌آل $\mathfrak{p}$ قرار ندارد. این تناقض نتیجه می‌دهد که ارتفاع $\mathrm{lt}_{\geq}\left(I_t(M)\right)$ و درنتیجه ارتفاع $I_t(M)$ نمی‌تواند از $n-t+1$ کوچکتر باشد و درنتیجه مساوی آن است. ■

حالتی که ماتریس مورد نظر $2\times n$ با درایه‌های چندجمله‌ای‌های همگن درجه ۱ باشد، در [۷] مورد بررسی قرار گرفته و پایهٔ گربنر و ارتفاع ایده‌آل ۲-کهادهای آن محاسبه شده است.

Refrences

1. W. Adams, P. Loustaunau, An Introduction to Gröbner Bases, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics,1994.

2. W. Bruns, U. Vetter, Determinantal Rings, LNM 1327, Springer-Verlag, 1988.

3. CoCoA System, Computations in Commutative Algebra, http://cocoa.dima.unige.it/

4. J. Herzog, T. Hibi, Monomial Ideals, Springer, 2011.

5. M. Kreuzer, L. Robbiano, Computational Commutative Algebra 1, Springer, 2000.

6. B. Sturmfels, Gröbner bases and Stanley decomposition of determinantal ideals, Mathematische Zeitschrift, 205 (1990) 137-144.

7. Rahim Zaare-Nahandi, Rashid Zaare-Nahandi, Gröbner basis and free resolution of the ideal of 2-minors of a 2 × n matrix of linear forms, Communications in Algebra, 28 (9) (2000) 4433-4453.

۸. رشید زارع نهندی، بوخبرگر و پایه‌های گربنر، فرهنگ و اندیشه ریاضی، دورهٔ ۲۹ شمارهٔ ۴۴ (۱۳۸۹) ۵۵-۸۰.