Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

A Characterization of Algebraic Elements of Prime Degree by Using Valuation Basis

Azadeh Nikseresht[1]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. E-mail: a.nikseresht@alumni.kntu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 10 May 2021
Received in revised form: 27 August 2024
Accepted:3 September 2024
Published online: 10 November 2024

Keywords:
Valued fields,
Field extensions,
Algebraic elements of prime degree,
Distinguished pair,
Saturated distinguished chain,
Valuation basis.

ABSTRACT

A valuation v on a field K we mean a surjective mapping $v: K \to G(K) \cup \{\infty\}$, where $G(K)$ its corresponding value group is a totally ordered additive abelian group such that for all x, y in K, the following properties are satisfied:

i. $v(x) = \infty$ if and only if $x = 0$,
ii. $v(xy) = v(x) + v(y)$,
iii. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

The pair (K, v) is called a valued field and whenever the valuation is obvious from the content (for abbreviation), we will sometimes call it by K. For a valued field (K, v), the valuation ring and the residue field are denoted respectively by O_K and $R(K)$. For any α in the valuation ring O_K, the image of α under the canonical homomorphism $*: O_K \to R(K)$ is denoted by α^* and called its v-residue. We will denote the algebraic closure of a field K by $\widetilde{K}$. By the degree of an element $\alpha \in \widetilde{K}$, we mean the degree of the extension $K(\alpha)|K$ and denote it by $\deg \alpha$. We know that a valued field (K, v) is called henselian if the valuation v admits a unique extension to $\widetilde{K}$, or equivalently to every algebraic extension of K. If (K, v) is a henselian valued field, we denote the unique extension of v to $\widetilde{K}$ by $\tilde{v}$. The valuation on an algebraic extension K' of K is defined the restriction of $\tilde{v}$ to K' and denoted again by $\tilde{v}$. In this paper, unless otherwise stated, (K, v) is a henselian valued field.

In the study of field extensions in valuation theory, simple algebraic extensions of prime degree hold a prominent position. We note, for example, one case that for every (not necessarily henselian) valued field K with $char\ K = p > 0$, a Galois extension of degree p is an Artin-Schreier extension which is a special kind of simple algebraic extensions of prime degree. The aim of this paper is to present a classification of algebraic elements of prime degree by using the concept of valuation basis. In this classification, the notions of defectless extensions, distinguished pairs and saturated distinguished chains of algebraic elements, and also a set $(\{\tilde{v}(\alpha - a) | a \in K\}$ for an algebraic element $\alpha)$ corresponding to algebraic elements over henselian valued fields are appeared. Let us briefly look at these concepts and their relations.

Distinguished pairs and saturated distinguished chains first introduced by Popescu and Zaharescu over local fields, i.e., complete discrete rank one valued fields, to describe the set of all irreducible polynomials with coefficients in such fields. These concepts which later have been generalized

over valued fields of arbitrary rank are known as powerful research tools in valuation theory. In the sequel, we present their descriptions (over valued fields of arbitrary rank) and other related concepts used in the our main result.

Let $K(x)$ be a rational function field in an variable x. Alexandru, Popescu and Zaharescu in the number of subsequent papers gave a complete description of all extensions of valuations of K to $K(x)$. For this, they used the key concept of minimal pairs. A pair (α, δ) belonging to $\widetilde{K} \times G(\widetilde{K})$ is said to be minimal (with respect to (K, v)) if whenever $\beta \in \widetilde{K}$ satisfies $\tilde{v}(\alpha - \beta) \geq \delta$, then $\deg \alpha \leq \deg \beta$. It is clear that when $\alpha \in K$, then (α, δ) is a minimal pair for each $\delta \in G(\widetilde{K})$, and that for $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$, (α, δ) is minimal if and only if δ is strictly greater than each element of the set $M(\alpha, K)$ defined by $M(\alpha, K) = \{\tilde{v}(\alpha - \beta) | \beta \in \widetilde{K}, deg\, \beta < deg\, \alpha\}$. This led to the invariant $\delta_K(\alpha)$ defined for those $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$ for which $M(\alpha, K)$ has an upper bound in $G(\widetilde{K})$ by $\delta_K(\alpha) = \sup M(\alpha, K)$, which is called the main invariant of α. In 1995, it was proved that if (K, v) is a local field, then for each $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$, the set $M(\alpha, K)$ has maximum or otherwise $\delta_K(\alpha) \in M(\alpha, K)$. This led to create the concepts of distinguished pairs and saturated distinguished chains. A pair (α, β) of elements of $\widetilde{K}$ is called a distinguished pair (more precisely a (K, v)-distinguished pair) if the following three conditions are satisfied: (i) $\deg \alpha > \deg \beta$, (ii) $\tilde{v}(\alpha - \beta) = \delta_K(\alpha)$, (iii) if γ belonging to K has degree less than that of β, then $\tilde{v}(\alpha - \gamma) < \tilde{v}(\alpha - \beta)$. Distinguished pairs give rise to distinguished chains in a natural manner. A chain $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ of elements of $\widetilde{K}$ is said to be a saturated (complete) distinguished chain for α if (α_i, α_{i+1}) is a distinguished pair for $0 \leq i \leq r - 1$ and $\alpha_r \in K$. The number r is called the length of the chain for α.

When (K, v) is a local field, every $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$ has a distinguished pair and a saturated distinguished chain. However, unlike in the discrete rank one case, there are instances when $\delta_K(\alpha) \in G(\widetilde{K})$ but fails to belong to $M(\alpha, K)$. This led to consider the question that how can one characterize those henselian valued fields (K, v) for which each $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$, has a distinguished pair? Aghigh and Khanduja solved this problem by using the concept of defectlessness. Before presenting this result, we remark the concept of defectless extensions. If (K, v) is a henselian valued field and K' a finite extension of K, the extension $K'|K$ is called defectless whenever $[K' : K] = [R(K') : R(K)][G(K') : G(K)]$. Using this concept, Aghigh and Khanduja proved that for a henselian valued field (K, v), the following two statement are equivalent:

i. To each $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$, there corresponds $\beta \in \widetilde{K}$ with $\deg \beta < \deg \alpha$ such that $\delta_K(\alpha) = \tilde{v}(\alpha - \beta)$.
ii. For each $\theta \in \widetilde{K}$, $K(\theta)|K$ is a defectless extension.

They also proved that an element $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$ has a saturated distinguished chain if and only if the extension $K(\alpha)|K$ is defectless.

Now consider a distinguished pair (α, β) for an element $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$. There correspond the valued fields $K(\alpha)$ and $K(\beta)$. There are some relations between the corresponding value groups, residue fields, the defect of the extensions $K(\alpha)|K$ and $K(\beta)|K$, and between the degrees of the elements α and β. Particularly, the degree of β divides the degree of α. We utilize this result in the main theorem of this paper to show that a distinguished pair for an algebraic element α of prime degree is always of length one. Moreover, we use the concept of valuation basis defined as follows:

Let (K, v) be a henselian valued field. A set of nonzero elements $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

of an n-dimensional extension (K', v') of (K, v) is said to be a valuation basis of $(K', v')|(K, v)$ if for every choice of elements $c_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, we have $v'(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v'(c_i \alpha_i)\}$.

We show that if $K'|K$ is a defectless extension of degree a prime number p and $\gamma \in K'$ is such that either $\tilde{v}(\gamma) \notin G(K)$ or $\tilde{v}(\gamma) = 0$ and the $\tilde{v}$-residue γ^* of γ not belonging to $R(K)$, then the set $\{1, \gamma, \ldots, \gamma^{p-1}\}$ is a valuation basis of $K'|K$. Using this result, it is also proved that for an algebraic element $\alpha \in \widetilde{K} \setminus K$ of prime degree, the following statements are equivalent: (i) The extension $K(\alpha)|K$ is defectless; (ii) α has a (K, v)-distinguished pair; (iii) α has a (K, v)-saturated distinguished chain; (iv) the set $\{\tilde{v}(\alpha - a) | a \in K\}$ corresponding to α has a maximum element. In fact, we show that for an algebraic element α of prime degree, every distinguished pair is a saturated distinguished chain; and hence the length of the chain for α is always one. Moreover, we employ the concept of the valuation basis for proving the existence of maximum for the corresponding set $\{\tilde{v}(\alpha - a) | a \in K\}$.

How to cite: Nikseresht, Azadeh. (2024). A characterization of algebraic elements of prime degree by using valuation basis. *Mathematical Researches*, **10** (3), 136 – 150.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

یک رده‌بندی از عناصر جبری از درجه اول با استفاده از پایه ارزیابی

آزاده نیک‌سرشت [۱] ✉

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران. رایانامه: a.nikseresht@alumni.kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۲/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۶/۰۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۱۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰

چکیده

عناصر جبری از درجه اول جایگاه ویژه‌ای در مطالعه توسیع‌ها در نظریه ارزیابی دارند. به‌علاوه جفت‌های متمایز و زنجیرهای متمایز اشباع‌شده (کامل) ابزارهای کلیدی در بررسی خواص توسیع‌های جبری و همچنین چندجمله‌ای‌ها روی میدان‌های ارزیابی هستند. در این مقاله برای هر عنصر جبری از درجه اول روی یک میدان ارزیابی هنسلی، با استفاده از مفهوم پایه ارزیابی یک رده‌بندی از جفت‌های متمایز و زنجیرهای متمایز اشباع‌شده ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:
میدان‌های ارزیابی،
توسیع‌های میدان،
عناصر جبری از درجه اول،
جفت متمایز،
زنجیر متمایز اشباع‌شده،
پایه ارزیابی.

استناد: نیک‌سرشت، آزاده (۱۴۰۳). یک رده‌بندی از عناصر جبری از درجه اول با استفاده از پایه ارزیابی. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۳)، ۱۳۶ – ۱۵۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه و پیش‌نیازها

ارزیابی v روی میدان K را نگاشت پوشای $v : K \to G(K) \cup \{\infty\}$ در نظر می‌گیریم که $G(K)$ گروه ارزیابی نظیر آن، یک گروه آبلی تماماً مرتب جمعی است که برای هر $x, y \in K$ در روابط زیر صدق می‌کند:

۱. $v(x) = \infty$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲. $v(xy) = v(x) + v(y)$.

۳. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

زوج (K, v) را یک میدان ارزیابی می‌نامیم و هرگاه ارزیابی روی آن مشخص باشد، (برای اختصار) گاهی با K آن‌را فرامی‌خوانیم. زیرحلقه $O_K = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ از میدان K با تنها ایده‌آل ماکسیمال

$$M_K = \{x \in K \mid v(x) > 0\},$$

را به‌ترتیب حلقه ارزیابی و ایده‌آل ارزیابی نامیده و خارج‌قسمتی O_K/M_K را با نماد $R(K)$ نمایش داده و آن‌را میدان مانده‌ای نظیر (K, v) می‌نامیم. برای هر α در حلقه ارزیابی O_K، تصویر α تحت همریختی متعارف $*: O_K \to R(K)$ را با نماد α^* نشان داده و آن‌را v-مانده‌ی α می‌نامیم. بستار جبری میدان K را با نماد $\widetilde{K}$ نشان می‌دهیم و برای هر $\alpha \in \widetilde{K}$، درجه α که همان درجه توسیع $K(\alpha)|K$ یا $[K(\alpha):K]$ می‌باشد را با نماد $\deg \alpha$ نشان خواهیم داد.

می‌دانیم یک میدان ارزیابی (K, v) هنسلی نامیده می‌شود هرگاه ارزیابی v توسیع منحصربه‌فردی به $\widetilde{K}$، یا به‌طور معادل، به هر توسیع جبری K داشته باشد و این معادل است با این‌که (K, v) در لم هنسل (قضیه ۳,۱,۴ از [۱۶]) صدق کند. اگر (K, v) یک میدان ارزیابی هنسلی باشد، توسیع منحصربه‌فرد v به $\widetilde{K}$ را با نماد $\tilde{v}$ در نظر می‌گیریم. هنگامی‌که K' یک توسیع جبری K است، همواره ارزیابی روی K' را حاصل تحدید $\tilde{v}$ به K' تعریف می‌کنیم. اگر ارزیابی روی K' را معرفی نکنیم، آن‌را با همان نماد $\tilde{v}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت از $K'|K$ برای توسیع این میدان‌های ارزیابی استفاده خواهیم کرد و از نوشتن ارزیابی‌های نظیر (برای اختصار) صرف نظر می‌کنیم. از آن‌جایی که در توسیع جبری میدان‌های ارزیابی، در نظرگرفتن ارزیابی‌های هنسلی معمولاً از کلیت مسائل کم نمی‌کند در این مقاله (مگر خلاف آن ذکر شود) همواره (K, v) را یک میدان ارزیابی هنسلی در نظر می‌گیریم.

در مطالعه انواع توسیع‌ها در نظریه ارزیابی، توسیع‌های ساده جبری از درجه اول جایگاه ویژه‌ای دارند. در این راستا، به‌عنوان مثال به ذکر این موضوع بسنده می‌کنیم که برای هر میدان ارزیابی (نه الزاماً هنسلی) K، با $char\ K = p > 0$، هر توسیع گالوا از درجه p یک توسیع آرتین-شریر[1] است که نوع خاصی از توسیع‌های ساده جبری هستند که توسط عناصری از درجه اول تولید می‌شوند. برای تکمیل این بحث خواننده را (به‌عنوان مثال) به منابع [۹]، [۱۰]، [۱۲]، [۱۸]، [۱۹، فصل ۶] و [۲۴] ارجاع می‌دهیم. هدف این مقاله ارائه یک رده‌بندی از عناصر جبری از درجه اول (که مولد توسیع‌های

[1] Artin-Schreier

ساده جبری از درجه اول هستند) با استفاده از مفهوم پایه ارزیابی می‌باشد. در این رده‌بندی مفاهیم مهمی چون توسیع‌های بی‌نقص، جفت متمایز و زنجیر متمایز اشباع‌شده‌ی عناصر جبری و همچنین یک مجموعه متناظر با عناصر جبری روی میدان‌های ارزیابی هنسلی (مجموعه $\{\tilde{v}(\alpha - a)|a \in K\}$ متناظر با عنصر جبری α) حضور دارند. به‌اختصار به شرح این مفاهیم و ارتباط آن‌ها با یکدیگر می‌پردازیم:

جفت‌های متمایز و به‌تبع آن زنجیرهای متمایز اشباع‌شده (کامل) نخستین بار توسط پاپسکو[1] و زارسکو[2] در [۲۳] معرفی شدند. آن‌ها این مفاهیم را روی میدان‌های موضعی، یعنی میدان‌های ارزیابی گسسته کامل از رتبه یک، به‌کار بردند تا مجموعه همه‌ی چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر با ضرایب در میدان‌های موضعی را توصیف کنند. البته خود این محققین (همان‌طور که در بعضی مقالات به آن اشاره کرده‌اند) ایده‌ی اولیه را از کارهای اکاتسو[3] گرفته‌اند ([۲۱] و [۲۲] را ببینید).

این مفاهیم که بعدها روی میدان‌های ارزیابی از رتبه دلخواه تعریف شدند، امروزه ابزار قدرتمند تحقیق در نظریه ارزیابی به‌شمار می‌آیند (برای مثال منابع [۴]، [۵]، [۱۱]، [۱۴]، [۱۷] و [۲۰] را ببینید). در ادامه به توصیف آن‌ها (روی میدان‌های ارزیابی از رتبه دلخواه) و سایر مفاهیم مرتبط با نتیجه اصلی این مقاله می‌پردازیم.

فرض کنید $K(x)$ میدان توابع گویا با متغیر x باشد. ساختار و ویژگی‌های توسیع‌های ارزیابی از میدان K به $K(x)$ از دیرباز جایگاه ویژه‌ای در نظریه ارزیابی داشته است. شاید یکی از مهمترین دلایل این است که منجر به شناخت خواص چندجمله‌ای‌ها (که همواره در تمام شاخه‌های ریاضیات اهمیت بسیار داشته‌اند) در این نظریه از جبر شده است. الکساندرو[4]، پاپسکو و زارسکو در یک سلسله از مقالات دسته‌بندی جامع و توصیفی از تمامی این توسیع‌ها، با استفاده از مفهوم کلیدی جفت‌های مینیمال ارائه دادند ([۶]، [۷] و [۸] را ببینید).

تعریف ۱. یک جفت (α, δ) متعلق به $\widetilde{K} \times G(\widetilde{K})$ را مینیمال (نسبت به (K, v)) می‌نامیم هرگاه $\beta \in \widetilde{K}$ در رابطه $\tilde{v}(\alpha - \beta) \geq \delta$ صدق کند، آن‌گاه داشته باشیم $\deg \alpha \leq \deg \beta$.

از تعریف واضح است هنگامی‌که $\alpha \in K$، (α, δ) برای هر $\delta \in G(\widetilde{K})$ یک جفت مینیمال است. همچنین برای $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$، (α, δ) یک جفت مینیمال است اگر و فقط اگر δ از هر عضو مجموعه زیر (که با نماد $M(\alpha, K)$ نمایش داده می‌شود) اکیداً بزرگتر باشد

$$M(\alpha, K) = \{\tilde{v}(\alpha - \beta)|\beta \in \widetilde{K}, \deg \beta < \deg \alpha\}.$$

این موضوع سبب پیدایش متغیری به‌نام متغیر اصلی $\delta_K(\alpha)$ برای عناصر جبری $\alpha \in \widetilde{K} \backslash K$ شد که برای آن‌ها $M(\alpha, K)$ یک کران بالا در $G(\widetilde{K})$ دارد و از رابطه $\delta_K(\alpha) = supM(\alpha, K)$ تعریف می‌شود. توجه کنید که برای تعریف سوپریمم، $G(\widetilde{K})$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی کامل‌شده مرتب ددکیند آن در نظر می‌گیریم (فصل ۳،

[1] Popescu
[2] Zaharescu
[3] Okutsu
[4] Alexandru

بخش ۱، مثال ۱۵ از مرجع [۱۳] را ببینید). در [۲۳] پاپسکو و زارسکو نشان دادند که در میدان‌های ارزیابی موضعی، مجموعه $M(\alpha,K)$ برای هر $\alpha\in\widetilde{K}\backslash K$ دارای ماکسیمم است یا به‌عبارت دیگر $\delta_K(\alpha)\in M(\alpha,K)$. همین موضوع سبب پیدایش مفاهیم جفت‌های متمایز و زنجیرهای متمایز اشباع‌شده شد.

تعریف ۲. فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیابی باشد. یک جفت (α,β) از عناصر $\widetilde{K}$ را یک جفت متمایز (یا به‌طور دقیق‌تر یک (K,v)-جفت متمایز) می‌نامند هرگاه $\deg\alpha>\deg\beta$ و β عضوی از کوچکترین درجه روی K باشد که در $\tilde{v}(\alpha-\beta)=\delta_K(\alpha)$ صدق می‌کند. به‌عبارت دیگر یک جفت (α,β) از عناصر $\widetilde{K}$ یک جفت متمایز نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\tilde{v}(\alpha-\beta)=\delta_K(\alpha)$،

۲. $\deg\alpha>\deg\beta$،

۳. اگر $\gamma\in\widetilde{K}\backslash K$ درجه‌ای کوچکتر از درجه β داشته باشد، آن‌گاه $\tilde{v}(\alpha-\gamma)<\tilde{v}(\alpha-\beta)$.

به‌کارگیری زنجیروار جفت‌های متمایز منجر به ایجاد زنجیرهای متمایز اشباع‌شده می‌شود.

تعریف ۳. یک زنجیر $\alpha=\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_r$ از عناصر $\widetilde{K}$ یک زنجیر متمایز اشباع‌شده (کامل) برای α نامیده می‌شود هرگاه (α_i,α_{i+1})، برای $0\le i\le r-1$، یک جفت متمایز باشد و $\alpha_r\in K$. r را طول این زنجیر می‌نامند.

در [۲۳] ثابت شد هنگامی که میدان ارزیابی موضعی است، هر $\alpha\in\widetilde{K}\backslash K$ دارای جفت متمایز و زنجیر متمایز اشباع‌شده است. لذا این سوال به‌طور طبیعی مطرح می‌شود که وقتی (در حالت کلی‌تر) میدان ارزیابی هنسلی و از رتبه دلخواه باشد، آیا هر $\alpha\in\widetilde{K}\backslash K$ دارای جفت متمایز است؟ مثال ۱،۲ از [۳] نشان داد که پاسخ به این سوال منفی است. این مثال نشان می‌دهد که مواردی وجود دارند که در آن‌ها $\delta_K(\alpha)\in G(\widetilde{K})$ اما متعلق به $M(\alpha,K)$ نیست. لذا این سوال مطرح شد که چگونه می‌توان میدان‌های ارزیابی هنسلی (K,v) را مشخص کرد که برای هر $\alpha\in\widetilde{K}\backslash K$، بتوان $\beta\in\widetilde{K}$ را با شرایط $\deg\beta<\deg\alpha$ و $\delta_K(\alpha)=\tilde{v}(\alpha-\beta)$ متناظر کرد؟ در قضیه ۱،۱ از [۳] با استفاده از مفهوم نقص توسیع‌ها به این سوال پاسخ داده شد. قبل از ارائه این نتیجه، ابتدا به معرفی مفهوم نقص می‌پردازیم:

فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیابی هنسلی و K' یک توسیع متناهی از K باشد. بنا به لم استراسکی[1] ([۱۵، بخش ۱۸] یا [۲۵، فصل ۶، بخش ۱۲، نتیجه‌ی قضیه ۲۵] را ببینید) می‌توان نوشت:

$$[K':K]=p^{\nu}[G(K'):G(K)][R(K'):R(K)], \tag{۱}$$

که ν یک عدد صحیح نامنفی و p توان مشخصه‌ی میدان مانده‌ای $R(K)$ (یعنی اگر مشخصه میدان $R(K)$ مثبت باشد، $p=char\,R(K)$ و در غیراینصورت $p=1$) است. همچنین $e(K'|K)=[G(K'):G(K)]$ اندیس

[1] Ostrowski

انشعاب و $f(K'|K) = [R(K'):R(K)]$ درجه لختی برای توسیع $K'|K$ هستند ([۱۶، صفحه ۶۱] را ببینید).

تعریف ۴. فرض کنید (K,v) و K' منطبق با جملات فوق باشند. عامل $\mathrm{def}(K'|K) = p^{\nu}$ در رابطه (۱) را نقص توسیع $K'|K$ می‌نامند. اگر $\mathrm{def}(K'|K) \neq 1$، توسیع $K'|K$ را ناقص و اگر $\mathrm{def}(K'|K) = 1$ باشد، آن‌را بی‌نقص می‌نامند.

قضیه ۵ ([۳، قضیه ۱,۱]). فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیابی هنسلی، $\widetilde{K}$ بستار جبری K و $\tilde{v}$ توسیع منحصربه‌فرد v به $\widetilde{K}$ باشند. دو گزاره زیر با هم معادلند:

۱. به هر $\alpha \in \widetilde{K}\backslash K$، یک $\beta \in \widetilde{K}$ با $\deg\beta < \deg\alpha$ نظیر می‌شود به‌طوری‌که $\delta_K(\alpha) = \tilde{v}(\alpha-\beta)$.

۲. برای هر $\theta \in \widetilde{K}$، توسیع $K(\theta)|K$ بی‌نقص است.

بی‌نقص بودن توسیع‌های ساده جبری شرط لازم و کافی برای وجود زنجیرهای متمایز اشباع‌شده نیز هست.

قضیه ۶ ([۲، قضیه ۲,۱]). فرض کنید (K,v)، $\widetilde{K}$ و $\tilde{v}$ همانند قضیه فوق باشند. یک عنصر $\alpha \in \widetilde{K}\backslash K$ دارای زنجیر متمایز اشباع‌شده است اگر و تنها اگر $K(\alpha)|K$ بی‌نقص باشد.

اکنون فرض کنید $\alpha \in \widetilde{K}\backslash K$ دارای جفت متمایزی مانند (α,β) باشد. متناظر با α و β ، میدان‌های ارزیابی $K(\alpha)$ و $K(\beta)$ (با ارزیابی حاصل از تحدید $\tilde{v}$ به آن‌ها) ایجاد می‌شوند. بین گروه‌های ارزیابی نظیر، میدان‌های مانده‌ای نظیر و نقص توسیع‌های $K(\alpha)|K$ و $K(\beta)|K$ روابطی وجود دارند که در قضیه ۱,۱ از [۲] بررسی شده‌اند. در [۱] به تکمیل این نتایج پرداختیم. خصوصاً در نتیجه زیر رابطه بین $\deg\alpha$ و $\deg\beta$ را بیان کردیم.

نتیجه ۷ ([۱، نتیجه ۶,۳]). فرض کنید (α,β) یک جفت متمایز روی میدان ارزیابی هنسلی (K,v) باشد. در این‌صورت $\deg\beta \mid \deg\alpha$.

در انتهای این بخش مفاهیم توسیع‌های بلافصل و پایه ارزیابی را بیان می‌کنیم که در بخش بعدی از ابزار کلیدی برای ارائه رده‌بندی مورد نظر ما هستند.

تعریف ۸. توسیع $(K',v')|(K,v)$ از میدان‌های ارزیابی که الزاماً هنسلی نیستند را بلافصل می‌نامند هرگاه توسیع‌های متناظر گروه‌های ارزیابی و میدان‌های مانده‌ای بدیهی باشند و یا به‌عبارت دیگر

$$[G(K'):G(K)] = [R(K'):R(K)] = 1.$$

تعریف ۹. فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیابی هنسلی و (K',v') یک توسیع متناهی از (K,v) از درجه n باشد. یک مجموعه $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ از عناصر ناصفر K' را یک پایه ارزیابی برای توسیع $(K',v')|(K,v)$ می‌نامند هرگاه برای هر $c_i \in K$، $1 \le i \le n$، داشته باشیم $v'(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = \min_{1\le i\le n}\{v'(c_i\alpha_i)\}$.

توجه کنید که هر پایه ارزیابی برای توسیع $(K',v')|(K,v)$، روی K مستقل خطی بوده و از اینرو یک پایه برای

توسیع میدان‌های $K'|K$ است.

یک رده‌بندی برای عناصر جبری از درجه اول

در مقدمه به اختصار به اهمیت عناصر جبری از درجه اول روی میدان‌های ارزیابی اشاره کردیم. در این بخش یک رده‌بندی برای چنین عناصری (با توجه به مفاهیم و نتایج ارائه شده در بخش قبل) ارائه می‌دهیم. قبل از آن به لم زیر نیازمندیم.

لم ۱۰. فرض کنید (K, v) یک میدان ارزیابی هنسلی و $K'|K$ یک توسیع بی‌نقص متناهی از درجه اول p باشد. اگر $\gamma \in K'$ به‌گونه‌ای است که $\tilde{v}(\gamma) \notin G(K)$ و یا این‌که $\tilde{v}(\gamma) = 0$ و $\tilde{v}$-مانده‌ی γ^* از γ متعلق به $R(K)$ نیست، آن‌گاه مجموعه $\{1, \gamma, \dots, \gamma^{p-1}\}$ یک پایه ارزیابی برای توسیع $K'|K$ است.

برهان. چون $K'|K$ یک توسیع بی‌نقص از درجه عدد اول p است، رابطه (۱) نشان می‌دهد که

$$p = [K' : K] = [G(K') \colon G(K)][R(K') \colon R(K)]. \tag{۲}$$

با توجه به فرض، اثبات لم را در دو حالت بررسی می‌کنیم. در حالت الف فرض می‌کنیم که $\gamma \in K'$ به‌گونه‌ای است که $\tilde{v}(\gamma) \notin G(K)$ و در حالت ب فرض می‌کنیم $\tilde{v}(\gamma) = 0$ و $\tilde{v}$-مانده‌ی γ^* از γ متعلق به $R(K)$ نیست.

حالت الف) از آن‌جایی که برای $\gamma \in K'$ داریم $\tilde{v}(\gamma) \notin G(K)$. بنابراین $[G(K') \colon G(K)] \neq 1$. تساوی (۲) نشان می‌دهد که در این حالت $[G(K') \colon G(K)] = p$ و $[R(K') \colon R(K)] = 1$. برای اثبات این‌که $\{1, \gamma, \dots, \gamma^{p-1}\}$ یک پایه ارزیابی برای توسیع $K'|K$ است، (به‌خلاف) فرض می‌کنیم $a_i \in K$، $0 \leq i \leq p-1$، وجود داشته باشند به‌طوری‌که $z = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \gamma^i \in K'$ و $\tilde{v}(z) \neq \min\limits_{0 \leq i \leq p-1} \{\tilde{v}(a_i \gamma^i)\}$. از آن‌جایی‌که بنا به تعریف ارزیابی $\tilde{v}$ همواره داریم $\tilde{v}(z) \geq \min\limits_{0 \leq i \leq p-1} \{\tilde{v}(a_i \gamma^i)\}$، این فرض خلف نشان می‌دهد که

$$\tilde{v}(z) > \min_{0 \leq i \leq p-1} \{\tilde{v}(a_i \gamma^i)\}.$$

برای یک j، $0 \leq j \leq p-1$، قرار می‌دهیم

$$\min_{0 \leq i \leq p-1} \{\tilde{v}(a_i \gamma^i)\} = \tilde{v}(a_j \gamma^j).$$

در نتیجه داریم $\tilde{v}(z) > \tilde{v}(a_j \gamma^j)$. از اینرو $\tilde{v}\left(\frac{z}{a_j \gamma^j}\right) > 0$. این بدان معنی است که

$$\frac{z}{a_j \gamma^j} \in M_{K'}. \tag{۳}$$

با توجه به نحوه انتخاب j واضح است که برای هر i، $0 \leq i \leq p-1$، $\tilde{v}(a_i \gamma^i) \geq \tilde{v}(a_j \gamma^j)$. ادعا می‌کنیم که

برای هر i که $i \neq j$، داریم $\tilde{v}(a_j\gamma^j) > \tilde{v}(a_i\gamma^i)$. چرا که اگر یک i_0، $i_0 \neq j$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\tilde{v}(a_{i_0}\gamma^{i_0}) = \tilde{v}(a_j\gamma^j)$، آن‌گاه $\tilde{v}(\gamma^{i_0}) - \tilde{v}(\gamma^j) = \tilde{v}(a_j) - \tilde{v}(a_{i_0}) \in G(K)$ یا به‌عبارت دیگر برای $i_0 \neq j$، $\tilde{v}(\gamma^{i_0}) + G(K) = \tilde{v}(\gamma^j) + G(K)$ که این با $[G(K'):G(K)] = p$ متناقض است چرا که $\tilde{v}(1), \tilde{v}(\gamma), \dots, \tilde{v}(\gamma^{p-1})$ نماینده‌های هم‌دسته‌های متمایز از گروه خارج‌قسمتی $G(K')/G(K)$ هستند. این استدلال ادعای فوق را ثابت می‌کند.

بنابراین برای هر i که $i \neq j$ می‌توان نوشت $\tilde{v}\left(\frac{a_i\gamma^i}{a_j\gamma^j}\right) > 0$ و این نشان می‌دهد که

$$\frac{a_i\gamma^i}{a_j\gamma^j} \in M_{K'} \,. \tag{۴}$$

اکنون داریم

$$\frac{z}{a_j\gamma^j} = \frac{\sum_{i\neq j} a_i\gamma^i}{a_j\gamma^j} + 1.$$

در نتیجه

$$1 = \frac{z}{a_j\gamma^j} - \sum_{i\neq j}\left(\frac{a_i\gamma^i}{a_j\gamma^j}\right).$$

که این رابطه به همراه (۳) و (۴) ما را به تناقض می‌رساند و این برهان لم را در حالت الف تمام می‌کند.

حالت ب) فرض می‌کنیم $\gamma \in K'$ به‌گونه‌ای است که $\tilde{v}(\gamma) = 0$ و $\tilde{v}$-مانده‌ی γ^* از γ متعلق به $R(K)$ نیست. بنابراین $[R(K'):R(K)] \neq 1$. تساوی (۲) نشان می‌دهد که در این حالت $[G(K'):G(K)] = 1$ و $[R(K'):R(K)] = p$. مشابه شروع اثبات در حالت الف (به‌خلاف) فرض می‌کنیم $a_i \in K$، $0 \leq i \leq p-1$، وجود داشته باشند به‌طوری‌که $z = \sum_{i=0}^{p-1} a_i\gamma^i \in K'$ و $\tilde{v}(z) > \min_{0\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i\gamma^i)\}$. به‌وضوح a_iها همزمان صفر نیستند. قرار می‌دهیم $\min_{0\leq i\leq p-1}\{v(a_i)\} = v(a_j)$ که $a_j \neq 0$. در نتیجه داریم

$$\tilde{v}(z) > \min_{0\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i\gamma^i)\} = \min_{0\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i) + i\tilde{v}(\gamma)\} = \min_{0\leq i\leq p-1}\{v(a_i)\} = v(a_j),$$

و این ایجاب می‌کند که

$$\tilde{v}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{a_i}{a_j}\right)\gamma^i\right) > 0,$$

یا به‌طور معادل $\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{a_i}{a_j}\right)\gamma^i \in M_{K'}$. بنابراین داریم

$$0=(\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{a_i}{a_j}\right)\gamma^i)^*=\sum_{i=0}^{p-1}(\left(\frac{a_i}{a_j}\right)\gamma^i)^*=\sum_{i=0}^{p-1}(\frac{a_i}{a_j})^*(\gamma^*)^i.$$

این به این معنی است که مجموعه $\{1,\gamma^*,\dots,\gamma^{*p-1}\}$ روی $R(K)$ وابسته خطی است. این نتیجه با فرض $[R(K'):R(K)]=p$ در تناقض است و این نهایتاً نشان می‌دهد که $\{1,\gamma,\dots,\gamma^{p-1}\}$ یک پایه ارزیابی برای توسیع $K'|K$ است.

قضیه ۱۱. فرض کنید (K,v) یک میدان ارزیابی هنسلی و $\alpha\in\widetilde{K}$ یک عنصر جبری از درجه عدد اول p باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. توسیع $K(\alpha)|K$ بی‌نقص است.

۲. α دارای (K,v)-جفت متمایز است.

۳. α دارای (K,v)-زنجیر متمایز اشباع‌شده است.

۴. مجموعه $\{\tilde{v}(\alpha-a)|a\in K\}$ متناظر با α دارای عضو ماکسیمم است.

برهان. ابتدا هم‌ارزی گزاره‌های ۱، ۲ و ۳ را نشان می‌دهیم و سپس هم‌ارزی گزاره‌های ۱ و ۴ را ثابت می‌کنیم.

۱ $\Leftrightarrow$ ۲ $\Leftrightarrow$ ۳ : اگر فرض کنیم $K(\alpha)|K$ بی‌نقص است، بنا به قضیه ۵، α دارای جفت متمایزی مانند (α,β) است و بنا به نتیجه ۷، می‌بایست $\deg\beta\mid\deg\alpha$. بنا به تعریف جفت متمایز داریم $\deg\beta<\deg\alpha$ و لذا $\deg\beta=1$. این نشان می‌دهد که جفت متمایز (α,β) در واقع یک زنجیر متمایز اشباع‌شده برای α است. حال از آن‌جایی‌که α دارای زنجیر متمایز اشباع‌شده است، بنا به قضیه ۶، توسیع $K(\alpha)|K$ بی‌نقص است. این برهان هم‌ارزی مورد نظر را ثابت می‌کند.

۱ $\Leftarrow$ ۴ : با فرض این‌که $K(\alpha)|K$ یک توسیع بی‌نقص از درجه p است. تساوی (۱) سبب می‌شود که دو حالت متمایز زیر را در نظر بگیریم:

حالت الف) $[G(K(\alpha)):G(K)]=p$ و $[R(K(\alpha)):R(K)]=1$ و حالت ب) $[G(K(\alpha)):G(K)]=1$ و $[R(K(\alpha)):R(K)]=p$.

حالت الف) از آن‌جایی‌که $[G(K(\alpha)):G(K)]=p$، یک عنصر $\gamma\in K(\alpha)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$\tilde{v}(\gamma)\notin G(K)$. در نتیجه بنا به حالت الف در لم ۱۰، $\{1,\gamma,\dots,\gamma^{p-1}\}$ یک پایه ارزیابی برای $K(\alpha)|K$ می‌باشد. بنابراین می‌توان $a_i\in K$، $0\le i\le p-1$، را به‌گونه‌ای برگزید که $\alpha=a_0+a_1\gamma+\cdots+a_{p-1}\gamma^{p-1}$ و

$$\tilde{v}(\alpha-a_0)=\min_{1\le i\le p-1}\{\tilde{v}(a_i\gamma^i)\}=\min_{1\le i\le p-1}\{\tilde{v}(a_i)+i\tilde{v}(\gamma)\}.$$

قرار می‌دهیم $\tilde{v}(\alpha-a_0)=\tilde{v}(a_j)+j\tilde{v}(\gamma)$ که $1\le j\le p-1$ است. اما از آن‌جایی‌که

$[G(K(\alpha)):G(K)]=p$، $\gamma\in K(\alpha)$ و $\tilde{v}(\gamma)\notin G(K)$، به‌سادگی می‌توان دریافت که $j\tilde{v}(\gamma)\notin G(K)$ و در نتیجه $\tilde{v}(\alpha-a_0)\notin G(K)$.

اکنون ادعا می‌کنیم که برای هر $d\in K$، رابطه $\tilde{v}(\alpha-d)\leq\tilde{v}(\alpha-a_0)$ برقرار است و در صورت اثبات این ادعا، مجموعه $\{\tilde{v}(\alpha-a)|a\in K\}$ دارای عضو ماکسیمم $\tilde{v}(\alpha-a_0)$ بوده و اثبات قضیه در این حالت کامل خواهد شد.

برای اثبات ادعا (به‌خلاف) فرض کنید $d\in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $\tilde{v}(\alpha-d)>\tilde{v}(\alpha-a_0)$. این فرض بنا به خاصیت ارزیابی $\tilde{v}$ (صفحه ۲۸ از [۱۶] را ببینید)، ایجاب می‌کند که

$$\tilde{v}(d-a_0)=\tilde{v}(d-\alpha+\alpha-a_0)=\min\{\tilde{v}(\alpha-d),\tilde{v}(\alpha-a_0)\}=\tilde{v}(\alpha-a_0).$$

این تساوی نشان می‌دهد که $\tilde{v}(\alpha-a_0)\in G(K)$ که یک تناقض است.

حالت ب) از آن‌جایی‌که $[R(K(\alpha)):R(K)]=p$، می‌توان $\gamma\in K(\alpha)$ را به‌گونه‌ای یافت که $\tilde{v}(\gamma)=0$ و $\gamma^*\notin R(K)$. با این فرضیات براساس حالت ب از لم ۱۰، نتیجه می‌گیریم که $\{1,\gamma,\dots,\gamma^{p-1}\}$ تشکیل یک پایه ارزیابی برای توسیع $K(\alpha)|K$ می‌دهد. در نتیجه $a_i\in K$، $0\leq i\leq p-1$، وجود دارند به‌طوری‌که

$$\alpha=a_0+a_1\gamma+\cdots+a_{p-1}\gamma^{p-1}.$$

بنا به خاصیت پایه‌های ارزیابی داریم

$$\tilde{v}(\alpha-a_0)=\min_{1\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i\gamma^i)\}=\min_{1\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i)+i\tilde{v}(\gamma)\}=\min_{1\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i)\}.$$

قرار می‌دهیم $\min_{1\leq i\leq p-1}\{\tilde{v}(a_i)\}=v(a_j)$ برای $1\leq j\leq p-1$. بنابراین داریم

$$\tilde{v}\left(\frac{\alpha-a_0}{a_j}\right)=0, \tag{۵}$$

و این نشان می‌دهد که

$$\frac{\alpha-a_0}{a_j}\in O_{K(\alpha)}. \tag{۶}$$

از طرف دیگر $\alpha-a_0=\sum_{i=1}^{p-1}a_i\gamma^i$ ایجاب می‌کند که $\frac{\alpha-a_0}{a_j}=\sum_{i=1}^{p-1}(\frac{a_i}{a_j})\gamma^i$ و اگر $\tilde{v}$-مانده‌ها را در میدان مانده‌ای محاسبه کنیم، داریم

$$(\frac{\alpha-a_0}{a_j})^*=\sum_{i=1}^{p-1}(\frac{a_i}{a_j})^*(\gamma^*)^i. \tag{۷}$$

اما از آن‌جایی‌که $[R(K(\alpha)):R(K)]=p$، $\gamma\in K(\alpha)$ و $\gamma^*\notin R(K)$، لذا $R\big(K(\alpha)\big)=R(K)(\gamma^*)$. این نشان می‌دهد که $\{1,\gamma^*,\dots,{\gamma^*}^{p-1}\}$ پایه‌ای برای توسیع میدان $R\big(K(\alpha)\big)|R(K)$ است. حال از تساوی (۷) به‌سادگی می‌توان دریافت که

$$\left(\frac{\alpha-a_0}{a_j}\right)^* \notin R(K). \qquad (۸)$$

اکنون ادعا می‌کنیم برای هر $b \in K$، $\tilde{v}(\frac{\alpha-a_0}{a_j}-b) \leq 0$. برای اثبات این ادعا (به‌خلاف) فرض کنید یک $b \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $\tilde{v}\left(\frac{\alpha-a_0}{a_j}-b\right) > 0$ یعنی $\frac{\alpha-a_0}{a_j}-b \in O_{K(\alpha)}$. این نتیجه به‌همراه (۶) ایجاب می‌کند که $b \in O_{K(\alpha)}$. در نتیجه می‌توان نوشت

$$0 = \left(\frac{\alpha-a_0}{a_j}-b\right)^* = \left(\frac{\alpha-a_0}{a_j}\right)^* - b^*.$$

اما از آن‌جایی‌که $b^* \in R(K)$، این نتیجه با (۸) در تناقض است و این نشان می‌دهد که برای هر $b \in K$،

$$\tilde{v}\left(\frac{\alpha-a_0-ba_j}{a_j}\right) \leq 0.$$

در نتیجه برای هر $b \in K$، $\tilde{v}\big(\alpha-a_0-ba_j\big) \leq v\big(a_j\big)$. چون این رابطه برای هر $b \in K$ برقرار است، می‌توان برای هر $d \in K$، نوشت $\tilde{v}(\alpha-d) \leq v(a_j)$. از سوی دیگر بنابر (۵)، $\tilde{v}(\alpha-a_0) = v(a_j)$. بنابراین $\tilde{v}(\alpha-a_0)$ یک ماکسیمم برای مجموعه $\{\tilde{v}(\alpha-a)|a \in K\}$ است و این برقراری عبارت ۴ از قضیه را در این حالت نیز ثابت می‌کند.

۴ ⇐ ۱: فرض کنید $\{\tilde{v}(\alpha-a)|a \in K\}$ دارای عضو ماکسیمم $\tilde{v}(\alpha-a_0)$ برای $a_0 \in K$ باشد. برای اثبات بی‌نقص بودن توسیع $K(\alpha)|K$، (به‌خلاف) فرض کنیم چنین نباشد. چون این توسیع از درجه اول p است و بنا به رابطه (۱)، الزاماً می‌بایست بلافصل باشد یعنی $G\big(K(\alpha)\big) = G(K)$ و $R\big(K(\alpha)\big) = R(K)$. در نتیجه

$$\tilde{v}(\alpha-a_0) \in G(K),$$

ایجاب می‌کند که $b \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $\tilde{v}(\alpha-a_0) = v(b)$. این بدان معنی است که $\frac{\alpha-a_0}{b} \in O_{K(\alpha)}$ و از اینرو $(\frac{\alpha-a_0}{b})^* \in R(K)$. لذا $d \in O_K$ را می‌توان به‌گونه‌ای برگزید که $(\frac{\alpha-a_0}{b})^* = d^*$ یا به‌طور معادل $\tilde{v}\left(\frac{\alpha-a_0}{b}-d\right) > 0$. بنابراین $\tilde{v}(\alpha-a_0-bd) > v(b) = \tilde{v}(\alpha-a_0)$. اما از آن‌جایی که $a_0+bd \in K$، این نامساوی با فرض $\tilde{v}(\alpha-a_0) = \max\{\tilde{v}(\alpha-a)|a \in K\}$ در تناقض است. بنابراین $K(\alpha)|K$ یک توسیع بی‌نقص است.

References

۱. آ. نیک‌سرشت، جفت‌های متمایز عناصر جبری، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال ۸، شماره ۳۷ (۱۴۰۱)، ۲۰۸-۱۹۷.

2. K. Aghigh and S. K. Khanduja, On chains associated with elements algebraic over a Henselian valued field, Algebra Colloq., **12** (4) (2005), 607-616.
3. K. Aghigh and S. K. Khanduja, On the main invariant of elements algebraic over a Henselian valued field, Proc. Edinb. Math. Soc., **45** (2002), no. 1, 219-227.
4. K. Aghigh and A. Nikseresht, Characterizing distinguished pairs by using liftings of irreducible polynomials, Canad. Math. Bull., **58** (2015), no. 2, 225-232.
5. K. Aghigh and A. Nikseresht, Constructing complete distinguished chains with given invariants, J. Algebra Appl., **14** (2015), no. 3, 1550026, 10 pp.
6. V. Alexandru, N. Popescu and A. Zaharescu, All valuations on K(x), J. Math. Kyoto Univ., **30** (1990), 281-296.
7. V. Alexandru, N. Popescu and A. Zaharescu, A theorem of characterization of residual transcendental extensions of a valuation, J. Math. Kyoto Univ., **28** (1988), 579-592.
8. V. Alexandru, N. Popescu and A. Zaharescu, Minimal pairs of definition of a residual transcendental extension of a valuation, J. Math. Kyoto Univ., **30** (1990), 207-225.
9. S. Anscombe and F.-V. Kuhlmann, Notes on extremal and tame valued fields, J. Symb. Log., **81** (2016), no. 2, 400-416.
10. S. Azgin, F.-V. Kuhlmann and F. Pop, Characterization of extremal valued fields, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), no. 5, 1535-1547.
11. A. Bishoni and S. K. Khanduja, On Eisenstein-Dumas and generalized Schönemann polynomials, Comm. Algebra, **38** (2010), no. 9, 3163-3173.
12. A. Blaszczok, Distances of elements in valued field extensions, Manuscripta Math., **159** (2019), no. 3-4, 397-429.
13. N. Bourbaki, Theory of Sets, Hermann, 1968.
14. R. Brown and J. L. Merzel, Invariants of defectless irreducible polynomials, J. Algebra Appl., **9** (2010), no. 4, 603-631.
15. O. Endler, Valuation Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, Berlin, 1972.
16. A. J. Engler and A. Prestel, Valued Fields, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
17. S. K. Khanduja and R. Khassa, On invariants and strict system of irreducible polynomials over Henselian valued fields, Comm. Algebra, **39** (2011), 584-593.
18. F.-V. Kuhlmann, A classification of Artin-Schreier defect extensions and characterizations of defectless fields, Illinois J. Math., **54** (2010), no. 2, 397-448.
19. S. Lang, Algebra, revised third ed., Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 2002.
20. N. Moraes de Oliveira and E. Nart, Defectless polynomials over henselian fields and inductive valuations, J. Algebra, **541** (2020), 270-307.
21. K. Okutsu, Construction of integral basis IV, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **58** (1982), no. 4, 167-169.
22. K. Okutsu, Integral basis of the field $\mathbb{Q}\sqrt[n]{a}$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **58** (1982), no. 5, 219-222.
23. N. Popescu and A. Zaharescu, On the structure of the irreducible polynomials over local fields, J. Number Theory, **52** (1995), 98-118.

24. J.-P. Tignol, Classification of wild cyclic field extensions and division algebras of prime degree over a Henselian field, in: Contemp. Math., **131** (1992), 491-508.
25. O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, Vol. II. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.