




Proposed a New Method of Moment Estimator for the Parameters of Ornstein Uhlenbeck Processes with Jump in the Financial Markets

M. Aryanpour¹ , P. Nabati²  

1. Faculty of Sciences, Urmia University of Technology, Urmia, Iran. E-mail: maralarianpour@gmail.com

2. Faculty of Sciences, Urmia University of Technology, Urmia, Iran.  E-mail: p.nabati@uut.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 19 July 2021

Received in revised form:

14 April 2023

Accepted: 18 October 2023

Published online:

9 July 2024

Keywords:

Ornstein Uhlenbeck process,

Levy noise,

Parameter estimation,

Method of moments estimator.

ABSTRACT

Introduction

The Ornstein Uhlenbeck (OU) process was first proposed by Ornstein and Uhlenbeck in 1930. This model is one of the most important and famous models of reversion to the mean, which is widely used in modeling the volatility and interest rate of assets. Jump diffusion models are continuous stochastic processes that were first introduced by Merton in quantitative finance. Then this work was extended in the field of option pricing by Black and Scholes in 1973. These models are used for observed facts in asset price dynamics, including mean reversion and jumps. OU processes derived by Levy process are widely used in finance and economics. These stochastic processes have jumped whose size may be random variables. The main goal of this article is to estimate the parameters of the OU processes extracted by the compound Poisson process. We used discrete time regression equations to describe process dynamics and obtain other potentially useful information. The advantage of using this method is that the regression equations provide closed-form formulas for calculating the mathematical expectation that is created in our estimators.

The main purpose of our work is to create a new set of original samples that are asymptotically distributed, identical and independent of each other. Compared to the existing methods, the method presented in this article has advantages that can be used from the proposed model, either in Iranian markets where price jumps occur abundantly or for more stable markets. This article is organized as follows. In section 2, the OU process extracted by the compound Poisson process is examined. In the third part, the new estimation method for parameter estimation is examined. The fourth part deals with the numerical simulation of the moment estimator of the OU process with gamma, Pareto and normal jumps. Also, an experimental study related to real data of Mobarake Isfahan steel market is conducted in this section. Finally, the conclusion and suggestions for the continuation of the article are presented in the fifth section.

Material and Methods

Given a positive number λ and a time-homogeneous Levy process

$\{z(t), t > 0\}$, the OU process driven by z is defined by

$$v(t) = e^{-\lambda t} \left(v(0) + \int_0^t e^{\lambda s} dz(\lambda s) \right) \quad (1)$$

where $v(t)$ is assumed to be independent of $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$. Following the terminology introduced by Barndorff-Nielsen and Shephard in [2], we shall call v the background driving Levy process (BDLP). It is easy to see that (1) is the unique strong solution of the stochastic differential equation

$$dv(t) = -\lambda v(t) dt + dz(\lambda t), \quad (2)$$

under some regularity conditions on the Levy measure.

The objective here is to estimate the parameters of the model using the discrete-time observations. In particular, we are interested in estimating λ and moments of z . We derive strongly consistent method of moments estimators and prove that they are asymptotically normal.

Results and discussion

The parameter estimation using the method of moment estimator are done using the OU processes compound with the gamma, pareto and normal distributions for numerical simulations with simulated and real data. We consider some examples to show the accuracy and simplicity of this method, then compare the proposed method with other existing methods. Moreover, according to error analysis and reported results, we conclude that the proposed method was in a good agreement with the exact solution.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The strong consistent estimators for the parameters of the model were derived.
- The main characteristic of this method is that the estimators are asymptotically normal.
- Using simulated data, we show that the estimators perform well at least for a gamma OU model, pareto OU model and normal OU model.
- It is shown that a Levy driven OU model for real data is a good candidate for describing the model volatility.

How to cite: Aryanpour, Maral., Nabati, Parisa. (2024). Proposed a new method of moment estimator for the arameters of Ornstein Uhlenbeck processes with jump in the financial markets. *Mathematical Researches*, **10** (1), 70 – 97.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

ارائه روش جدید برآورد گشتاوری برای پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک با نویز پرشی در بازارهای مالی

مارال آریانیپور^۱، پریسا نباتی^۲ ✉

۱. گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: maralarianpour@gmail.com
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران رایانامه: p.nabati@uut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله، روش جدیدی برای برآورد پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک استخراج شده توسط فرایندهای پواسون مرکب ارائه می‌شود. این فرایندها کاربرد گسترده‌ای در مدل‌سازی و پیش‌بینی بازارهای مالی دارند. برآوردگرهای ارائه شده بر اساس روش گشتاورها به دست می‌آیند. در این کار، قضیه حد مرکزی برای برآوردگرهای پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهند که روش ارائه شده در مقایسه با روش‌های موجود، در مواردی که پرش‌های فرایند پواسون مرکب نسبتاً نادر هستند، عملکرد بهتری دارد. به عنوان یک رویکرد تجربی، داده‌های بازار فولاد مبارکه اصفهان با مدل‌های ارنشتاین اولنیک با نویزهای گاما، پارتو و نرمال برازش می‌شوند. بدین منظور ابتدا با استفاده از روش ارائه شده، پارامترها تخمین زده می‌شوند و نهایتاً تحت این مدل‌های تصادفی، تلاطم بازار فولاد مبارکه اصفهان شبیه‌سازی می‌شود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۸ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۶ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰	
واژه‌های کلیدی: فرایند ارنشتاین اولنیک، نویز لوی، تخمین پارامتر، روش برآورد گشتاوری.	

استناد: مارال؛ آریانیپور، پریسا؛ نباتی، (۱۴۰۳). ارائه روش جدید برآورد گشتاوری برای پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک با نویز پرشی در بازارهای مالی. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۱)، ۷۰-۹۷.



مقدمه

مطالعات تجربی نشان داده است که نوسانات یک دارایی ثابت نیستند و توزیع لگاریتمی بازده آن‌ها ضخیم‌تر از توزیع نرمال می‌باشد. از خصوصیات بارز بازده لگاریتمی، کشیدگی بالا و چولگی منفی است. این واقعیت‌ها نمی‌توانند فرض نوسان ثابت را توضیح دهند. با توجه به این که نوسانات ساختاری تصادفی دارند، بنابراین یک مدل بازگشت به میانگین می‌تواند کاندیدای مناسبی برای مدل‌سازی نوسانات باشد. اولین بار بارتدورف-نیلسون و شفارد، مدل‌سازی تصادفی دینامیک دارایی توسط فرایند لوی را ارائه نمودند [۱]. در [۲] مدل پیشنهاد شده ساده‌تری توسط این دو محقق ارائه شد به طوری که پرش‌ها و نوسانات تصادفی مستقل بودند. مدل بارتدورف-نیلسون و شفارد، ارتباط پرش‌ها و نوسانات تصادفی را نشان می‌دهد. یک حرکت براونی ممکن است الگوی مناسبی برای حرکت ذرات باشد. پس از ضربه، ذره پس از تغییر موقعیت متوقف نمی‌شود، اما با کاهش سرعت به طور مداوم حرکت می‌کند. حرکت براونی در هیچ کجا قابل تفکیک نیست. فرایند ارنشتاین اولنیک اولین بار توسط ارنشتاین و اولنیک، در سال ۱۹۳۰ پیشنهاد شد. این مدل از مهم‌ترین و معروف‌ترین مدل‌های بازگشت به میانگین می‌باشد که به طور گسترده در مدل‌سازی نوسان و نرخ بهره دارایی به کار می‌رود. مدل‌های انتشار پرش، فرایندهای تصادفی به صورت پیوسته هستند که اولین بار توسط مرتون، در تأمین مالی کمی معرفی شدند [۳]. سپس این کار در زمینه قیمت‌گذاری اختیارات توسط بلک و شولز در سال ۱۹۷۳ تعمیم داده شد [۴]. از این مدل‌ها برای حقایق مشاهده شده در دینامیک قیمت دارایی‌ها، از جمله بازگشت به میانگین و پرش‌ها استفاده می‌شود (برای بررسی بیشتر به [۵] مراجعه کنید). مدل زیر یک نمونه از مدل انتشار پرش است:

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t + J_t dN_t)$$

که در آن S_t قیمت دارایی در لحظه t ، $\mu \in R$ جمله رانش و $\sigma > 0$ نوسان، W_t فرایند براونی استاندارد، N فرایند پواسن با شدت $J, \lambda > 0$ فرایندی است که به عنوان فرایند اندازه پرش شناخته می‌شود. فرایندهای ارنشتاین اولنیک که توسط فرایندهای لوی استخراج می‌شوند، در امور مالی و اقتصادی به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲]. این فرایندهای تصادفی دارای پرش‌هایی هستند که اندازه آن‌ها ممکن است متغیرهای تصادفی باشند به طوری که در برخی موارد توسط برخی از فرایندهای تصادفی شمارشی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. همچنین مسیر بین پرش‌ها، توسط معادلات دیفرانسیل مشخص می‌شوند. در این مقاله، مسأله برآورد پارامترهای یک زیرکلاس مهم از فرایندهای ارنشتاین اولنیک که توسط فرایندهای پواسون^۱ مرکب استخراج می‌شوند را در نظر می‌گیریم. تخمین پارامتر یک مسأله مهم در مطالعه فرایندهای ارنشتاین اولنیک است. با توجه به اینکه پارامترهای مرتبط با فرایندهای ارنشتاین اولنیک پیامدهای مالی و اقتصادی بسیاری در پی دارند از این رو در بیشتر تحقیقات معمولاً اولین گام برآورد پارامترهای فرایند مورد نظر است. در نتیجه، مسأله برآورد پارامترها در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. هدف اصلی این مقاله، تخمین پارامترهای فرایند ارنشتاین

^۱ Poisson

اولنیک استخراج شده توسط فرایند پواسون مرکب می‌باشد. برای حل این مسأله از معادلات بازگشتی زمان گسسته برای توصیف دینامیک فرایند و به دست آوردن اطلاعات مفید بالقوه دیگر استفاده می‌کنیم. مزیت استفاده از این روش این است که معادلات بازگشتی فرمول‌هایی با فرم بسته را برای محاسبه امید ریاضی که در برآوردگرهای ما ایجاد می‌شود به دست می‌دهند. نتایج عددی نشان می‌دهند که روش به کار گرفته شده نسبت به سایر روش‌های برآورد موجود، تخمین بهتری ارائه می‌دهد. برای تخمین پارامترهای فرایندهای ارنشتاین اولنیک سه نوع روش برآورد بیزی، برآورد حداکثر درست‌نمایی^۱ (MLE) و روش گشتاورها وجود دارد. تخمین بیزی یک پیش‌زمینه‌ای را برای این پارامترها فرض می‌کند و برای محاسبه به زنجیر مارکوف مونت کارلو متکی است. برای اطلاعات بیشتر به [۸-۶] مراجعه شود. روش MLE به توابع چگالی انتقال حالت نیاز دارد که فرم بسته آنها همواره در دسترس نیستند. توابع چگالی مورد نظر می‌توانند بر اساس روش‌های مختلف تقریب زده شوند. به عنوان مثال والدیویزو و همکاران برای تقریب تابع چگالی از تقریب فوریه تابع مشخصه استفاده کردند [۹]. ژانگ و همکاران با استفاده از روش معکوس عددی گاور-استینف، دنباله تقریبی برای تابع چگالی ایجاد کردند [۱۰]. مای روشی را مبتنی بر تابع حداکثر درست‌نمایی زمان پیوسته به فرایند ارنشتاین اولنیک با فرایند جامع لوی استخراج شده تعمیم داد و سپس از روش تکنیکی آستانه‌ای برای تقریب بخش پیوسته فرایند استفاده کرد [۱۱]. معمولاً روشهای MLE مبتنی بر تقریب تابع چگالی هستند که این امر موجب خطاهای عددی می‌شود. بروکول و همکاران، پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک را بر اساس روش گشتاورها بدست آوردند [۱۲]. رویکردهای مشابه را می‌توان در [۱۳] یافت. باربوزا و وینز، از روش کلی گشتاورها برای تخمین پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک که دینامیک آن توسط حرکت براونی کسری انجام می‌شد استفاده کردند [۱۴]. جنگلد و همکاران، برآورد غیرپارامتری فرایندهای ارنشتاین اولنیک را که توسط فرایندهای لوی استخراج می‌شدند در نظر گرفتند [۱۵]. اخیراً هوو و همکاران، برآوردگرهای جدیدی را برای تخمین پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک استخراج شده توسط فرایندهای پواسن مرکب مورد مطالعه قرار دادند [۱۶]. در این مقاله برآوردگرهای گشتاوری برای پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک استخراج شده توسط فرایندهای پواسن مرکب با روش جدید مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مشخصه اصلی کار ما ساختن مجموعه جدیدی از نمونه‌های اصلی است که به صورت مجانبی هم توزیع، یکسان و مستقل از هم می‌باشند. در مقایسه با روشهای موجود، روش ارائه شده در این مقاله دارای مزیت‌هایی است که می‌توان از مدل مطرح شده، چه در بازارهای ایران که در آن پرش قیمت به وفور رخ می‌دهد و چه برای بازارهایی با ثبات بیشتر استفاده کرد. این مقاله بدین شرح ساماندهی شده است. در بخش اول، فرایند ارنشتاین اولنیک استخراج شده توسط فرایند پواسن مرکب مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش دوم روش برآورد گشتاوری جدید برای برآورد پارامترها بررسی می‌شود. بخش سوم به شبیه‌سازی عددی مربوط به برآوردگر گشتاوری فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش‌های گاما، پارتو و نرمال می‌پردازد. همچنین یک مطالعه تجربی مربوط به داده‌های واقعی بازار فولاد مبارکه اصفهان در این بخش انجام می‌گیرد. نهایتاً نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای ادامه کار مقاله در بخش چهارم مطرح می‌شود.

¹ Maximum likelihood estimation

۱. فرایند ارنشتاین اولنیک استخراج شده توسط فرایند پواسن مرکب

فرایند ارنشتاین اولنیک که توسط فرایند پواسن مرکب $\{v(t), t > 0\}$ استخراج می شود به عنوان جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل تصادفی زیر تعریف می گردد [۱۷].

$$dv(t) = -\lambda v(t)dt + dz(\lambda t), \quad (1)$$

که در آن $v(0)$ مستقل از $z(t)$ می باشد و λ پارامتری است که ویژگی وابستگی فرایند ارنشتاین اولنیک را در نظر می گیرد. همچنین، $z(t)$ یک فرایند پواسن مرکب با $z(0) = 0$ است. نرخ پرش a و اندازه های پرش توزیع شده بر اساس تابع توزیع تجمعی $J(., b)$ مشخص می شود که در آن پارامتر مورد نظر در تابع توزیع است و معمولاً برای سادگی $J(., b)$ به صورت $J(.)$ نوشته می شود. فرض کنید که دامنه $J(.)$ پیوسته باشد به طوری که می تواند مقادیر منفی و مثبت داشته باشد. زمانی که هیچ رخداد ورودی برای $z(.)$ در لحظه λt وجود نداشته باشد، فرایند $\{v(t), t \geq 0\}$ مطابق با معادله دیفرانسیل معمولی زیر تکامل می یابد،

$$dv(t) = -\lambda v(t)dt,$$

که دینامیک پیوسته (مبتنی بر زمان) این دستگاه ترکیبی است. هر زمان که یک رخداد ورودی در $z(.)$ رخ دهد، $v(t)$ مقداری برابر با یک متغیر تصادفی با توزیع $J(.)$ را در نظر می گیرد. در این صورت، رخداد های ورودی مطابق با فرایند پواسن اتفاق می افتند. فرایند ارنشتاین اولنیک تعریف شده توسط معادله (۱) دارای جواب تحلیلی زیر است،

$$v(t) = e^{-\lambda t} \left(v(0) + \int_0^t e^{\lambda s} dz(\lambda s) \right) \quad (2)$$

از این پس از این معادله استفاده خواهیم کرد. معادله (۲) به عنوان تعریف فرایند ارنشتاین اولنیک شناخته می شود. فرض کنید $N(\lambda t)$ فرایند تحت اختیار پواسن برای $z(\lambda t)$ با زمان های رخداد s_i ($i = 1, 2, \dots$) باشد. همچنین فرض کنید J_i اندازه پرش $z(\lambda t)$ در لحظه s_i باشد. در سراسر این مقاله، فرض می کنیم که اندازه پرش یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی $J(.)$ است. فرایند ارنشتاین اولنیک معمولاً به صورت گسسته در نظر گرفته می شود. فرض کنید Δ واحد زمانی باشد. گیریم دنباله مشاهدات $v(t)$ در لحظه های $t = n\Delta$, $n = 1, 2, \dots, N$ باشد. تعریف می کنیم،

$$v_n \triangleq v(n\Delta)$$

$$S_i \triangleq \lambda(s_i - n\Delta)$$

$$Z(\lambda t) \triangleq \sum_{i=1}^{N(\lambda t)} e^{\lambda(s_i - t)} J_i.$$

آنگاه بر اساس معادله (۲) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= e^{-\lambda(n+1)\Delta} \left(v(0) + \int_0^{(n+1)\Delta} e^{\lambda s} dz(\lambda s) \right) \\
 &= e^{-\lambda\Delta} v_n + \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} e^{\lambda(s-n\Delta)-\lambda\Delta} dz(\lambda s) \\
 &= e^{-\lambda\Delta} v_n + Z(\lambda(n+1)\Delta) - Z(\lambda n\Delta),
 \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن

$$Z(\lambda(n+1)\Delta) - Z(\lambda n\Delta) = \sum_{i=N(\lambda n\Delta)+1}^{N(\lambda(n+1)\Delta)} e^{(s_i-\lambda\Delta)} J_i.$$

باتوجه به $N(\lambda(n+1)\Delta) - N(\lambda n\Delta) = k$ می‌توان نشان داد که $S_{N(\lambda n\Delta)+1}, \dots, S_{N(\lambda n\Delta)+k}$ دارای توزیع مشابه به صورت k مرتبه آماری از متغیرهای تصادفی مستقل است که به صورت یکنواخت در بازه $(0, \lambda\Delta]$ توزیع شده‌اند. بنابراین، $Z(\lambda t)$ را می‌توان به عنوان یکی دیگر از فرایندهای پواسون مرکب با همان فرایند اصلی پواسون به صورت $Z(\lambda t)$ مشاهده کرد، اما با اندازه‌های پرش مختلف $e^{t_i-\lambda\Delta} J_i$ (در مقابل J_i). توجه داریم $Z(\lambda(n+1)\Delta) - Z(\lambda n\Delta)$ پرش‌های تجمعی $Z(\lambda t)$ هستند که بر روی بازه $(n\Delta, (n+1)\Delta]$ قرار دارند، به طوری که

$$P(Z(\lambda(n+1)\Delta) - Z(\lambda n\Delta) = 0) = e^{-a\lambda\Delta}, \tag{۴}$$

و برای $x \neq 0$ تابع چگالی به صورت زیر خواهد بود،

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\lambda\Delta} \frac{(a\lambda\Delta)^n}{n!} \int_0^{\lambda\Delta} \dots \int_0^{\lambda\Delta} f_n(x, s_1, \dots, s_n) \frac{1}{(\lambda\Delta)^n} ds_1 \dots ds_n$$

که در آن $f_n(x, s_1, \dots, s_n)$ تابع چگالی $\sum_{i=1}^n e^{t_i-\lambda\Delta} J_i$ است. به طور کلی، استفاده از برآورد حداکثر درست نمایی بسیار دشوار است زیرا $f(x)$ دارای فرم بسته نیست و باید با استفاده از روش‌های عددی تقریب زده شود. از طرف دیگر، امید ریاضی $Z(\lambda(n+1)\Delta) - Z(\lambda n\Delta)$ به راحتی می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود،

$$\begin{aligned}
 E[Z(\lambda(n+1)\Delta) - Z(\lambda n\Delta)] &= E[N(\lambda\Delta)] \times E[e^{S_i-\lambda\Delta}] \times E[J_i] \\
 &= a\lambda\Delta \times \int_0^{\lambda\Delta} e^{s-\lambda\Delta} \frac{1}{\lambda\Delta} ds \times E[J_i] \\
 &= a(1-e^{-\lambda\Delta})E[J_i].
 \end{aligned} \tag{۵}$$

در بخش بعدی با استفاده از معادله (۵) برآورد پارامترهای a و b انجام خواهد گرفت.

۲. برآورد پارامترها

در این بخش، نتایج مورد مطالعه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. در بخش ۲-۱، ابتدا پارامتر تنزل λ را در نظر می‌گیریم. سپس یک برآوردگر برای λ به صورت بسیار کلی استخراج می‌کنیم و همگرایی برآوردگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس برآوردگر ارائه شده را با سایر برآوردگرهای موجود برای λ در برخی موارد خاص مقایسه می‌کنیم. در بخش ۲-۲، برآوردگرهای گشتاوری را برای پارامترهای a و b توسعه می‌دهیم. در نهایت، نشان می‌دهیم قضیه حد مرکزی در برآوردگرهای ارائه شده صدق می‌کند.

۲.۱ برآورد پارامتر λ

ابتدا پارامتر λ را استخراج می‌کنیم. فرض کنید (X_0, X_1, \dots, X_N) یک بردار نمونه ای برای (V_0, V_1, \dots, V_N) باشد. آنگاه داریم

$$X_n = e^{-\lambda \Delta} X_{n-1} + Z(\lambda n \Delta) - Z(\lambda(n-1)\Delta), \quad n = 1, \dots, N.$$

برای سهولت ترکیب، به جای $Z(\lambda n \Delta) - Z(\lambda(n-1)\Delta)$ عبارت $Z(\lambda \Delta)$ را در نظر خواهیم گرفت، زیرا

$$Z(\lambda \Delta) = Z(\lambda n \Delta) - Z(\lambda(n-1)\Delta).$$

از آنجا که فرایند پواسون مرکب $Z(\cdot)$ می‌تواند به بالا یا پایین ببرد (به عنوان مثال، X_n می‌تواند مثبت یا منفی باشد)، تعریف می‌کنیم

$$r_n = \left\lfloor \frac{X_n}{X_{n-1}} \right\rfloor, \quad n = 1, \dots, N$$

توجه داریم که r_n برابر با مقدار $e^{-\lambda \Delta}$ است و این معادل است با این که هیچ پرشی در طول دوره زمانی $[(n-1)\Delta, n\Delta]$ ، با جرم احتمال $e^{-\lambda \Delta}$ وجود نداشته باشد و هر مقدار دیگری را با احتمال صفر می‌گیرد که اندازه پرش یک متغیر تصادفی پیوسته است. برآوردگر پارامتر λ را به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta} \log(\arg \max_r \sum_{n=1}^N I_{\{r=r_n\}}), & \text{if } \max_r \sum_{n=1}^N I_{\{r=r_n\}} \geq 2 \\ -\frac{1}{\Delta} \log(\hat{p}_1), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

که در آن $I_{r=r_n}$ تابع مشخصه r است و نمونه لگ-۱ خودهمبستگی به صورت زیر می‌باشد،

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (X_{(n+1)} - \bar{X})(X_n - \bar{X})}{\sum_{n=0}^N (X_n - \bar{X})^2}$$

$$\bar{X} = \sum_{n=0}^N X_n / (N+1) \text{ و}$$

دلیل اینکه $\hat{\lambda}$ به صورت (۶) ساخته شده است را می‌توان به شرح زیر توضیح داد. اول، احتمال حداقل دو دوره بدون پرش همگرا به ۱ با نزدیک شدن اندازه نمونه به بی‌نهایت، که مربوط به $\max_r \sum_{n=1}^N I_{\{r=r_n\}} \geq 2$ در معادله (۶) است وجود دارد. دوم، زمانی که تقریباً یک دوره بدون پرش وجود دارد $\hat{\lambda}$ را می‌توان با قسمت دوم معادله (۶) تخمین زد. زیرا لگ-۱ خودهمبستگی v_t به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_1 = \frac{\text{Cov}(v_n, v_{(n-1)})}{\text{Var}(v_{(n-1)})} = e^{-\lambda\Delta}$$

و $\hat{\rho}_1$ یک برآوردگر برای ρ_1 است. در واقع، v_t طبق برخی از شرایط معمول مطابق با ارزیابی برکول [۱۸]، مانا است و $\hat{\rho}_1$ طبق مطالعات اسپیلیپولس [۱۹] به ρ_1 همگرا می‌شود.

قضیه ۱،۲ برآوردگر پارامتر λ که در (۶) تعریف شده است در گزاره‌های زیر صدق می‌کند

$$P\{\hat{\lambda} = \lambda\} = 1 - [1 + (N-1)e^{-\lambda\Delta}](1 - e^{-\lambda\Delta})^{(N-1)} \quad (۷)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\hat{\lambda} = \lambda\} = 1 \quad (۸)$$

برهان: احتمال وجود حداقل یک پرش در دوره مفرد $[(n-1)\Delta, n\Delta]$ برابر $1 - e^{-a\lambda\Delta}$ می‌باشد به طوری که $n = 1, \dots, N$. بنابراین احتمال حداقل یک پرش در هر دوره $[(n-1)\Delta, n\Delta]$ برای $n = 1, \dots, N$ برابر است با $(1 - e^{-a\lambda\Delta})^N$ ، و احتمال وجود حداقل یک پرش در هر دوره به جز یک مورد به صورت زیر می‌باشد.

$$Ne^{-a\lambda\Delta}(1 - e^{-a\lambda\Delta})^{N-1}$$

بنابراین احتمال وجود حداقل دو دوره بدون پرش برابر است با $1 - [1 + (N-1)e^{-a\lambda\Delta}](1 - e^{-a\lambda\Delta})^{N-1}$.

هر دوره بدون پرش، متناظر با $r_n = e^{-\lambda\Delta}$ است. بنابراین در صورت وجود حداقل دو دوره بدون پرش، حداقل دو مورد از r_1, \dots, r_N برابر است با $e^{-\lambda\Delta}$. از طرف دیگر توجه می‌کنیم که احتمال این که دو مورد از r_1, \dots, r_N دارای مقدار مشابه دیگری غیر از $e^{-\lambda\Delta}$ باشد برابر با صفر است. در نتیجه، $P(\hat{\lambda} = \lambda) = 1 - [1 + (N-1)e^{-a\lambda\Delta}](1 - e^{-a\lambda\Delta})^{N-1}$ و این

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\hat{\lambda} = \lambda) = 1 \text{ رابطه به دست می‌دهد:}$$

■

اشاره می‌کنیم که در قضیه فوق نرخ همگرایی معادله (۸) نمایی است. برای مواردی که توزیع پرش $J(\cdot)$ دامنه پیوسته مثبت دارد، باریندورف-نیلسن و شفارد [۱۷] و ژانگ و همکاران [۲۰] برآوردگر زیر را برای λ پیشنهاد دادند:

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1}{\Delta} \max_{1 \leq n \leq N} \{\ln X_{n-1} - \ln X_n\} \quad (9)$$

علاوه بر این، ژانگ و همکاران [۲۱]، $\hat{\lambda}_0 \in (0, \lambda]$ را ارائه دادند به طوری که

$$P(\hat{\lambda}_0 = \lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda a \Delta})^N.$$

در این مورد خاص، $\hat{\lambda}_0$ یک برآوردگر بهتری نسبت به $\hat{\lambda}$ است با این حال $\hat{\lambda}_0$ را نمی‌توان در موارد کلی‌تر که پرش منفی است اعمال کرد.

۲-۲. برآورد پارامترهای a و b

در این بخش، در مورد چگونگی برآورد a و b بحث می‌کنیم. لازم به ذکر است که برآوردگر $\hat{\lambda}$ برای λ نه براساس معادله گشتاوری است و نه بر اساس حداکثر درست‌نمایی. با این حال، برآوردگرهای ارائه شده برای a و b بر اساس روش گشتاوری است. ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$Y_n(\lambda) = X_n - e^{-\lambda \Delta} X_{n-1},$$

$$I_{\{Y_n(\lambda)=0\}} = \begin{cases} 1 & \text{if } Y_n(\lambda) = 0 \\ 0 & \text{if } Y_n(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$

براساس معادلات (۳) و (۴) داریم

$$P\{Y_n(\lambda) = 0\} = P\{N(\lambda n \Delta) - N(\lambda(n-1)\Delta) = 0\} = e^{-\lambda a \Delta},$$

بنابراین

$$\bar{Y}(\lambda) = \sum_{n=1}^N Y_n(\lambda) / N,$$

$$I_{\{Y_n(\lambda)=0\}} = \sum_{n=1}^N I_{\{Y_n(\lambda)=0\}} / N,$$

بر اساس معادلات (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$E[Y_n(\lambda)] = E[Z(\lambda n \Delta) - Z(\lambda(n-1)\Delta)] = a(1 - e^{-\lambda \Delta})E[Ji].$$

پس معادلات گشتاوری متغیرهای تصادفی $I_{\{Y_n(\lambda)=0\}}$ و $Y_n(\lambda)$ به صورت زیر هستند:

$$\sum_{n=1}^N (I_{\{Y_n(\lambda)=0\}} - E[I_{\{Y_n(\lambda)=0\}}]) = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^N (Y_n(\lambda) - E[Y_n(\lambda)]) = 0, \quad (11)$$

که منجر به برآوردهای گشتاوری برای a و b به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{a}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda\Delta} \ln \bar{I}_{\{Y_n(\lambda)=0\}}, \quad (12)$$

$$E[J_i] = \frac{\bar{Y}_n(\lambda)}{\hat{a}(\lambda)(1 - e^{-\lambda\Delta})} \quad (13)$$

که در آن فرض می‌کنیم λ به صورت معلوم داده شده است. در صورتی که λ نامعلوم باشد باید تخمین زده شود، لذا می‌توانیم λ را با برآوردگر آن یعنی $\hat{\lambda}$ جایگزین کنیم و برآوردهای زیر را برای a و b داشته باشیم:

$$\hat{a} = -\frac{1}{\hat{\lambda}\Delta} \ln \bar{I}_{\{Y_n(\hat{\lambda})=0\}}, \quad (14)$$

$$E[J_i] = \frac{\bar{Y}_n(\hat{\lambda})}{\hat{a}(1 - e^{-\hat{\lambda}\Delta})} \quad (15)$$

واضح است که وقتی λ معلوم است، $I_{\{Y_n(\lambda)=0\}}$ و $Y_n(\lambda)$ برای $i = 1, \dots, N$ نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع (i.i.d.) هستند. بنابراین، قضیه حد مرکزی را می‌توان به راحتی به کار برد. با این حال، برای موردی که λ با $\hat{\lambda}$ جایگزین می‌شود $I_{\{Y_n(\hat{\lambda})=0\}}$ و $Y_n(\hat{\lambda})$ دیگر نمونه‌های i.i.d. نیستند. آنچه که در ادامه می‌آید، نتایج مشابهی را با استفاده از قضیه حد مرکزی برای برآوردهای داده شده توسط معادلات (۱۴) و (۱۵) ارائه می‌کند.

لم ۲-۱

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[I_{\{Y_n(\hat{\lambda})=0\}}] = E[I_{\{Y_n(\lambda)=0\}}], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E[Y_n(\hat{\lambda})] = E[Y_n(\lambda)],$$

و برای هر $x \in R^2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\sqrt{N}(\bar{I}_{\{Y(\hat{\lambda})=0\}} - e^{-\hat{\lambda}a\Delta}, \bar{Y}(\hat{\lambda}) - a(1 - e^{-\hat{\lambda}\Delta})E[J_i]) \leq x\}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\sqrt{N}(\bar{I}_{\{Y(\lambda)=0\}} - e^{-\lambda a\Delta}, \bar{Y}(\lambda) - a(1 - e^{-\lambda\Delta})E[J_i]) \leq x\}$$

لم ۱-۲ بیان می‌کند که خصوصیات مجانبی برآوردهای ارائه شده (با نزدیک شدن اندازه نمونه N به ∞)، مانند امید ریاضی و توزیع، حتی وقتی λ با $\hat{\lambda}$ جایگزین می‌شود، بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین، قضیه حد مرکزی برای $(\bar{I}_{\{Y(\hat{\lambda})=0\}}, \bar{Y}(\hat{\lambda}))$ اکنون می‌تواند توسعه یابد.

برهان: به منبع [۱۶] مراجعه شود.

قضیه ۲-۲ اگر $ae^{-\lambda a\Delta} \neq (1 - e^{-2\lambda\Delta})$ آنگاه

$$\sqrt{N}(\bar{I}_{\{Y(\hat{\lambda})=0\}} - e^{-\lambda a\Delta}, \bar{Y}(\hat{\lambda}) - a(1 - e^{-\lambda\Delta})E[Ji]) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma)$$

که در آن ماتریس کواریانس به صورت زیر می باشد.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} P_0(1 - P_0) & -P_0a(1 - e^{-\lambda\Delta})E[Ji] \\ -P_0a(1 - e^{-\lambda\Delta})E[Ji] & a(1 - e^{-2\lambda\Delta})E[Ji^2]/2 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = e^{-\lambda a\Delta} \text{ و}$$

برهان: به منبع [۱۶] مراجعه شود.

اکنون آماده هستیم تا قضیه حد مرکزی را برای برآوردگرهای (a, b) ایجاد کنیم. با این حال، برای استخراج فرمول‌های صریح برآوردگرهای خود، باید تابع توزیع $J(\cdot)$ را مشخص کنیم. در ادامه، حالتی را که $J(\cdot)$ نمایی است، یعنی $J(x) = 1 - e^{-bx}$ ($x \geq 0$) بررسی خواهیم کرد. در این حالت، فرایند مربوط به ارنشتاین اولنیک یک فرایند ارنشتاین اولنیک-گاما است. باید خاطر نشان کنیم که بیشتر نتایج ما برای فرایند ارنشتاین اولنیک-گاما حاصل می شود و می تواند به انواع دیگر فرایندهای ارنشتاین اولنیک نیز تعمیم یابد. برای فرایند ارنشتاین اولنیک-گاما $v(t) \sim \Gamma(a, b)$ ، تابع چگالی $v(t)$ توسط رابطه زیر داده می شود:

$$f_{v(t)}(x) = \frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-bx} \quad (x > 0)$$

$$E[Ji] = \frac{1}{b} \text{ که در آن } \Gamma(a) \triangleq \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy \text{ تابع گاما است. از آنجا که } J(x) = 1 - e^{-bx} \text{ داریم}$$

بنابراین با توجه به معادله (۱۵)، برآوردگر b را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{b} = \hat{a}(1 - e^{-\hat{\lambda}\Delta}) / \bar{Y}(\hat{\lambda})$$

قضیه ۲-۳ برای برآوردگرهای (\hat{a}, \hat{b}) از فرایند ارنشتاین اولنیک-گاما که در معادلات (۱۴) و (۱۷) تعریف شده اند، داریم:

$$\sqrt{N}(\hat{a} - a, \hat{b} - b) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma_0)$$

که در آن ماتریس کواریانس Σ_0 به صورت زیر است:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \frac{(1-P_0)}{(\lambda\Delta)^2 P_0} & -\frac{b}{\lambda\Delta} \frac{1-P_0-P_0\lambda a\Delta}{P_0\lambda a\Delta} \\ -\frac{b}{\lambda\Delta} \frac{1-P_0-P_0\lambda a\Delta}{P_0\lambda a\Delta} & \frac{b^2(1-P_0)}{a^2(\lambda\Delta)^2 P_0} + \frac{b^2(1+e^{-\lambda\Delta})}{a(1-e^{-\lambda\Delta})} - \frac{b^2}{a\lambda\Delta} \end{bmatrix}$$

برهان: با استفاده از بسط تیلور تابع $\ln(x)$ می‌توان نوشت:

$$\hat{a}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda\Delta} \ln I_{\{Y(\lambda)=0\}} = a - \frac{1}{\lambda\Delta e^{-\lambda a\Delta}} \varepsilon_1 + \frac{1}{2\lambda\Delta x_f^2} \varepsilon_1^2 \quad (16)$$

که در آن $\varepsilon_1 = \bar{I}_{\{Y(\lambda)=0\}} - e^{-\lambda a\Delta}$ و x_f بین $\bar{I}_{\{Y(\lambda)=0\}}$ و $e^{-\lambda a\Delta}$ قرار دارد. خواهیم داشت:

$$\sqrt{N}(\hat{a}(\lambda) - a) = -\frac{1}{\lambda\Delta e^{-\lambda a\Delta}} \sqrt{N} \varepsilon_1 + \frac{1}{2\sqrt{N} \lambda\Delta x_f^2} (\sqrt{N} \varepsilon_1)$$

با ترکیب قضیه (۲-۳) داریم: $\sqrt{N}(\hat{a}_\lambda - a) = -\frac{1}{\lambda\Delta e^{-\lambda a\Delta}} \sqrt{N} \varepsilon_1 + o_1$ که در آن تقریباً همه جا $o_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ در

ادامه با استفاده از بسط تیلور تابع $\frac{1}{x}$ می‌توان نوشت:

$$\hat{b}(\lambda) = \frac{\hat{a}(\lambda)(1-e^{-\lambda\Delta})}{\bar{Y}(\lambda)} = \frac{\hat{a}(\lambda)b}{a} - \frac{\hat{a}(\lambda)b^2}{a^2(1-e^{-\lambda\Delta})} \varepsilon_2 + \frac{\hat{a}(\lambda)(1-e^{-\lambda\Delta})}{x_g^2} \varepsilon_2^2 \quad (17)$$

که در آن $\varepsilon_2 = \bar{Y}(\lambda) - \frac{a(1-e^{-\lambda a\Delta})}{b}$ و $x_g = \frac{a(1-e^{-\lambda a\Delta})}{b}$ قرار دارد. با جایگذاری معادله (۱۶) در

(۱۷) و بر اساس قضیه ۲-۳ داریم: $\sqrt{N}(\hat{b}(\lambda) - b) = -\frac{b}{a\lambda\Delta e^{-\lambda a\Delta}} \sqrt{N} \varepsilon_1 - \frac{b^2}{a(1-e^{-\lambda\Delta})} (\sqrt{N} \varepsilon_2) + o_2$ که در

آن $o_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ با استفاده از قضیه ۲-۳ می‌توان نشان داد: $\sqrt{N}(\hat{a}(\lambda) - a, \hat{b}(\lambda) - b) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_0)$ در نتیجه با

توجه به اینکه $\sqrt{N}(\hat{a} - a, \hat{b} - b)$ و $\sqrt{N}(\hat{a}(\lambda) - a, \hat{b}(\lambda) - b)$ دارای توزیع مجانبی یکسان هستند خواهیم

داشت، $\sqrt{N}(\hat{a} - a, \hat{b} - b) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_0)$ در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

باید اشاره کنیم که قضیه ۲-۳ را می توان به انواع دیگر فرایندهای ارنشتاین اولنیک نیز تعمیم داد. به عنوان مثال، یک فرایند ارنشتاین اولنیک را که توسط یک فرایند پواسون مرکب همراه با پرش های پارتو^۱ استخراج می شود در نظر بگیرید یعنی،

$$J(x) = \int_0^x b(1+t)^{-b-1} dt, \quad x > 0, b > 2$$

آنگاه مشابه قضیه ۳-۳، داریم:

$$\sqrt{N}(\hat{a} - a, \hat{b} - b) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma_1)$$

که در آن ماتریس کواریانس به صورت زیر است:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \frac{(1-P_0)}{(\lambda\Delta)^2 P_0} & -\frac{(1-e^{-\lambda\Delta})b}{(\lambda\Delta)^2 P_0(b-1)} - \frac{b(b-1)}{\lambda\Delta} \\ -\frac{(1-e^{-\lambda\Delta})b}{(\lambda\Delta)^2 P_0(b-1)} - \frac{b(b-1)}{\lambda\Delta} & \frac{b^2(b-1)^2(1-P_0)}{(a\lambda\Delta)^2 P_0} + \frac{(b-1)^4(1-e^{-2\lambda\Delta})b}{2a(1-e^{-\lambda\Delta})^2(b-2)} - \frac{2b^2(b-1)^2}{a\lambda\Delta} \end{bmatrix}$$

از طرفی می توانیم نتایج خود را بیشتر به مواردی تعمیم دهیم که b می تواند بردار شامل چندین پارامتر باشد، در این صورت به گشتاورهای بیشتری از $Y_n(\lambda)$ نیاز است. به عنوان مثال نتایج عددی را برای پرش های نرمال ارائه خواهیم داد، در این حالت b یک بردار دو بعدی است که شامل میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال مربوطه می باشد و معادلات دو گشتاور اول برای $Y_n(\lambda)$ به عنوان برآوردگرهای گشتاوری به کار گرفته خواهند شد.

۳. نتایج عددی

در این بخش سه نوع فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش های گاما، پارتو و نرمال مورد آزمایش قرار می گیرند. پرش های دو فرایند اول ارنشتاین اولنیک مثبت هستند، در حالی که پرش های سومین فرایند می توانند مثبت یا منفی باشند. پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش نرمال به صورت (b_1, b_2) هستند، که در آن b_1 و b_2 به ترتیب میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال می باشند. برای این مثال، برآوردگرهای زیر را برای b_1 و b_2 داریم

$$\hat{b}_1 = \frac{\bar{Y}(\hat{\lambda})}{\hat{a}(1-e^{-\hat{\lambda}\Delta})}$$

¹ Pareto

$$\hat{b}_2 = \sqrt{\frac{2 \sum_{n=1}^N (Y_n(\hat{\lambda}) - \bar{Y}(\hat{\lambda}))^2}{(N-1)\hat{a}(1-e^{-2\hat{\lambda}\Delta})}} - \hat{b}_1^2$$

که در آن دو گشتاور اول $Y_n(\lambda)$ به صورت زیر است

$$E[Y_n(\lambda)] = a(1-e^{-\lambda\Delta})E[J_i] = a(1-e^{-\lambda\Delta})b_1$$

$$Var(Y_n(\lambda)) = \frac{a}{2}(1-e^{-2\lambda\Delta})E[J_i^2] = \frac{a}{2}(1-e^{-2\lambda\Delta})(b_1^2 + b_2^2)$$

شبه‌سازی‌های عددی برای چندین ترکیب از مقادیر مختلف پارامتر اجرا شده است، هر کدام ۱۰۰ بار با اندازه نمونه ۵۰، تکرار می‌شوند. تنظیمات ترکیب پارامتر در بسیاری از موارد مشابه روش برآورد گشتاوری تعمیم‌یافته (GMM) است اما انحراف معیار آن کوچکتر است. نتایج در جداول ۱-۳ برای پرش‌های گاما، جداول ۴-۶ برای پرش‌های پارتو و جداول ۷-۱۰ برای پرش‌های نرمال (میانگین \pm انحراف معیار) ارائه شده است. لازم به ذکر است، از آنجایی که برای ارائه نتایج عددی از نرم افزار متلب استفاده شده است و تولید متغیر تصادفی پارتو در نرم افزار متلب تعریف نشده است، خودمان با استفاده از روش تبدیل وارون به صورت زیر آن را تولید می‌کنیم.

می‌دانیم برد تابع توزیع هر متغیر تصادفی بین ۰ و ۱ است. پس می‌توانیم برای تولید متغیر تصادفی پارتو، تابع توزیع آن را برابر با متغیر تصادفی یکنواخت $u \sim U(0,1)$ قرار دهیم، یعنی

$$1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha = u, x \in [\beta, \infty),$$

که در آن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ به ترتیب پارامتر مقیاس و مکان است. بنابراین داریم

$$\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha = 1 - u \equiv u \sim U(0,1)$$

پس متغیرهای تصادفی پارتو (i.i.d) را به صورت زیر می‌توان تولید کرد:

$$x_i = \beta(u_i)^{-\frac{1}{\alpha}}, u_i \stackrel{i.i.d}{\sim} U(0,1), i = 1, 2, \dots$$

با توجه به این که فرایندهای ارنشتاین اولنیک با پرش‌های گاما و پارتو فقط پرش‌های مثبت دارند، از معادله (۹) استفاده می‌کنیم. برای برآورد λ در هر سه روش (جداول ۱-۶) برای فرایندهای ارنشتاین اولنیک با پرش‌های نرمال به منظور برآورد پارامتر λ در هر دو روش (جداول ۷-۱۰) از معادله (۶) استفاده می‌کنیم. زیرا در این حالت پرش می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بنابراین، نتایج عددی λ برای سه روش در همه جداول یکسان است. در همه موارد، برآوردگرهای λ بسیار خوب کار می‌کنند. همان‌طور که توسط نتایج عددی در جداول ۱-۱۰ نشان داده شده است روش ارائه شده برای تخمین (a, b) در تمام این تنظیمات آزمایشی بسیار بهتر از GMM عمل می‌کند. در روش ارائه شده نه تنها میانگین تخمین زده شده (mean) به مقادیر واقعی نزدیکتر است، بلکه دارای انحراف معیار (std) کوچکتر نیز می‌باشد. نتایج در جداول ۱، ۴ و ۷ نشان می‌دهد که

مزایای روش ارائه شده نسبت به GMM در تخمین (a, b) برای مقادیر کوچکتر λ ، زمانی که پرشها کمتر اتفاق می افتد، مشهودتر است. توجه داریم که یک فرایند ارنشتاین اولنیک که توسط یک فرایند پواسون مرکب استخراج می شود، یک فرایند نمو-مستقل (و همچنین مانا) است، بنابراین برای مقدار کوچک λ ، این فرایند پرشهای کم دارد و تعداد نمونه های اندک i.i.d ایجاد کند، نمونه هایی که در یک دوره معین به طور بالقوه باعث افزایش کارایی GMM می شود. از طرف دیگر، برای مقدار بزرگ λ ، فرایند ارنشتاین اولنیک پرشهای مکرری دارد، بنابراین نمونه های i.i.d بیشتری تولید می کند. نمونه هایی که در یک دوره مشخص، باعث می شود روش GMM کارایی کمتری داشته باشد. با این حال، در بسیاری از برنامه ها مانند قیمت-گذاری دارایی های مالی، چنین پرشهایی به دفعات زیاد اتفاق نمی افتد، که در این صورت روش ارائه شده عملکرد بسیار بهتری خواهد داشت.

جدول ۱: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف λ تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش گاما

Parameter	True Value	Our Method mean± std	GMM mean± std
λ	0.1	0.1026±0.0017	0.1297±0.0267
a	2	1.9917±0.4603	2.6629±1.4794
b	0.5	0.5278±0.1198	0.4552±0.1812
λ	0.3	0.3056±0.0088	0.3334±0.0548
a	2	2.0028±0.3009	1.3610±0.3074
b	0.5	0.5101±0.0748	0.7661±0.1489
λ	0.6	.6347±0.0438	0.6648±0.089
a	2	1.8771±0.2887	0.9947±0.1256
b	0.5	0.5450±0.0839	1.0205±0.1257
λ	0.9	0.9634±0.0947	0.9747±0.1183
a	2	1.9483±0.3330	0.8732±0.0850
b	0.5	0.5279±0.0896	1.1560±0.1148

جدول ۲: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف a تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش گاما

Parameter	True Value	Our Method	GMM
		mean \pm std	mean \pm std
λ	0.3	0.3008 \pm 0.0127	0.3070 \pm 0.0221
a	1	0.9926 \pm 0.1971	7.0275 \pm 3.807
b	0.5	0.5263 \pm 0.1251	0.0912 \pm 0.0471
λ	0.3	0.3024 \pm 0.0106	0.3195 \pm 0.0549
a	2	2.0335 \pm 0.3032	1.3361 \pm 0.2403
b	0.5	0.5028 \pm 0.0772	0.7714 \pm 0.1326
λ	0.3	0.3053 \pm 0.0087	0.3547 \pm 0.0851
a	3	3.001 \pm 0.4286	0.7010 \pm 0.0958
b	0.5	0.5100 \pm 0.07421	2.1832 \pm 0.3311
λ	0.3	0.3040 \pm 0.0078	0.3731 \pm 0.1253
a	4	3.9763 \pm 0.5553	0.8732 \pm 0.0850
b	0.5	0.51521 \pm 0.0681	4.0977 \pm 0.8560

جدول ۳: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف b تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش گاما

Parameter	True Value	Our Method	GMM
		mean \pm std	mean \pm std
λ	0.3	0.3046 \pm 0.0078	0.3070 \pm 0.0221
a	3	2.9374 \pm 0.3929	0.3007 \pm 0.0122
b	0.1	0.1037 \pm 0.0566	0.0566 \pm 0.0074
λ	0.3	0.3046 \pm 0.0121	0.3731 \pm 0.2144
a	3	2.9632 \pm 0.4239	0.3385 \pm 0.1294

b	1	1.0344±0.1598	8.6692±3.4188
λ	0.3	0.3051±0.0086	0.1755±0.3793
a	3	2.9809±0.4352	0.1282±0.1549
b	2	2.0541±0.2931	17.8705±31.0512
λ	0.3	0.3053±0.0087	0.0749±0.3706
a	3	2.9388±0.3789	0.0211±0.1413
b	3	3.1125±0.4034	3.4760±83.1673

جدول ۴: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف λ تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش پارتو با نرخ مکان b

Parameter	True Value	Our Method mean± std	GMM mean± std
λ	0.1	0.1355±0.0596	0.1092±0.1186
a	3	2.8708±0.4850	2.0881±0.0883
b	6	5.7754±0.5508	1.3515±1.2698
λ	0.3	0.3041±0.0438	0.2802±0.1808
a	3	3.0309±0.3982	2.1530±0.0896
b	6	5.9772±0.4200	4.0504±2.4529
λ	0.6	0.6056±0.0389	0.3935±0.2238
a	3	3.0904±0.3964	2.1690±0.0882
b	6	5.9562±0.3390	6.8995±3.0527
λ	0.9	0.8854±0.0721	0.5246±0.1941
a	3	3.2415±0.6511	2.2085±0.0646
b	6	6.1181±0.5496	8.9463±2.6558

جدول ۵: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف a تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش پارتو با نرخ مکان b

Parameter	True Value	Our Method	GMM
		mean \pm std	mean \pm std
λ	0.3	0.3339 \pm 0.0891	0.2308 \pm 0.2661
a	2	2.0661 \pm 0.3304	2.0716 \pm 0.0695
b	6	6.0423 \pm 0.9743	2.8092 \pm 2.2430
λ	0.3	0.3129 \pm 0.0438	0.3764 \pm 0.1511
a	4	3.9634 \pm 0.5144	2.2508 \pm 0.0594
b	6	5.9461 \pm 0.2867	6.2204 \pm 2.0582
λ	0.3	0.2952 \pm 0.01972	0.2872 \pm 0.1698
a	8	8.0654 \pm 0.9063	2.2568 \pm 0.1129
b	6	5.9965 \pm 0.0960	8.3948 \pm 4.2129
λ	0.3	0.3013 \pm 0.0248	0.2034 \pm 0.1990
a	10	10.4446 \pm 1.9133	2.2148 \pm 0.1293
b	6	6.0084 \pm 0.1140	7.9797 \pm 5.8796

جدول ۶: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف b تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش پارتو با نرخ مکان b

Parameter	True Value	Our Method	GMM
		mean \pm std	mean \pm std
λ	0.3	0.3174 \pm 0.0471	0.0368 \pm 0.0283
a	6	6.1173 \pm 0.8604	2.0188 \pm 0.0325
b	1	1.0001 \pm 0.0275	0.1490 \pm 0.1322
λ	0.3	0.3145 \pm 0.0724	0.3251 \pm 0.1718

a	6	6.008±0.8072	2.2557±0.0961
b	2	1.9930±0.0577	2.4987±1.1463
λ	0.3	0.2980±0.0283	0.3131±0.2091
a	6	6.2266±0.8170	2.2500±0.1081
b	4	4.0158±0.1045	4.9896±2.7113
λ	0.3	0.3019±0.0270	0.02807±0.2362
a	6	6.3408±0.8598	2.2894±0.0735
b	6	6.0445±0.1522	8.9363±3.6096

جدول ۷: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف λ تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش نرمال با میانگین و انحراف معیار b_2, b_1

Parameter	True Value	Our Method mean± std	GMM mean± std
λ	0.1	0.1068±0.0146	0.1034±0.0218
a	3	3.0547±0.5758	3.1184±1.1107
b_1	0	0.0075±0.1926	0.0228±0.0860
b_2	1	1.0005±0.2067	0.5452±0.1848
λ	0.4	0.4040±0.0244	0.4145±0.1402
a	3	2.9989±0.4010	3.2266±1.1607
b_1	0	0.0081±0.1076	0.0277±0.1135
b_2	1	1.1748±0.1420	1.0779±0.1477
λ	0.8	0.8±0	0.8978±0.2498
a	3	2.9668±0.3407	2.8943±1.0529
b_1	0	0.0091±0.0787	0.0099±0.1343
b_2	1	1.4076±0.1279	1.5590±0.1413

جدول ۸: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف a تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش نرمال با میانگین و انحراف معیار b_1 ، b_2

Parameter	True Value	Our Method	GMM
		mean \pm std	mean \pm std
λ	0.6	0.6109 \pm 0.0384	0.6113 \pm 0.1100
a	1	1.0235 \pm 0.1352	1.0331 \pm 0.2194
b_1	0	0.0383 \pm 0.1846	0.0305 \pm 0.1086
b_2	1	1.2952 \pm 0.1240	0.7774 \pm 0.1032
λ	0.6	0.6050 \pm 0.0301	0.6434 \pm 0.1618
a	2	1.9736 \pm 0.2306	1.9518 \pm 0.5236
b_1	0	0.0127 \pm 0.1105	0.0386 \pm 0.1428
b_2	1	1.2953 \pm 0.1513	1.1040 \pm 0.1277
λ	0.6	0.6042 \pm 0.0556	0.6204 \pm 0.1921
a	3	3.0227 \pm 0.4054	3.2469 \pm 1.2280
b_1	0	-0.0034 \pm 0.0913	0.0013 \pm 0.1492
b_2	1	1.2652 \pm 0.1240	1.3282 \pm 0.1302
λ	0.6	0.6 \pm 0	0.5505 \pm 0.2122
a	4	4.1846 \pm 0.4551	5.3661 \pm 2.4448
b_1	0	0.0106 \pm 0.0679	-0.0326 \pm 0.1904
b_2	1	1.30443 \pm 0.1163	1.5812 \pm 0.1443

جدول ۹: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف b_1 تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش نرمال با میانگین و انحراف معیار b_1, b_2

Parameter	True Value	Our Method mean± std	GMM mean± std
λ	0.6	0.5893±0.0343	0.6198±0.3952
a	2	2.0135±0.2541	2.6924±1.7505
b_1	-2	-2.6422±0.2137	-2.2335±0.8796
b_2	1	3.2063±0.2668	3.3657±0.6059
λ	0.6	0.5975±0.0493	0.5770±0.2300
a	2	1.9655±0.2778	2.3788±1.0429
b_1	-1	-1.2706±0.1910	-1.0444±0.3892
b_2	1	2.0703±0.1921	1.8833±0.2921
λ	0.6	0.6223±0.0681	0.4690±0.2135
a	2	2.0339±0.2620	3.5026±3.2431
b_1	1	1.3228±0.1953	0.8508±0.4627
b_2	1	1.5250±0.2420	1.8886±0.2254
λ	0.6	0.6244±0.0908	0.1227±0.2309
a	2	2.0482±0.3028	11.1170±47.8199
b_1	2	2.6718±0.2950	0.3203±1.2199
b_2	2	2.5010±0.3062	3.0150±0.5057

جدول ۱۰: مقایسه دو روش برای مقادیر مختلف b_2 تحت فرایند ارنشتاین اولنیک با پرش نرمال با میانگین و انحراف معیار b_1 ، b_2

Parameter	True Value	Our Method mean± std	GMM mean± std
λ	0.6	0.5979±0.0176	0.6118±0.0720
a	2	2.0041±0.2046	1.9906±0.3048
b_1	0	-0.0041±0.0599	-0.0019±0.0558
b_2	0.5	0.6208±0.0643	3.3657±0.6059
λ	0.6	0.6089±0.0273	0.6079±0.1537
a	2	2.0760±0.2941	2.19125±0.6780
b_1	0	-0.0105±0.1222	-0.0081±0.10831
b_2	1	1.2862±0.1075	1.0960±0.0904
λ	0.6	0.6088±0.0474	0.6953±0.3298
a	2	2.0114±0.2663	1.18863±7.0532
b_1	0	0.0211±0.1986	0.0640±0.3540
b_2	2	2.5916±0.2597	2.3038±0.2474
λ	0.6	0.6119±0.0760	4.6118±15.2546
a	2	2.0565±0.3347	4.7778±15.223
b_1	0	-0.0330±0.2856	0.0587±0.3292
b_2	3	3.8182±0.4949	3.4622±0.6677

۳-۱. شبیه‌سازی واقعی بازار مالی

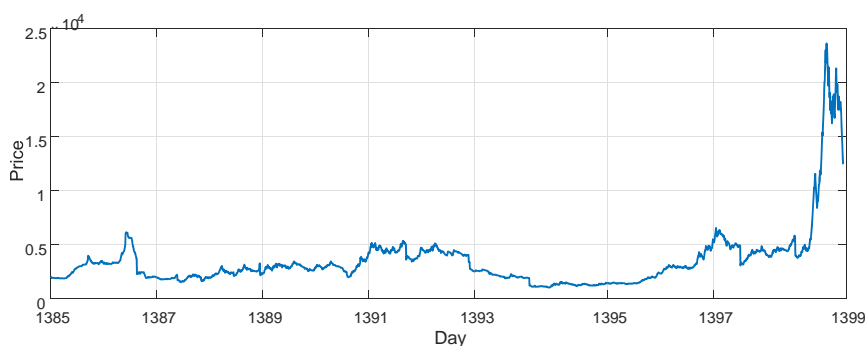
در این بخش، بر اساس روش برآوردگرهای ارائه شده، پارامترهای مدل ارنشتاین اولنیک-گاما، ارنشتاین اولنیک-پارتو و ارنشتاین اولنیک-نرمال را برای داده‌های واقعی فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹، تخمین می‌زنیم. شکل ۱ ارزش

واقعی بازار فولاد مبارکه اصفهان را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹ نشان می‌دهد. برای انجام این کار، داده‌های بازار را به صورت نرمال شده در نظر می‌گیریم.

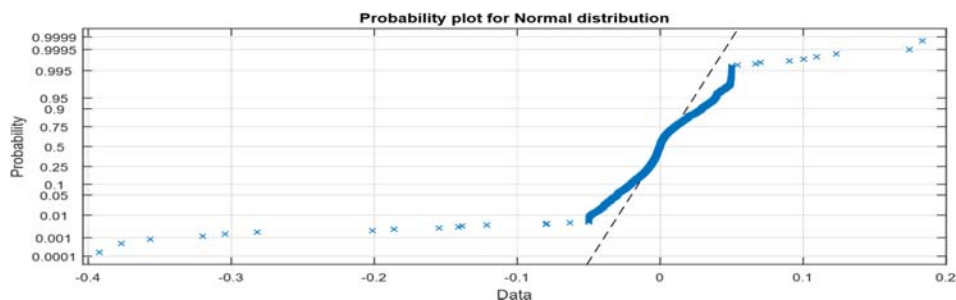
نرمال سازی داده‌های X^{real} به صورت زیر می باشد:

$$X^{normalized} = \frac{X^{real}}{\|x\|_{\infty}}$$

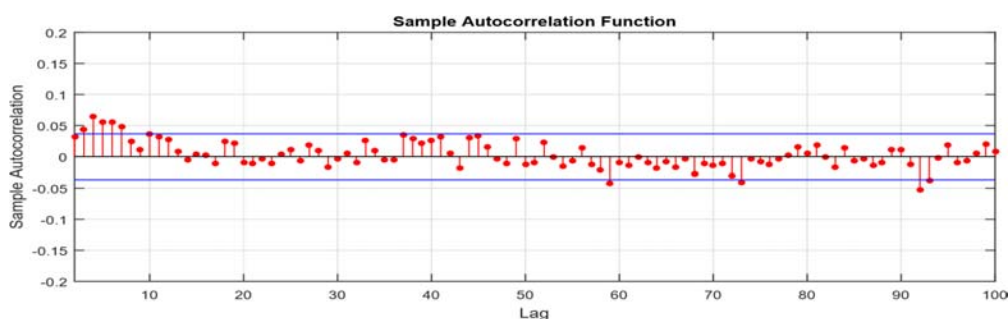
شکل ۲ آزمون نرمالیتی را برای بازده فولاد مبارکه اصفهان در بازه زمانی ذکر شده نشان می‌دهد. بر اساس این شکل، مشاهده می‌کنیم دم چپ توزیع بازده فولاد مبارکه اصفهان سنگین تر است و این بدان معناست که بازده این بازار دارای چولگی مثبت می‌باشد. شکل ۳ آزمون همبستگی را برای بازده فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹ نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود که همبستگی بازده‌های فولاد مبارکه اصفهان اندک است. از طرفی همان‌طور که اشاره شد، روش برآوردگر ارائه شده در این پژوهش برای نمونه‌های مستقل از هم (یا همبستگی کم) عملکرد مطلوبی دارد. با توجه به این حقیقت که همبستگی بازده فولاد مبارکه اصفهان کوچک است، بنابراین به کارگیری روش ارائه شده برای تخمین پارامترها براساس فولاد مبارکه اصفهان می‌تواند کارا باشد. جداول ۱۱-۱۳ به ترتیب تخمین پارامترهای مدل ارنشتاین اولنیک-گاما، ارنشتاین اولنیک-پارتو و ارنشتاین اولنیک-نرمال را برای داده‌های واقعی فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹ بر اساس روش ارائه شده در این مطالعه نشان می‌دهد. همچنین، نمودارهای ۴-۶ شبیه سازی تلاطم بازار فولاد مبارکه اصفهان را در تاریخ ذکر شده به ترتیب براساس پارامترهای تخمینی مدل‌های ارنشتاین اولنیک-گاما، پارتو و نرمال به صورت میانگین پنج مسیر شبیه سازی شده نشان می‌دهد.



شکل ۱: ارزش واقعی بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹



شکل ۲: آزمون توزیع نرمال برای بازده بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹



شکل ۳: آزمون خودهمبستگی بازده بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹

جدول ۱۱: تخمین پارامترهای مدل ارنشتاین اولنیک با پرش گاما براساس مشاهدات بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹

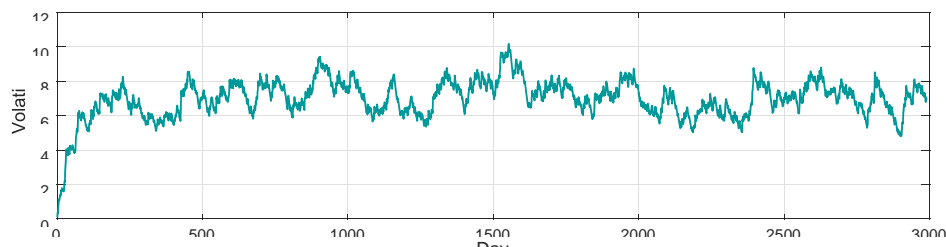
λ	a	b
3.5203	0.6293	1.9067

جدول ۱۲: تخمین پارامترهای مدل ارنشتاین اولنیک با پرش پارتو براساس مشاهدات بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹

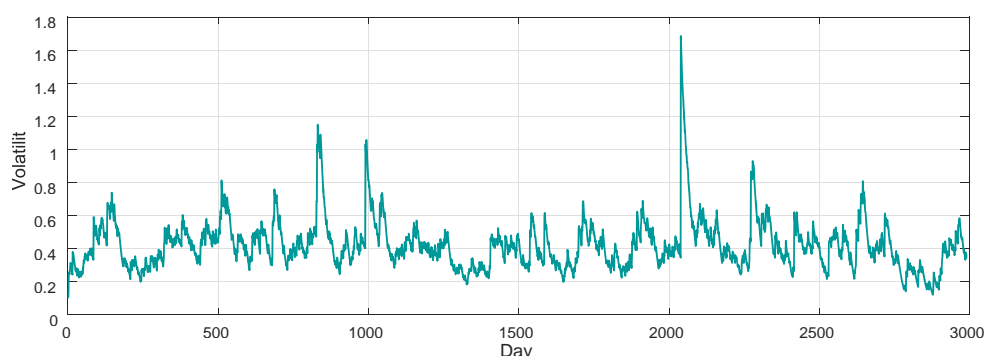
λ	a	b
2.121	1.4928	0.1485

جدول ۱۳: تخمین پارامترهای مدل ارنشتاین اولنیک با پرش نرمال براساس مشاهدات بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹

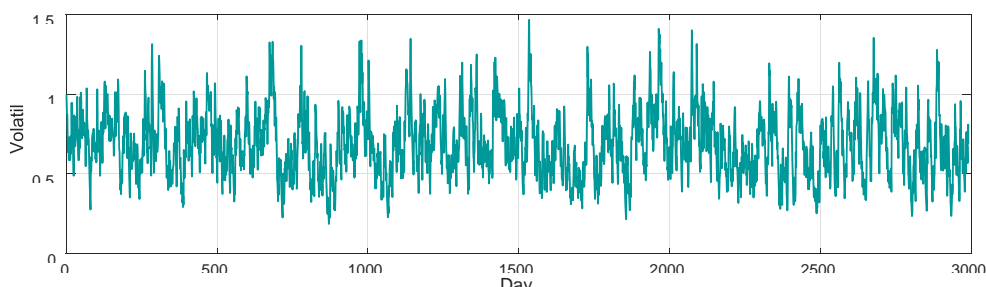
λ	a	b_1	b_2
2.7356	1.5007	0.0361	0.0666



شکل ۴: تلاطم بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹ براساس مدل ارنشتاین اولنیک-گاما.



شکل ۵: تلاطم بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹ براساس مدل ارنشتاین اولنیک-پارتو.



شکل ۶: تلاطم بازار فولاد مبارکه اصفهان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۹ بر اساس مدل ارنشتاین اولنیک-نرمال.

نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله برآورد پارامترهای فرایندهای ارنشتاین اولنیک استخراج شده توسط فرایندهای پواسون مرکب مورد مطالعه قرار گرفت. برای چنین فرایندهایی، می‌توان از معادلات بازگشتی زمان گسسته برای توصیف تحولات فرایندها و استخراج سایر اطلاعات مفید بالقوه استفاده کرد. با این حال، به دلیل کمبود فرمول‌های فرم بسته برای توابع چگالی انتقال،

استفاده از روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی به طور کلی دشوار خواهد بود. از طرف دیگر، معادلات بازگشتی فرمول‌های بسته و صریح را برای محاسبه امید ریاضی که بر اساس آن روش تخمین پارامترها پیاده‌سازی می‌شود در اختیار قرار می‌دهند. در برآورد (a, b) ، یک مسأله اضافی وجود دارد که پارامتر λ ناشناخته است و باید تخمین زده شود. در روش ارائه شده λ با برآوردگر آن جایگزین می‌شود و ثابت می‌شود که قضیه حد مرکزی در (\hat{a}, \hat{b}) نیز صدق می‌کند و برآوردگرهای پیشنهادی برای (a, b) وجود دارند. نکته کلیدی برای قضیه حد مرکزی که در این مطالعه به آن پرداختیم این است که نمونه‌هایی که برای استخراج (\hat{a}, \hat{b}) استفاده می‌شود همان خصوصیات مجانبی نمونه‌های i.i.d. را دارند. نتایج عددی نشان داد که روش در نظر گرفته شده برآورد بهتری نسبت به سایر روش‌های برآورد موجود به دست می‌دهد.

یکی از جهت‌های تحقیقاتی مرتبط با این پژوهش، در نظر گرفتن کاربرد روش ارائه شده در مسئله برآورد پارامترها برای مدل‌های نوسان تصادفی استخراج شده توسط فرایندهای لوی است که در آن ممکن است نوسانات به صورت مستقیم مشاهده نشوند. در نظر گرفتن مدل واریانس گاما و تخمین پارامترهای آن با استفاده از این روش جزو موضوعاتی است که می‌تواند در آینده بررسی شود.

References

1. O. E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard, Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society*, **63** (2001), 167-241.
2. O. E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard, Financial volatility, Levy processes and power variation, (2000).
3. R. C. Merton, Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973), 141-183.
4. F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, **81** (1973), 637-654.
5. R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jumps*, Chapman Hall / CRC Press, (2004).
6. J. E. Griffin and M. F. Steel, Inference with non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes for stochastic volatility, *J Econ*, **134** (2006), 605-644.
7. G. O. Roberts, O. Papaspiliopoulos and P. Dellaportas, Bayesian inference for non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes, *J R Stat Soc Ser B (Stat Method)*, **66** (2004), 369-393.
8. M. P. Gander and D. A. Stephens, Stochastic volatility modelling in continuous time with general marginal distributions: inference, prediction and model selection, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137** (2007), 3068-3081.
9. L. Valdivieso, W. Schoutens and F. Tuerlinckx, Maximum likelihood estimation in processes of Ornstein-Uhlenbeck type, *Stat Infer Stoch Process*, **12** (2009), 1-19.
10. S. B. Zhang, X. S. Zhang and S. G. Sun, Parametric estimation of discretely sampled gamma-ou processes, *Sci China Ser A Math*, **49** (2006), 1231-1257.
11. H. Mai, Efficient maximum likelihood estimation for Levy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes, *Bernoulli*, **20** (2014), 919-957.

12. P. L. Brockwell, R. A. Davis and Y. Yang, Estimation for nonnegative Levy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes, *J Appl Probab.* **44** (2007), 977–989.
13. K. Spiliopoulos, Method of moments estimation of Ornstein-Uhlenbeck processes driven by general Levy process. In: *Annales de l'ISUP, Institut de statistique del Universite de Paris*, **53** (2009), 3–18.
14. L. A. Barboza and F. G. Ziens, Parameter estimation of gaussian stationary processes using the generalized method of moments, *Electronic Journal of Statistics*, **11** (2017), 401–439.
15. G. Jongbloed, F. Van Der Meulen and A. Van Der Vaart, Nonparametric inference for Levy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes, *Bernoulli*, **11** (2005), 759–791.
16. Y. Wu, J. Hu and X. Zhang, Moment estimators for the parameters of Ornstein-Uhlenbeck processes driven by compound Poisson processes. *Discrete Event Dynamic Systems*, **29** (2019), 57-77.
17. O. E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard, Non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *J R Stat Soc Ser B (Stat Method)*, **63** (2001), 167-241.
18. P. J. Brockwell, Levy-driven continuous-time arma processes. In: *Handbook of financial time series*. Springer, (2009), 457-480.
19. S. M. Ross, *Introduction to probability models*, Academic Press, Cambridge, (2010).