Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

On the Boundedness of Littlewood-Paley $g^*_{B,\lambda}$ Operator Associated with Bessel Differential Operator

Arash Ghorbanalizadeh [1], **Monire Mikaeili Nia** [2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Institute for Advanced studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran. E-mail: ghorbanalizadeh@iasbs.ac.ir
2., Department of Mathematics, Institute for Advanced studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran. E-mail: moniremikaeili@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
5 September 2021
Received in revised form: 6 June 2022
Accepted:
12 June 2022
Published online:
9 June 2024

Keywords:
Almost contact structure,
B-metrics,
Natural metric,
Sphere bundle,
Structure tensor.

ABSTRACT

Introduction

Littlewood-Paley operators have essential roles in harmonic analysis due to their applications in PDEs and other fields. One important such operators is g^*_λ. It is well known that g^*_λ function originated in the work of Littlewood and Paley in the 1930s . In 1961, Stein introduced and studied the following higher dimensional $(n \geq 2)$ classical Littlewood-Paley g^*_λ function:

$$g^*_\lambda(f)(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} |\nabla P_t f(t,y)|^2 \frac{dtdy}{t^{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

where $P_t(t,y) = P_t * f(y)$, $P_t(y) = t^{-n} P\left(\frac{y}{t}\right)$denotes the Poisson kernel, and

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

It is well-known that the weak $(1,1)$ and weak (p,p) boundedness of the classical g^*_λ with Poisson kernel were studied by Stein and Fefferman, respectively. As g^*_λdepends on λ, its (p,p)- strong boundedness on $\mathbb{R}^n$ also depends on the correct relation between p, λ and n. In 1970, Fefferman showed that g^*_λ is strong type bounded of (p,p)on $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 < p < \infty$ and $\lambda > max\left\{1, \frac{2}{p}\right\}$.

Theorem.
If $\lambda > 2$, then g^*_λ is of weak type (1,1);
If $\lambda > 2$, then $g^*_\lambda$is of strong type $(p,p)$for $1 < p < \infty$;
If $1 < \lambda \leq 2$, then $g^*_\lambda$is of strong type $(p,p)$for $\frac{2}{\lambda} < p < \infty$.

Now in above definition of g^*_λ, if we replace Poisson kernel with Littlewood-Paley function, considering Laplace-Bessel differential operator, then we can establish the new generation of g^*_λ. Inspired by above Theorem of Fefferman's work, we will recover a relation between n, p, ν, and λ to verify its boundedness and unboundedness.

Material and Methods

Let $x=(x_1,\dots x_{n-1},x_n)=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$. For a fixed parameter $\nu>0$ we set $S^{n-1}_+=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : |x|=1\}$ and

$$\left|S^{n-1}_+\right|_\nu=\int_{S^{n-1}_+} x_n^{2\nu}dx.$$

We consider the Laplace-Bessel differential operator

$$\Delta_B=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\quad \nu>0,$$

on $\mathbb{R}^n_+$. Let $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$ be the space of all measurable functions on $\mathbb{R}^n_+$ for which

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p\, d\mu_\nu(x)=\int_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p\, x_n^{2\nu}dx,$$

is finite with $d\mu_\nu(x)=x_n^{2\nu}dx=x_n^{2\nu}dx_1dx_2\dots dx_n$.

We recall T^y is the generalized translation operator which is defined by

$$T^y g(x)=\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi g\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\phi+y_n^2}\right)sin^{2\nu-1}\phi d\phi.$$

The translation operator represents the ordinary (Euclidean) translation in $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$.

The Fourier-Bessel harmonic analysis is adapted to the generalized convolution

$$f\otimes g(x)=\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)\left(T^y g(x)\right)y_n^{2\nu}dy,\qquad x\in\mathbb{R}^n_+.$$

In this work, we define $g^*_{B,\lambda}$operator on $\mathbb{R}^n_+$ associated with Laplace-Bessel differential operator explicitly, by

$$g^*_{B,\lambda}f(x)=\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t\otimes f(y)|^2\frac{y_n^{2\nu}dy}{|B_+(x,t)|_\nu}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

where $B_+(x,t)=\{y\in\mathbb{R}^n_+ : |y-x|<t\}$, $\psi_t(x)=t^{-(n+2\nu)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$.

Definition.

We say that a scalar-valued radial function (with respect to last coordinate of ψ) on $\mathbb{R}^n_+$ is a $G-$Littlewood-Paley (corresponding to generalized shift operator) if the following three conditions are satisfied

$$\psi\in L^1_\nu(\mathbb{R}^n_+);\qquad \int_{\mathbb{R}^n_+}\psi(x)x_n^{2\nu}dx=0,$$

$$|\psi(x)|\le C(1+|x|)^{-(n+2\nu+\beta)},\text{for some}\quad \beta>0,$$

$$|T^y\psi(x)-T^{y'}\psi(x)|\le\frac{A|y-y'|^\alpha}{\left(1+|x-y|\right)^{n+2\nu+\alpha+1}},\quad |y-y'|<\frac{1}{2}|x-y|\quad\text{for some}\quad \alpha>0.$$

Results and discussion

Inspired by the work of Fefferman and Stein, we define $g^*_{B,\lambda}$operator on $\mathbb{R}^n_+$ associated with Laplace-Bessel differential operator. Moreover, we establish some Lemmas to be used through the proof of main theorems. Then we present two main theorems related to boundedness and unboundedness of new operator $g^*_{B,\lambda}$ in new manner.

We show that $g^*_{B,\lambda}$ is bounded on $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$ for $2 \leq P < \infty$. Moreover, we investigate that $g^*_{B,\lambda}$ is unbounded on $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$ for $1 \leq p < \infty$ and $\lambda < \frac{2}{P} + \frac{4\nu}{pn}$.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

$g^*_{B,\lambda}$, Littlewood-Paley operators associated with Laplace-Bessel differential operator, is unbounded on $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$ for $1 \leq p < \infty$ and $\lambda < \frac{2}{P} + \frac{4\nu}{pn}$.

$g^*_{B,\lambda}$, Littlewood-Paley operators associated with Laplace-Bessel differential operator, is bounded on $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$ for $2 \leq P < \infty$.

The boundedness problem of $g^*_{B,\lambda}$ is open for $1 \leq p < 2$.

How to cite: Ghorbanalizadeh, A., Mikaeili Nia, M. On the boundedness of littlewood-paley $g^*_{B,\lambda}$ operator associated with Bessel differential operator. *Mathematical Researches*, **10** (1), 1 – 17.

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مطالعه‌ی کرانداری عملگر لیتلوود–پالی $g_{B,\lambda}^*$ متناظر با عملگر دیفرانسیل بسل

آرش قربانعلی زاده [۱]✉، منیره میکائیلی‌نیا [۲]

۱. نویسنده مسئول، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: ghorbanalizadeh@iasbs.ac.ir
۲. دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: moniremikaeili@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۳/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۳/۲۰

واژه‌های کلیدی:
عملگرهای لیتلوود-پالی g_λ^*،
کرانداری از نوع قوی،
عملگر $g_{B,\lambda}^*$ متناظر با عملگر بسل،
بی‌کرانی عملگر $g_{B,\lambda}^*$.

چکیده

عملگرهای لیتلوود–پالی، بدلیل کاربردهایشان در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و دیگر شاخه‌های ریاضی، نقش مهمی در آنالیز فوریه دارند. از جمله عملگرهای لیتلوود–پالی، عملگر g_λ^* می‌باشد. به هنگام مطالعه کرانداری این عملگر در حالت کلاسیک، وابسته بودن کرانداری از نوع قوی این عملگر در فضای L^p $(1 < p < \infty)$، به پارامتر λ مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است که این مطلب در مطالعه‌ی کرانداری عملگر g_λ^* در کار ففرمن دیده می‌شود، در واقع، ففرمن کرانداری از نوع قوی عملگر g_λ^* را در فضای L^p برای $1 < p < \infty$، به‌ازای $\lambda > max\left\{1, \frac{2}{p}\right\}$ به‌دست آورد. ما نظیر بسل عملگر g_λ^* را با $g_{B,\lambda}^*$ نشان می‌دهیم و $L_{p,v}$–کرانداری عملگر $g_{B,\lambda}^*$ برای $2 \le p \le \infty$ به ازای $p > \frac{2}{\lambda} + \frac{4v}{n\lambda}$ و نیز بی‌کرانی عملگر $g_{B,\lambda}^*$، به‌ازای $\lambda < \frac{2}{p} + \frac{4v}{pn}$ را در فضای $L_{p,v}(\mathbb{R}_+^n)$ به‌دست می‌آوریم.

استناد: قربانعلی زاده، آرش؛ میکائیلی‌نیا، منیره (۱۴۰۳). مطالعه‌ی کرانداری عملگر لیتلوود-پالی $g_{B,\lambda}^*$ متناظر با عملگر دیفرانسیل بسل. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۱)، ۱ – ۱۷.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

ریاضیدان‌های مشهور انگلیسی لیتلوود و پالی، برای مطالعه سری فوریه، عملگرهای g و g^*_λ را معرفی کردند. از طرف دیگر، لوزین ریاضیدان اتحاد جماهیر شوروی سابق، برای مطالعه‌ی مقادیر مرزی توابع تحلیلی، تابع لوزین یا تابع ناحیه‌ای S را معرفی کرد. بر اساس ارتباطی که بین این توابع موجود است، به آن‌ها توابع لیتلوود-پالی اطلاق می‌شود. عملگرهای لیتلوود-پالی نقش مهمی در آنالیز هارمونیک روی $\mathbb{R}^n$، بخصوص در مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی و تعیین فضاهای تابعی دارند.

هدف اصلی در این مقاله مطالعه‌ی عملگر g^*_λ نظیر عملگر دیفرانسیل لاپلاس-بسل است. در ادامه این عملگر را با نماد $g^*_{B,\lambda}$ نشان می‌دهیم. با توجه به ارتباط عملگرهای g و g^*_λ، ابتدا این عملگرها در حالت کلاسیک یادآوری می‌شود و در ادامه، تعریف عملگرهای مذکور متناظر عملگر دیفرانسیل لاپلاس-بسل معرفی می‌شود.

عملگر لیتلوود-پالی g برای هر $f \in L^p$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\nabla u(x,y)|^2\, y dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $u(x,y)$ پیچش هسته‌ی پوآسون با تابع f است. در واقع

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t)\, f(x-t)dt = P_y * f(x).$$

که در این‌جا P_y هسته‌ی پوآسون است و به شکل زیر تعریف می‌شود

$$P_y(t) = P(t,y) = c_n \frac{y}{(y^2+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

عملگر لیتلوود-پالی g در حالت $n = 1$، در ابتدا توسط لیتلوود و پالی به‌هنگام مطالعه‌ی تجزیه‌ی دودویی سری فوریه معرفی شد[۹,۱۰] و بعدها توسط زیگموند و مارچینکویچ در دهه‌ی ۱۹۳۰ به کمک نظریه‌ی توابع مختلط توسعه پیدا کرد. سپس الیاس م. استین، این نظریه را به ابعاد بالاتر تعمیم داد. تابع g، عملگر غیرخطی است که به کمک آن می‌توان نرم L^p تابعی روی $\mathbb{R}^n$ را برحسب انتگرال پوآسون آن تابع مشخص‌سازی کرد. به‌عبارت‌دیگر، استین نشان داد که عملگر g می‌تواند فضا را به معنای زیر دسته‌بندی کند.

قضیه ۱ [۸] . فرض کنید $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. آن‌گاه برای $1 < p < \infty$ داریم $g(f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و

$$\acute{A}_P \|f\|_p \le \|g(f)\|_p \le A_p \|f\|_p.$$

عملگر g_λ^*، برای اولین بار در دهه ۱۹۳۹-۱۹۳۰ در مطالعات لیتلوود و پالی ظاهر شد. استین [۱۲] در سال ۱۹۶۱، عملگر g_λ^* کلاسیک زیر را بطور مجرد معرفی و مطالعه کرد

$$g_\lambda^* f(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n} |\nabla P_t * f(t,y)|^2 \frac{dydt}{t^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

که در رابطه‌ی بالا P_t بیانگر هسته‌ی پوآسون، $P_t(y) = t^{-n} P\left(\frac{y}{t}\right)$ و $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ است.

به‌آسانی می‌توان دید که $g_\lambda^*(f)(x)$ بطور نقطه‌ای کران بالا برای $g(f)(x)$ می‌باشد. در مقاله [۱۱] استین ثابت کرد که اگر $\lambda > 2$ باشد، آن‌گاه g_λ^* از نوع ضعیف $(1,1)$ و از نوع قوی (p,p) برای $1 < p < \infty$ می‌باشد. هم‌چنین، ففرمن نشان داد که این عملگر برای $\lambda < \frac{2}{p}$ نمی‌تواند متعلق به $L^p(\mathbb{R}^n)$ باشد. این مطلب را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه۲ [۴] . عملگر g_λ^* را در نظر بگیرید و فرض کنید که $f \in L^p$.

(الف) اگر $\lambda > 2$ باشد، آن‌گاه g_λ^* از نوع ضعیف $(1,1)$ می‌باشد.

(ب) اگر $\lambda > 2$ باشد، آن‌گاه g_λ^* از نوع قوی (p,p) برای $1 < p < \infty$ می‌باشد.

(ج) اگر $1 < \lambda \le 2$ باشد، آن‌گاه g_λ^* از نوع قوی (p,p) برای $\frac{2}{\lambda} < p < \infty$ می‌باشد.

در سال‌های بعد، عملگرهای لیتلوود-پالی را در حالت‌های کلی‌تری بیان کردند و مورد مطالعه قرار دادند. این تعمیم‌ها، اولین بار توسط کالدرون و ترچنسکی [۱۴] انجام شدند. در واقع اگر در تعریف ۱، به‌جای P_t که هسته‌ی پوآسون است، یک تابع با خصوصیات مشخص که به تابع لیتلوود-پالی مشهوراست، قرار دهیم به تعریف کلی‌تری از (۱) می‌رسیم.

فرض کنید $n \ge 2$ و ψ یک تابع لیتلوود-پالی باشد، g_λ^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g_\lambda^*(f)(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-z|}\right)^{n\lambda} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $\psi_t(x) = t^{-n}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ و $\psi_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(x-y) f(y)dy$ می‌باشد.

۱. تعاریف و لم‌های اساسی

فضای $\mathbb{R}_+^n$ را به‌صورت $\{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) : x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R},\ x_n \in \mathbb{R}_+^n\}$ و

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2v}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right), v > 0$$

را به‌عنوان عملگر دیفرانسیل لاپلاس-بسل در نظر می‌گیریم. فضای $L_{p,\mathrm{v}}$ را برای $1\leq p<\infty$ و $v>0$، فضای همه توابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^n_+$ که

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p d\mu_v(x)=\int_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x_n^{2v}dx<\infty,$$

تعریف می‌کنیم. در واقع، در رابطه بالا $d\mu_v(x)=x_n^{2v}dx_1dx_2\ldots dx_n$ است. از نماد زیر برای نمایش نرم این فضا استفاده می‌کنیم

$$\|f\|_{p,v}=\int_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p\, x_n^{2v}dx.$$

اساس آنالیز هارمونیک فوریه-بسل، تعریف پیچش تعمیم‌یافته (بسل)

$$f\otimes g(x)=\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)\big(T^y g(x)\big)y_n^{2v}dy,\qquad x\in\mathbb{R}^n_+\,,$$

است که در آن T^y عملگر انتقال تعمیم‌یافته است.

عملگر انتقال تعمیم یافته T^y، نظیر عملگر دیفرانسیل لاپلاس-بسل روی فضای توابعی که نسبت به متغیر آخر شعاعی می‌باشند، به‌صورت‌زیر تعریف می‌شود

$$T^y g(x)=\frac{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi g\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\phi+y_n^2}\right)\sin^{2v-1}\phi\, d\phi, \tag{۲}$$

که در رابطه (۲) در $n-1$ مولفه‌ی اول، $x'=(x_1,\ldots x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$، انتقال معمولی است درحالی‌که در مولفه‌ی آخر، x_n، انتقال تعمیم‌یافته (بسل) می‌باشد. (رجوع کنید به [۱])

تعریف۱[۲]. به تابع اسکالر-مقدار ψ روی $\mathbb{R}^n_+$، که نسبت به متغیر آخر شعاعی است، یک تابع G-لیتلوود-پالی (متناظر با عملگر انتقال تعمیم‌یافته) گوییم، هرگاه

۱. $\psi\in L_{1,\mathrm{v}}(\mathbb{R}^n_+),\quad \int_{\mathbb{R}^n_+}\psi(x)x_n^{2v}dx=0$

۲. $\beta>0$ موجود باشد که، $|\psi(x)|\leq C(1+|x|)^{-(n+2v+\beta)}$

۳. $\alpha>0$ موجود باشد که، $|T^y\psi(x)-\psi(x)|\leq\dfrac{C\,|y|^\alpha}{(1+|x|)^{n+2v+1+\alpha}}$ برای $|y|\leq\dfrac{|x|}{2}$.

حال برای تابع G- لیتلوود-پالی ψ، عملگر متناظر لیتلوود-پالی g و g^*_λ نظیر عملگر دیفرانسیل لاپلاس-بسل را به‌صورت

زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف۲. عملگر g_B نظیر عملگر دیفرانسیل لاپلاس-بسل Δ_B، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_B(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\psi_t \otimes f(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

که

$$\psi_t \otimes f(y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T^s\psi_t(y)f(s)s_n^{2v}\,ds, \quad v > 0.$$

تعریف۳. عملگر $g_{B,\lambda}^*$ نظیر عملگر دیفرانسیل لاپلاس- بسل Δ_B، برای $\boldsymbol{v} > 0$ $t > 0,$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{B,\lambda}^* f(x) = \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n} |\psi_t \otimes f(y)|^2 \frac{y_n^{2v}dy}{|B_+(x,t)|_v}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{c_{n,v}}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n} |\psi_t \otimes f(y)|^2 \frac{y_n^{2v}dydt}{t^{2v+n+1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

که

$$B_+(x,t) = \{y \in \mathbb{R}_+^n : |y-x| < t\} \quad ,\psi_t \otimes f(y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T^s\psi_t(y)f(s)s_n^{2v}\,ds$$

و $|\boldsymbol{E}|_{\boldsymbol{v}} = \int_{\boldsymbol{E}} y_n^{2v}dy$ است. لازم به ذکر است که ایده‌ی تعریف عملگر $g_{B,\lambda}^*$ نظیر عملگر دیفرانسیل لاپلاس- بسل Δ_B، از مقاله‌ی [۳] است.

قرارداد: سراسر مقاله از نمادگذاری $A \lesssim_n B$ زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم نشان‌دهیم که ثابت مثبتی مانند C_n (وابسته به n) موجود است که $A \leq C_nB$.

۲. نتایج اصلی

۲-۱. بی‌کرانی عملگر $g_{B,\lambda}^*$

همانند حالت کلاسیک نشان می‌دهیم که عملگر $g_{B,\lambda}^*$، بر روی فضای $L_{p,v}(\mathbb{R}_+^n)$، برای هر $0 < \lambda < \frac{2}{p} + \frac{4v}{pn}$ بی‌کران است. برای نشان دادن این مطلب، ابتدا چند لم بیان می‌کنیم که در اثبات بی‌کرانی عملگر $g_{B,\lambda}^*$ استفاده خواهند شد.

لم ۱. فرض کنید ψ یک تابع G -لیتلوود-پالی باشد. در این‌صورت داریم

$$|T^y\psi_t(s)| \le \frac{t^{\beta}}{(t+|s-y|)^{n+2v+\beta}},$$

که در آن $\psi_t(x) = t^{-(n+2v)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$..

اثبات.

$$|T^y\psi_t(x)| = c_v\int_0^{\pi}\psi_t\left(x_1-y_1,\dots,x_{n-1}-y_{n-1},\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n cos\phi}\right)sin^{2v-1}\phi d\phi$$

$$= c_v\int_0^{\pi}t^{-n-2v}\psi\left(\frac{x_1-y_1}{t},\dots,\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t},\frac{\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n cos\phi}}{t}\right)sin^{2v-1}\phi d\phi$$

$$= t^{-n-2v}c_v\int_0^{\pi}\psi\left(\frac{x_1-y_1}{t},\dots,\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t},\frac{\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n cos\phi}}{t}\right)sin^{2v-1}\phi d\phi$$

$$= t^{-n-2v}c_v\int_0^{\pi}\psi\left(\frac{x'-y'}{t},\frac{\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n cos\phi}}{t}\right)sin^{2v-1}\phi d\phi$$

$$= \left|t^{-n-2v}T^{\frac{y}{t}}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\right|.$$

از طرفی داریم:

$$\left|T^{\frac{y}{t}}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\right| = \left|c_v\int_0^{\pi}\psi\left(\frac{x_1}{t}-\frac{y_1}{t},\frac{x_2}{t}-\frac{y_2}{t},\dots,\frac{x_{n-1}}{t}-\frac{y_{n-1}}{t},\sqrt{\left(\frac{x_n}{t}\right)^2+\left(\frac{y_n}{t}\right)^2-2\left(\frac{x_n}{t}\right)\left(\frac{y_n}{t}\right)cos\phi}\right)sin^{2v-1}\phi d\phi\right.$$

$$\le c_v\int_0^{\pi}\psi\left(\frac{x_1-y_1}{t},\frac{x_2-y_2}{t},\dots,\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t},\sqrt{\left(\frac{x_n}{t}\right)^2+\left(\frac{y_n}{t}\right)^2-2\left(\frac{x_n}{t}\right)\left(\frac{y_n}{t}\right)cos\phi}\right)sin^{2v-1}\phi d\phi$$

$$\le c_v\int_0^{\pi}\frac{Csin^{2v-1}\phi d\phi}{\left(1+\left(\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)^2+\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right)^2+\dots+\left(\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t}\right)^2+\left(\frac{x_n}{t}\right)^2+\left(\frac{y_n}{t}\right)^2-2\left(\frac{x_n}{t}\right)\left(\frac{y_n}{t}\right)cos\phi\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n+2v+\beta}}$$

$$\le c_v\int_0^{\pi}\frac{Csin^{2v-1}\phi d\phi}{\left(1+\left(\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)^2+\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right)^2+\dots+\left(\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t}\right)^2+\left(\frac{x_n}{t}\right)^2+\left(\frac{y_n}{t}\right)^2-2\left(\frac{x_n}{t}\right)\left(\frac{y_n}{t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n+2v+\beta}}$$

$$= \frac{C}{\left(1+\left(\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)^2+\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t}\right)^2+\left(\frac{x_n}{t}\right)^2+\left(\frac{y_n}{t}\right)^2-2\left(\frac{x_n}{t}\right)\left(\frac{y_n}{t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n+2v+\beta}}$$

$$= \frac{C}{\left(1+\left(\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)^2+\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}-y_{n-1}}{t}\right)^2+\left(\frac{x_n-y_n}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n+2v+\beta}}$$

$$= \frac{C}{\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{n+2v+\beta}}$$

$$= \frac{C}{\left(\frac{t+|x-y|}{t}\right)^{n+2v+\beta}}$$

$$= \frac{Ct^{n+2v+\beta}}{(t+|x-y|)^{n+2v+\beta}}.$$

از این‌جا خواهیم داشت

$$|T^y\psi_t(x)| = \left|t^{-n-2v}T^{\frac{y}{t}}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\right| \leq \frac{Ct^{\beta}}{(t+|x-y|)^{n+2v+\beta}}.$$

اینک به اثبات بی‌کرانی عملگر $g^*_{B,\lambda}$ از فضای $L_{p,v}(\mathbb{R}^n_+)$ به فضای $L_{p,v}(\mathbb{R}^n_+)$ می‌پردازیم.

قضیه ۳. فرض کنید $0<\lambda<\frac{2}{p}+\frac{4v}{pn}$ باشد، آن‌گاه $g^*_{B,\lambda}$ از $L_{p,v}(\mathbb{R}^n_+)$ به $L_{p,v}(\mathbb{R}^n_+)$ بی‌کران است.

اثبات. فرض کنید $x_0\neq 0$ دلخواه و $\Omega_0=\left(\frac{|x_0|}{4},\frac{|x_0|}{2}\right)\times\left[B_+\left(0,\frac{|x_0|}{2}\right)\setminus B_+\left(0,\frac{|x_0|}{4}\right)\right]$ باشد. برای هر $|x|>2|x_0|$ داریم

$$g^*_{B,\lambda}f(x)^2 = \frac{1}{c_{n,v}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t\otimes f(y)|^2\frac{y_n^{2v}dydt}{t^{2v+n+1}}$$

$$\geq \frac{1}{c_{n,v}}\int\int_{\Omega_0}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t\otimes f(y)|^2\frac{y_n^{2v}dydt}{t^{2v+n+1}}$$

$$\gtrsim \frac{1}{|x|^{\lambda n}}\int\int_{\Omega_0}|\psi_t\otimes f(y)|^2\frac{y_n^{2v}dydt}{t^{2v+n-\lambda n+1}}$$

نامساوی آخر برقرار است بنابه این‌که برای $|x|> 2|x_0|$ ، $t \in \left(\frac{|x_0|}{4}, \frac{|x_0|}{2}\right)$ و $y \in B_+\left(0,\frac{|x_0|}{2}\right) \setminus B_+\left(0,\frac{|x_0|}{4}\right)$ خواهیم داشت $|x| \simeq |x-y| + t$. زیرا

$$\frac{|x|}{2} = |x| - \frac{|x|}{2} < |x| - |x_0| < |x| - \frac{|x_0|}{4} = |x| + \frac{|x_0|}{4} - \frac{|x_0|}{2} < t + |x| - |y| < |x-y| + t$$

و نیز

$$|x-y| + t < t + |x| + |y| \le \frac{|x_0|}{2} + |x| + \frac{|x_0|}{2} = |x_0| + |x| < 2|x_0| + |x| < 2|x|.$$

بنابراین

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(g_{B,\lambda}^{*} f(x)^2\right)^{\frac{p}{2}} x_n^{2v} dx \ge \left(\int\int_{\Omega_0} |\psi_t \otimes f(y)|^2 y_n^{2v} dy \frac{dt}{t^{n+2v-\lambda n+1}}\right)^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x_n^{2v} dx}{|x|^{\frac{\lambda np}{2}}},$$

در نتیجه داریم

$$\left\|g_{B,\lambda}^{*} f\right\|_{p,v}^{p} \gtrsim \left(\int\int_{\Omega_0} |\psi_t \otimes f(y)|^2 \frac{y_n^{2v} dy dt}{t^{n+2v-\lambda n+1}}\right)^{\frac{p}{2}} \underbrace{\int_{|x|>2|x_0|} \frac{x_n^{2v} dx}{|x|^{\frac{\lambda np}{2}}}}_{=:I}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که اولین انتگرال کراندار است. در حقیقت برای هر $(y,t) \in \Omega_0$، بنا به لم ۱ داریم

$$|\psi_t \otimes f(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}_+^n} T^y\big(\psi_t(s)\big) f(s) s_n^{2v} ds\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}_+^n} \left|T^y\big(\psi_t(s)\big)\right| |f(s)| s_n^{2v} ds$$

$$\le \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{t^{\beta}}{(t+|s-y|)^{n+2v+\beta}} |f(s)| s_n^{2v} ds$$

$$\leq t^{\beta} \sup_{s\in\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{(t+|s-y|)^{n+2v+\beta}} \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(s)|\, s_n^{2v} ds$$

$$= t^{\beta} \sup_{s\in\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{(t+|s-y|)^{n+2v+\beta}} \|f\|_{1,\nu}$$

$$\lesssim t^{\beta}\|f\|_{1,\nu}$$

لازم به ذکر است که برای $(y,t)\in\Omega_0$ عبارت $\sup_{s\in\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{(t+|s-y|)^{n+2v+\beta}}$ متناهی است. در نتیجه داریم

$$|f\otimes\psi_t(y)| \lesssim t^{\beta}\|f\|_{1,\nu} \Rightarrow |f\otimes\psi_t(y)|^2 \lesssim t^{2\beta}\|f\|_{1,\nu}^2$$

$$\Rightarrow |f\otimes\psi_t(y)|^2 \frac{1}{t^{2v+n-\lambda n+1}} \lesssim \frac{t^{2\beta}\|f\|_{1,V}^2}{t^{2v+n-\lambda n+1}}$$

در نهایت داریم

$$\int\int_{\Omega_0} |f\otimes\psi_t(y)|^2 \frac{1}{t^{2v+n-\lambda n+1}} y_n^{2v} dydt \lesssim \int\int_{\Omega_0} t^{2\beta-2v-n+\lambda n-1}\, y_n^{2v} dydt$$

$$\leq \int_{\left(\frac{|x_0|}{4},\ \frac{|x_0|}{2}\right)} t^{2\beta-2v-n+\lambda n-1}\left(\int_{|y|<\frac{|x_0|}{2}} y_n^{2v} dy\right)dt$$

$$\lesssim \int_{\left(\frac{|x_0|}{4},\ \frac{|x_0|}{2}\right)} t^{2\beta-2v-n+\lambda n-1}\, dt < \infty.$$

از طرف دیگر انتگرال آخری برای $0<\lambda<\frac{2}{p}+\frac{4v}{pn}$ واگراست زیرا

$$\int_{|x|>2|x_0|} \frac{x_n^{2v}dx}{|x|^{\frac{\lambda np}{2}}} = \int_{S_+^{n-1}}\int_{2|x_0|}^{\infty} \frac{r^{2v}\,(x'_n)^{2v}\, r^{n-1} dr d\sigma_{2v}}{r^{\frac{\lambda np}{2}}}$$

$$\lesssim \left(\int_{2|x_0|}^{\infty} r^{2v+n-1-\frac{\lambda np}{2}}\right) < \infty,$$

و حکم مطلوب به‌دست می‌آید.

۲. کرانداری عملگر $g_{B,\lambda}^*$

حال نشان می‌دهیم برای $\lambda > \frac{2}{p} + \frac{4v}{pn}$، عملگر $g_{B,\lambda}^*$ کراندار است.

به منظور اثبات کرانداری از نوع قوی (p,p) عملگر $g_{B,\lambda}^*$، به چندین گزاره‌ی زیر نیاز داریم که در مراجع مربوطه اثبات شده‌اند.

گزاره ۱ [گزاره ۲،۷، ۵]. فرض کنیم ψ یک تابع مثبت، غیرصعودی در $L_{1,v}(\mathbb{R}_+^n)$ و به‌طور موضعی انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}_+^n$ است. آن‌گاه

$$sup_{t>0}|\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_{1,v} Mf(x),$$

که ϕ_t به‌صورت $\phi_t(x) = t^{-(n+2v)}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$، تعریف می‌شود.

گزاره ۲ [۵]. تابع ماکسیمال هاردی-لیتلوود برای هر $p > 1$، از نوع قوی (p,p) است.

گزاره ۳[۲]. فرض کنید g تابع لیتلوود-پالی باشد. در این‌صورت برای هر $v > 0$، $1 < p < \infty$ داریم

$$\left\|g_{B,\lambda}^*(f)\right\|_{p,v} \leq B_{p,v}\|f\|_{p,v}.$$

قضیه ۴. فرض کنید $\lambda > 1 + \frac{2v}{n}$ و $f \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$. در این‌صورت برای $p \geq 2$ و $p > \frac{2}{\lambda} + \frac{4v}{n\lambda}$ داریم

$$\left\|g_{B,\lambda}^*(f)\right\|_{p,v} \leq A_{p,\lambda,n}\|f\|_{p,v}. \tag{۳}$$

اثبات. فرض $\lambda > 1 + \frac{2v}{n}$ ایجاب می‌کند که $\frac{2}{\lambda}\left(1 + \frac{2v}{n}\right) < 2$. بنابراین شرط $p \geq 2 > \frac{2}{\lambda}\left(1 + \frac{2v}{n}\right)$ خودبخود برآورد می‌شود. حال ادعا می‌کنیم که برای هر تابع مثبت η روی $\mathbb{R}_+^n$ داریم

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\left(g_{B,\lambda}^*(f)(x)\right)^2 \eta(x)x_n^{2v}\,dx \leq A_{n,v,\lambda}\int_{\mathbb{R}_+^n}\left(g_B(f)(x)\right)^2 (M\eta)(x)x_n^{2v}dx. \tag{۴}$$

برای نشان دادن درستی رابطه (۴)، بنابه تعریف $g_{B,\lambda}^*$ و قضیه‌ی تونلی داریم

$$\frac{1}{c_{n,v}}\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}_+^n}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t \otimes f(y)|^2\frac{y_n^{2v}dydt}{t^{2v+n+1}}\eta(x)x_n^{2v}dx$$

$$= \frac{1}{c_{n,v}}\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_0^\infty|\psi_t \otimes f(y)|^2\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{t^{\lambda n}t^{-2v-n}}{(t+|x-y|)^{\lambda n}}\eta(x)x_n^{2v}dx\frac{y_n^{2v}dydt}{t},$$

با درنظر گرفتن $\phi(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{\lambda n}}$ و $\phi_t(x) = t^{-n-2v}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$، به‌دست می‌آوریم

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\left(g_{B,\lambda}^*(f)(x)\right)^2\eta(x)x_n^{2v}dx$$
$$=\frac{1}{c_{n,v}}\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_0^\infty|\psi_t\otimes f(y)|^2\underbrace{\int_{R_+^n}\underbrace{\frac{t^{\lambda n}t^{-2v-n}}{(t+|x-y|)^{\lambda n}}}_{\phi_t(x-y)}\eta(x)x_n^{2v}dx}_{=\phi_t*\eta(y)}\frac{y_n^{2v}dydt}{\mathrm{t}}.$$

با به کارگیری رابطه‌ی (۲) در $\phi_t*\eta(y)$ خواهیم داشت

$$sup_{t>0}|\phi_t*\eta(y)|\le\|\phi_t\|_{1,v}M\eta(y)\le A_{n,v,\lambda}M\eta(y). \qquad (۵)$$

لازم به ذکر است که در رابطه‌ی بالا $\|\phi_t\|_{1,v}$ به چشم می‌خورد که براساس محاسبات زیر متناهی بودن آن‌را داریم

$$\|\phi_t\|_{1,v}=\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{t^{\lambda n}t^{-2v-n}y_n^{2v}}{(t+|y|)^{\lambda n}}dy=\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{t^{\lambda n}t^{-2v-n}(tu_n)^{2v}}{(t+|tu|)^{\lambda n}}t^n\,du,$$
$$=\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{u_n^{2v}du}{(1+|u|)^{\lambda n}}=\int_{s_+^{n-1}}\int_0^\infty\frac{(\acute{u}_nr)^{2v}r^{n-1}}{(1+r)^{\lambda n}}drd\sigma(s_+^{n-1})$$
$$\lesssim_{n,v}\underbrace{\int_0^\infty\frac{r^{2v+n-1}}{(1+r)^{\lambda n}}dr}_{=:\mathrm{II}}.$$

از طرف دیگر داریم

$$\int_0^\infty\frac{r^{2v+n-1}}{(1+r)^{\lambda n}}dr=\int_0^\infty\frac{\left(tan^2(t)\right)^{2v+n-1}}{\left(1+tan^2(t)\right)^{\lambda n}}2\left(1+tan^2(t)\right)\left(tan(t)\right)dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tan(t)^{4v+2n-1}(t)}{\left(1+tan^2(t)\right)^{\lambda n-1}}dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{sin^{4v+2n-1}(t)}{cos^{4v+2n-1}(t)}}{\frac{1}{\left(cos^2(t)\right)^{\lambda n-1}}}dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^{4v+2n-1}(t)\left(cos^2(t)\right)^{\lambda n-1}}{cos^{4v+2n-1}(t)}dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^{4v+2n-1}(t)\right)\left(cos(t)\right)^{2(\lambda n-1)}cos^{-(4v+2n-1)}(t)dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sin^{4v+2n-1}(t)\right)\left(cos(t)\right)^{2(\lambda n)-2-4v-2n+1}(t)dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sin^{4v+2n-1}(t)\right)\left(cos(t)\right)^{2(\lambda n)-4v-2n-1}(t)dt$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda n - 2v - n)\Gamma(2v+n)}{\Gamma(\lambda n)},$$

$$=: A_{n,\lambda,v}.$$

که رابطه‌ی بالا تنها زمانی متناهی است که $\lambda n - 2v - n > 0$. با توجه به محاسبات بالا، رابطه‌ی (۵) و قضیه‌ی تونلی، داریم

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(g_{B,\lambda}^{*}(f)(x)\right)^2 \eta(x) x_n^{2v} dx \lesssim_{n,v,\lambda} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} |\psi_t \otimes f(y)|^2 M\eta(y) \frac{y_n^{2v} dy dt}{\mathrm{t}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n} M\eta(y) \left(\int_0^\infty |\psi_t \otimes f(y)|^2 \frac{dt}{t}\right) y_n^{2v} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n} M\eta(y) \left(g_B(f)(y)\right)^2 y_n^{2v} dy.$$

بدین تربتیب درستی رابطه‌ی (۴)، نشان داده شد. به‌منظور اثبات درستی قضیه ۴، در ابتدا در رابطه‌ی (۴)، $p = 2$ و نیز $\eta(y) = 1$ را انتخاب می‌کنیم که با کمک کرانداری از نوع قوی (۲و۲) عملگر $g_B(f)$ داریم

$$\left\| g_{B,\lambda}^{*}(f) \right\|_{2,v} \le A_{n,\lambda,v} \left\| g_B(f) \right\|_{2,v} \le A_{n,\lambda,v} C_p \|f\|_{2,v}.$$

و بدین صورت حکم برای حالت $p = 2$ و $\eta(y) = 1$ نتیجه می‌شود.

حال برای $p > 2$، بنابه نامساوی هولدر در سمت راست رابطه‌ی (۴) برای $\frac{p}{2}$ و q که در آن q مزدوج نمایی است یعنی $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$، گزاره‌ی ۲ و گزاره‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(g_\lambda^{*}(f)(x)\right)^2 \eta(x) x_n^{2v} dx \lesssim_{n,v,\lambda} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(g_B(f)(x)\right)^2 (M\eta)(x) x_n^{2v} dx$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\left(g_B(f)(x)\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} x_n^{2v} dx\right)^{\frac{2}{\mathrm{p}}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(M\eta(x)\right)^q x_n^{2v} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim c_q \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(g_B(f)(x) \right)^{\mathrm{p}} x_n^{2v} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\eta(x)|^q \, x_n^{2v} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim_{q,n,v,\lambda} \left\| g_B(f) \right\|_{p,v}^2 \|\eta\|_{q,v}$$

$$\lesssim_{q,n,v,\lambda,P} \|f\|_{p,v}^2 \|\eta\|_{q,v}. \qquad (۶)$$

حال اگر از طرفین رابطه‌ی (۶) بر روی $\|\eta\|_{q,v} = 1$ سوپریمم بگیریم،

$$\left\|g_{B,\lambda}^*(f)^2\right\|_{\frac{p}{2},v} = \left\|g_{B,\lambda}^*(f)\right\|_{p,v}^2 = sup\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^n} g_{B,\lambda}^*(x)^2 \, \eta(x) x_n^{2v} \mathrm{dx} \colon \|\eta\|_{q,v} = 1 \right\}$$

خواهیم داشت

$$\left\|g_{B,\lambda}^*(f)\right\|_{p,v}^2 \lesssim_{q,n,v,\lambda,P} \|f\|_{p,v}^2 \, .$$

بدین ترتیب اثبات قضیه تمام است. □

لازم به‌ذکر است که قضیه‌ی قبل در حالت $1 < \mathrm{p} < 2$، حل نشده است و به‌صورت مسئله باز است.

References

1. I.A. Aliev, A. D. Gadzhiev, Weighted Estimates for Singular Integrals Generated by the Generalized Shift Operator. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **316** (1991), no. 4, 785-788; translation in Soviet Math. Dokl. **43** (1991), no. 1, 159-161.
2. S. Bayrakci, S. Keles, F. A. Isayev, $L_{p,v}$ – Boundedness of the Vector-valued B-Square Functions, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, **37**(2017), no. 4, 12-23.
3. T. A. Bui, X. Th. Duong, Sharp Weighted estimates for Square Functions Associate to Operators on Spaces of Homogeneous Type, The Journal of Geometric Analysis, **27** (2020), 874-900.
4. Y. Ding, Q. Xue and K. Yabuta, Weighted estimate for a class of Littlewood-Paley operators, Taiwanese J. Math. **11** (2007), no. 2, 339-365.
5. J. Duoandikoetxea, Fourier analysis. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
6. C. Fefferman, Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators, Acta Mathematica, **124** (1970), 9 – 36.
7. V. S. Guliyev, On Maximal Function and Fractional Integral, associated with the Bessel differential operator, Mathematical Inequalities and Applications **2**(2003), no. 2, 317-330.
8. C. Hao, Lectures on Introduction to Harmonic Analysis, AMSS, Chinese Academy of

Sciences, 2016.
9. J.E. Littlewood, R.E. Paley, Theorems on Fourier series and power series (I), J. London Math. Soc., **6** (1931), 230-233.
10. J.E. Littlewood and R. Paley, Theorems on Fourier series and power series, II, Proceedings London Mathematical Society, vol. **42** (1936), 52-89.
11. E. M. Stein, On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz, Trans. Amer. Math. Soc., **88** (1958), 430-466.
12. E. M. Stein, On some functions of Littlewood-Paley and Zygmund, Bulletin of the American Mathematical Society, **67** (1961), 99-101.
13. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematical Series, No. 30 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.
14. Torchinsky, Real-variable methods in harmonic analysis. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.