Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Relationship between curvature and the price of depreciated good

A. Dabbaghian[1], **A. Behzadi**[2] ✉, **M. Rafie-Rad**[3]

1. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.
E-mail: amdb3929@yahoo.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran. ✉ E-mail: behzadi@umz.ac.ir
3. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.
E-mail: rafie-rad@umz.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
24 September 2021
Received in revised form:
5 January 2022
Accepted:
21 February 2022
Published online:
6 February 2024

Keywords:
Book value of good,
Depreciation,
General equilibrium theory,
Uniqueness of price,
Scalar curvature.

ABSTRACT

Introduction

In a vast sense, economy is a medium of products distribution and exchange of goods or services by different agents. Demand and supply issues for goods and services lead societies to plan market-based economics. The main goal of market-based economics is to balance demand and supply, known as the general equilibrium. Mathematical economy paves the way to verify the existence, uniqueness, and algorithms for computing the equilibria. Differential geometries prefer to visualize the shape of the equilibrium manifold, i.e., the set of pairs of prices and endowments such that the aggregate excess demand function is equal to zero. Balasko had shown if the equilibrium price is unique for every economy, the price is constant, and the curvature is zero. Moreover, Loi and Matta generalized it in the form that for two commodities and an arbitrary number of agents, if the curvature of $E(r)$, which is equilibrium manifold with fixed total resources r, is zero, there is the uniqueness of equilibrium for every economy.

The general equilibrium condition is also must be held in a flea market, in which all kinds of goods are in their depreciated form. By definition, depreciation is the decline in the value of an asset over time due to different factors such as usage, wear, and tear and obsolescence, which is a significant concept that must be considered when pricing an item for sale. One reason why depreciation must be considered is that, if it is not, businesses would have an unrealistic and distorted estimation of their assets. Consequently, their estimation of the depreciation period net profit in the book value (B.V) will be inaccurate. In turn, the amount of tax a company needs to pay may exceed the original amount as the losses are not considered accurately. Here, to calculate the incurred losses due to depreciation, we consider the current value of the original price paid for the item, considering the interest rate and different depreciation periods. This matter yields the current value of the item to be sold and, comparing it with the current value of its original price lets us understand whether selling the price is to the benefit of the seller or not.

Parametrization of depreciation and curvature

Imagine in the flea market there are $r$fixed total depreciated resources and m consumers, and according to equilibrium theory, the supply and demand in this market must be equal. So by assuming $l = m = 2$ we have,

$$B(r) = \{(s(t), w_1(t), w_2(t)) \mid f_1(s(t), w_1(t)) + f_2(s(t), w_2(t)) = r(t)\},$$

and the equilibrium manifold be formed as below

$$E(r) = \{(s(t), \omega_1^1, \omega_1^2) \mid f_1^1(s(t), s(t)\omega_1^1 + \omega_1^2) \\ = f_2^1(s(t), s(t)(r_1 - \omega_1^2) + r_2 - \omega_1^2) = r_1\}.$$

The monetary value of an asset decreases over time due to use, wear, and tear, or obsolescence and straight-line depreciation is formulated as follows,

$$D_J = \frac{J}{N}(p - s),$$

where $N$is the expected life of the equipment, $s$is the salvage value of the equipment at the end of each depreciation period, and $p$is the price of equipment at the early stage when it had been bought. The B.V of good is the difference between the initial cost and the depreciation cost at the end of depreciation periods which is formulated as follow,

$$(1).B.V_J = p - \tfrac{J}{N}(p - s)$$

The significant matter to focus on is that we must find the present value of the money that is paid for that equipment J periods of depreciation ago and compare it with a salvage value of the equipment at the moment t. To do that, we must make use of the compound amount formula,

$$w = p(1 + i)^J, \qquad (2)$$

which $i$is the interest rate. Now we rewrite Eq. (2) as,

$$w(t) = w(t - J)(1 + i)^J, \qquad (3)$$

and at the end, by having Eq. (3) as an assumption, we can reform Eq. (1) as follows,

$$B.V_J = w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t)).$$

Here we construct a parametrization by using time and depreciation periods,

$$\phi(t, J) = (s(t), J, w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t))).$$

We assume the salvage value of equipment at the end of depreciation periods must be vanished, $s(t)_{t=N} = 0$, and the depreciation periods which has passed must be less than total life of equipment, $J < N$, thus,

$$w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t)) = 0,$$
$$w(t) = \lambda s(t),$$

which$\lambda > 1$ and $\lambda = \frac{J}{N-J}$.

The goal of this paper is to realize whether selling a used item is to benefit. We need to compare the current value of the original price paid for the product, due to the interest rate, with its price in a flea market as a used item and also the uniqueness of the price of depreciated goods by using the zero curvature in a flea market in general equilibrium conditions. Here also, we have calculated Ricci and Gaussian curvature by using the relation between these curvatures in the second fundamental form that we have constructed. We collect the mathematical economy aspect of general equilibrium in its differential geometry and topological view. Moreover we have parametrized the depreciation due to general equilibrium condition assumptions.

In order to show the uniqueness of price of depreciated good $s(t)$, by using that if $l = 2$, a necessary and sufficient condition for q unique equilibrium price is that the curvature of $E(r)$ must be vanished.

Results and discussion

We consider the unit tangent sphere bundle of a Riemannian manifold (M, g) as a (2n+1) dimensional manifold, and then we equip that to the g-natural metric.

Considering the associated metric of this metric, we define an almost contact B-metric structure on the unit tangent sphere bundle, and by using the coefficients of the structural tensors and the relevant classification for such structures, we attempt to classify the unit tangent sphere bundle equipped to this structure, and we prove that the non-zero coefficients of structure tensor F belong to the class $F_1 \oplus F_4$.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

In this paper, using the initial definitions and assumptions of general equilibrium theory, and differential geometry, we have provided a new parametrization for depreciation, based on equilibrium condition and the book value formula. Therefore, in equilibrium condition, the curvature vanishes, and thus we obtain $w(t) = s(t) + c$. We know that $w(t)$is present value of the amount originally paid for the item and $s(t)$ is the current price of depreciated item in flea market. Comparing these two values, considering the equilibrium conditions, if $w(t) > s(t)$, c must be less than zero, which means we have lost money by selling this item. And if $w(t) < s(t)$, $c$must be greater than zero, which means we have profited.

How to cite: Dabbaghian, Amir Moez, Behzadi, Abolfazl, & Rafie-rad, Mehdi (2023). Relationship between curvature and the price of depreciated good. *Mathematical Researches*, 9 (3), 21-34.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ارتباط انحنا و قیمت کالای مستهلک

امیرمعز دباغیان[۱]، ابوالفضل بهزادی[۲] ✉، مهدی رفیعی راد[۳]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: amdb3929@yahoo.com
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: behzadi@umz.ac.ir
۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: rafie-rad@umz.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۲
تاریخ بازنگری:۱۴۰۰/۱۰/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۶

واژه‌های کلیدی:
ارزش دفتری کالا ،
استهلاک ،
نظریه تعادل عمومی ،
یکتایی قیمت ،
انحنای اسکالر.

چکیده

انگیزه اصلی نگارش این مقاله بررسی سود یا ضرر ناشی از فروش یک کالای مستهلک در بازار دسته دوم است. برای این امر به مقایسه ارزش فعلی مبلغ اصلی پرداخت شده برای کالا، با توجه به نرخ بهره و ارزش فعلی کالای مستهلک در بازار دسته دوم پرداختیم. همچنین منحصربه‌فردی قیمت کالای مستهلک را با استفاده از صفر بودن انحنا در بازار دسته دوم با توجه به شرایط تعادل عمومی عرضه و تقاضا بیان کردیم.

استناد: دباغیان، امیرمعز؛ بهزادی، ابوالفضل؛ و رفیعی راد، مهدی (۱۴۰۲). ارتباط انحنا و قیمت کالای مستهلک. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۲۱ - ۳۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در یک مفهوم کلی، اقتصاد دانشی برای بررسی نحوه ی توزیع محصولات و مبادله کالا یا خدمات توسط عوامل مختلف است. مسائل مربوط به عرضه و تقاضای کالا و خدمات، جوامع را به برنامه‌ریزی اقتصادی مبتنی بر بازار سوق می‌دهد. هدف اصلی اقتصاد مبتنی بر بازار، ایجاد و تعادل بین عرضه و تقاضا است، که به نظریه تعادل عمومی معروف است. اقتصاد ریاضی راه را برای تأیید وجود، منحصربه‌فرد بودن و الگوریتم‌های محاسبه این تعادل هموار می‌کند.

برخی نویسندگان ترجیح می‌دهند با استفاده از نظریه مورس۱، به حداقل رساندن مخارج و به حداکثر رساندن رضایت را بررسی کنند [۱]. توپولوژی دیفرانسیل نیز ابزاری مفید برای نیل به این هدف و همچنین کاربرد فراوانی در نظریه تعادل عمومی ۲ است. از طرف دیگر هندسه دانان برای ملموس و قابل رویت کردن منیفلدهای تعادلی۳، که مجموعه‌ای از دوتای های قیمت و دارایی اندکه در شرط تقاضای جمعی صدق می‌کنند و با فضاهای اقلیدسی یکریختند، تلاش کرده‌اند. بالاسکو۴ [۲] نشان داده بود که برای هر فضای اقتصادی، قیمت تعادلی منحصربه‌فرد است اگر و تنها اگر قیمت ثابت و انحنا صفر باشد. علاوه بر آن، لویی۵ و ماتا۶ [۳] این موضوع را برای دو کالا و تعداد دلخواه عامل یا خریدار توسعه دادند که اگر $E(r)$ منیفلد تعادلی با r منبع ثابت، دارای انحنای صفر باشد، آن‌گاه برای آن فضای اقتصادی شرایط تعادلی منحصربه‌فرد است. در بازار دسته دوم که تمامی وسایل در حالت مستهلک خود قرار دارند نیز شرایط تعادلی حاکم است. طبق تعریف، استهلاک۷ عبارت است از کاهش ارزش دارایی یا کالا در طول زمان به دلیل عوامل مختلی همچون استفاده و فرسودگی که در زمان قیمت گذاری آن کالا در هنگام فروش باید مورد توجه قرار گیرد. یکی از دلایلی که باید استهلاک را مدنظر قرار داد این است که مشاغل، برآورد غیرواقعی و تحریف‌شده‌ای از دارایی‌های خود بدون در نظرگرفتن آن دارند. یعنی برآورد نادرستی نسبت به سود خود در محاسبات ارزش دفتری۸ دارایی‌های در دوره‌های استهلاکی مختلف خواهند داشت. همچنین این امر در محاسبه ی مالیات‌ها باید مورد توجه قرار گیرد تا مقدار مالیات شرکت از مبلغ اصلی که براساس در نظر گرفتن استهلاک منابع و درآمد شرکت‌ها است تجاوز نکند. در این‌پژوهش، برای محاسبه‌ی ضرر ناشی از استهلاک، ارزش فعلی مقدار پولی که برای خرید کالایی که در چند دوره‌ی استهلاکی قبل خریداری شده را با توجه به نرخ بهره در نظر می‌گیریم. این موضوع ما را به این امر سوق می‌دهد که با مقایسه‌ی ارزش فعلی پول پرداخت شده برای یک کالا و ارزش (قیمت) فعلی آن کالا در بازار، بررسی کنیم که آیا خرید و یا فروش آن کالا در بازار دسته دوم به نفع خریدار و یا فروشنده است یا خیر.

در این مقاله، ابتدا با استفاده از ارزش دفتری، یک پارامتری‌سازی جدید ارایه دادیم و پس از آن با ساختن متر به محاسبه‌ی انحناهای ریچی و گاوسی پرداختیم. در بخش ۲، ما از جنبه‌ی توپولوژی و هندسه دیفرانسیل به بررسی دیدگاه اقتصاد ریاضی

---

* نویسنده مسئول

1 Morse theory
2 General Equilibrium Theory
3 Equilibrium manifold
4 Balasko
5 Loi
6 Matta
7 Depreciation
8 Book value

تعادل عمومی پرداختیم. در بخش ۳، استهلاک را با توجه به شرایط تعادل عمومی پارامتری سازی کردیم و مقاله را در بخش ۴ با نتیجه‌گیری خاتمه دادیم.

۱. دیدگاه هندسه دیفرانسیلی نظریه تعادل عمومی

فرض کنیم تعداد متناهی از کالاها که با l نمایش داده می‌شود داشته باشیم و $\omega_i = (\omega^1, \dots, \omega^l)$ یک سبد کالا باشد و نیز فرض کنیم $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{l-1} \times \{1\}$ و بردار قیمت $p = (p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{S}$ موجود باشد که نسبت به مولفه کالای l-ام نرمال شده باشد که با $p = (\bar{p}, 1)$ نمایش داده می‌شود. به بیان دیگر $\bar{p} = (p_1, \dots, p_{l-1}) \in \mathbb{R}_{++}^{l-1}$ و $p_l = 1$. همچنین فرض کنیم هر خریدار یا فروشنده i-ام دارایی اولیه‌ای ω^iداشته باشد که بردار p بردار قیمت این سبد دارایی است، $w_i \in \mathbb{R}^l$ مقدار خالص دارایی[1] (پول) این فرد است که برابر با خالص درآمد وی، ناشی از فروش تمام کالاهای سبد خودش است، که از ضرب داخلی به صورت $w_i = p.\omega_i$ بدست می‌آید. فرض کنیم $\Omega = X^m$ و $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Omega$ بیانگر مجموع دارایی‌های تمام افراد خریدار یا فروشنده در فضای اقتصادی است که. $\omega \in \mathbb{R}_{+}^{IL}$ مجموعه‌ی بردارهای قیمت-دارایی (پولی) با $B = \mathbb{S} \times \mathbb{R}_{++}^m$ نمایش داده می‌شود که با $\mathbb{R}^{l+m-1}$ وابریخت است و $b = (p, w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}_{++}^m$. با حذف آخرین مولفه‌ی از بردار ωداریم؛ $\bar{\omega} = (\omega^1, \dots, \omega^{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$ و با حذف i-امین مولفه داریم:$\bar{\omega}_{-i} = (\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{l-1})$. [۴].

تابع مطلوبیت[2] $u_i: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ دارای ویژگی‌های زیر است [۵].

۱- مشتق‌های مرتبه اول اکیداً مثبت هستند.

۲- فرم چهارتایی $\omega^t D^2 u_i(\omega)\omega$، $\omega \in \mathbb{R}^l$، به وسیله‌ی فضای مماس رویه منحنی بی‌تفاوتی محدود می‌شود که $D^2 u_i(\omega)\omega$ ماتریس هسین می‌باشد.

۳- مجموعه‌ی سبد محصولات برای هر $\omega_i \in \mathbb{R}^l$ از پایین کراندار است.

تابع تقاضای[3] $f_i: \mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱- f_i هموار است.

۲- $f_i(cp, cw) = f_i(p, w)$، برای هر $c \in \mathbb{R}_{++},\ p \in \mathbb{R}_{++}^L,\ w \in \mathbb{R}_{++}$.

۳- $f_i(p, w).p = w$.

برای هر فضای اقتصادی، تعادل عمومی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{I} f_i\,(p, p.\omega^i) = \sum \omega^i.$$

---

[1] Net worth
[2] Utility function
[3] Demand function

اکنون معادله‌ی تقاضای جمعی[1] $Z: \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^{IL} \to \mathbb{R}^L$ به صورت زیر است:

$$Z(p,\omega) = \sum_{i=1}^{I} (f_i(p, p.\omega^i) - \omega^i),$$

که یک فضای اقتصادی هنگامی در حالت تعادلی است که $Z(p,\omega) = 0$.

منیفلد تعادلی E زیرمنیفلدی-lmبعدی از $\mathbb{S} \times \Omega$ است که با فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{lm}$ وابرریخت است و داریم:

$$\mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{(l-1)(m-1)} \cong \mathbb{R}^{lm}, \quad \bar{Z}^{-1}(0) = E, \quad \bar{Z}: \mathbb{S} \times \Omega \to \mathbb{R}^{l-1}$$

اگر کل منابع ثابت باشد، تعادل به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$E(r) = \{(p,\omega) \in \mathbb{S} \times \Omega(r) \mid \sum_{i=1}^{m} f_i\,(p, p.\omega_i) = r\},$$

که $r \in \mathbb{R}^l$ بردار منابع ثابت در فضای اقتصادی است و داریم

$$\Omega(r) = \{\omega \in \mathbb{R}^{lm} \mid \sum_{i=1}^{m} \omega_i = r\}$$

فرض کنیم

$$B(r) = \{(p, w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} f_i\,(p, w_i) = r\}.$$

نگاشت B $\varphi: E \to$ یک نگاشت پوشای سابمرشن است و نگاشت تصویر طبیعی $\pi: E \to \Omega$نگاشتی هموار سره می‌باشد. می‌دانیم که E زیرمنیفلدهموار $\mathbb{S} \times \Omega$ است و جادهنده‌ی متعارفی Eدر $\mathbb{S} \times \Omega$ هموار است، سپس $\pi: E \to \Omega$ که ترکیب نگاشت‌های جادهنده‌ی متعارفی و تصویر طبیعی، از $\mathbb{S} \times \Omega$ به Ω است [۶].

فرض کنیم $b = (p, w_1, \ldots, w_m) \in B$ و$f(b) = (p, f_1(p, w_1), \ldots, f_m(p, w_m))$ آن‌گاه نگاشت

$$\phi_{Fiber}: E \to \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m$$
$$\phi_{Fiber}(p, \omega_1, \ldots, \omega_m) = (p, p.\omega_1, \ldots, p.\omega_m)$$

درنظر می‌گیریم و ازآنجایی‌که $f(\mathbb{S} \times \mathbb{R}^m) = T \subset E$ پس $\phi_{Fiber} \circ f = 1$، کهT مجموعه‌ی تعادل‌های غیرتبادلی است که باB وابرریخت است. بالاسکو ثابت کرد کهT زیرمنیفلدهموارE و با $\mathbb{S} \times \Omega$ وابرریخت است. تصویر وارون $(p, w_1, \ldots, w_m)$با استفاده از نگاشت ϕ_{Fiber}، فیبرهایی تولید می‌کند که هر فیبر زیرمنیفلدخطی $(l-1)(m-1)$-بعدی ازEاست [۲، ۷، ۸].

اکنون با استفاده از دارایی، که به صورت کالا است، و ثروت مالی هر فرد و جامعه توابع کاربردی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\theta: \mathbb{S} \times (\mathbb{R}^l)^m \to B \times (\mathbb{R}^{l-1})^{m-1}$$
$$\theta(p,\omega) = (\varphi(p,\omega), \overline{\omega}_{-m})$$
$$\delta: B \times (\mathbb{R}^{l-1})^{m-1} \to \mathbb{S} \times (\mathbb{R}^l)^m$$
$$\delta((p, \omega_1, \ldots, \omega_m), \overline{\omega}_{-m}) = (p, \omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m)$$

[1] Aggregate excess demand function

$$\theta^\circ\delta = id_{B\times(\mathbb{R}^{l-1})^{m-1}}$$

به بیان دیگر

$$\varphi: \mathbb{S}\times\Omega \to \mathbb{S}\times\mathbb{R}^m$$
$$(p,\omega_1,\dots,\omega_m) \mapsto (p,p.\omega_1,\dots,p.\omega_m)$$
$$B = \mathbb{S}\times(]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\times\dots\times]a_m,b_m[)$$

نگاشت $f_i: \mathbb{S}\times]a_i,b_i[\to \mathbb{R}^l$، نگاشت تقاضای هر فرد i-ام می‌باشد که در شرط والراس صدق می‌کند

$$p.f_i(p,w_i) = w_i$$

بالاسکو ثابت کرد که برای هر اقتصاد اگر قیمت تعادلی منحصربه‌فرد باشد، آن‌گاه قیمت ثابت و انحنا صفر خواهد بود. لوی و ماتا نشان دادند که برای دو کالا و تعداد دلخواه از بنگاه‌ها یا خریداران یا فروشندگان اگر انحنای $E(r)$ صفر باشد، برای هر اقتصاد تعادل منحصربه‌فرد است. در نتیجه، شرط لازم برای منحصربه فرد بودن قیمت تعادلی، صفر بودن انحناست و اگر در اقتصادی قیمت منحصربه‌فردی باشد آن‌گاه قیمت تعادلی ثابت است.

قضیه۱،۱ اگر برای هر اقتصاد $\omega\in\Omega(r)$تعادل منحصربه‌فرد باشد، تعادل متناظر ثابت است: بردار قیمت تعادلی p به ω بستگی ندارد [۹].

با توجه به ویژگی بهینه سازی پارتو نقطه تعادلی اقتصاد منحصر به فرد است و این موضوع سبب منحصر به فردی بردار قیمت تعادلی برای اقتصاد نیز خواهد شد، در نتیجه بردار قیمت تعادلی روی تمام$\Omega(r)$ ثابت می شود. اگر به خلف دو بردار قیمت تعادلی متمایز (به دلیل منحصربه‌فرد بودن) برای هر اقتصاد موجود باشد و همچنین فرض کنیم $\Omega(r)$ و تعادل های وابسته به آن‌ها در دو مجموعه متمایز باشند، آن‌گاه دارای بردارهای قیمت متمایز نیز خواهند بود. ازآنجایی‌که بردار قیمت بر فضای اقتصادی عمود است پس این دو مجموعه نیز نمی‌توانند موازی باشند و باید در یک صفحه $\Omega(r)$ قرار گیرند و یکدیگر را قطع کنند، که با فرض یکتایی بردار قیمت در تناقض است. پس بردار قیمت یکتا و ثابت است و به اقتصادهای موجود در $\Omega(r)$ وابسته نیست.

قضیه ۱،۲ فرض کنیم $l=2$. شرط لازم و کافی برای منحصربه‌فرد بودن قیمت تعادلی p، صفر بودن انحنای $E(r)$ است [۵].

بالاسکو ثابت کرده بود منحصر به فردی تعادل عرضه و تقاضا، صفر شدن انحنای$E(r)$ را نتیجه می‌دهد و لویی و ماتا با فرض اینکه$E(r)$ یک ابررویه است ارتباط انحنای$E(r)$ و یکتایی تعادل را بسط دادند و دریافتند برای فضای شامل دو کالا و تعداد دلخواه از خریداران، انحنای برشی صفر خواهد داشت اگر و فقط اگر یک قیمت تعادلی یکتا وجود داشته باشد. آن‌ها در روند اثبات خود از پارامتری سازی$E(r)$ و ساخت فضای مماس وابسته به رویه و انتخاب بردارهای پایه و نرمال متناسب بهره بردند.

منیفلد$E(r)$ دارای ویژگی‌های توپولوژیکی همچون همبند راهی، همبند ساده و انقباض‌پذیری است، که مسیر را برای وصل کردن دو نقطه‌ی دلخواه با استفاده از یک راه برای ما هموار می‌کند. فرض کنیم وابرریختی $\phi: E(r)\to\mathbb{R}^{l(m-1)}$ و نگاشت خطی $d\phi_p: T_pE(r)\to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^{l(m-1)}$ که دیفرانسیل ϕ است، موجود باشد. اکنون می‌خواهیم متر ریمانی را روی منیفلدتعادلی تعریف کنیم. یک متر ریمانیgروی یک منیفلدهموار $X\in\mathbb{R}^n$، خانواده‌ای از ضرب‌های

داخلی g_x روی T_xX است که به صورت هموار روی X نسبت به x حرکت می‌کند. برای هر پارامتری موضعی $\psi: U \subset \mathbb{R}^k \to X$، بردارهای $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^k$ وجود دارند به طوری که $\psi(u) = x$ و نگاشت $u \mapsto g_x(d\psi_u(\nu_1), d\psi_u(\nu_2))$, روی U هموار است. یک منیفلدهموار همراه با یک متر ریمانی، منیفلدریمانی نامیده می‌شود. در این‌جا متر اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ را همراه با یک ضرب داخلی استاندارد به صورت $g_{can}(\nu_1, \nu_2) = \nu_1.\nu_2$ تعریف می‌کنند. فرض کنیم X زیرمنیفلدی از منیفلد ریمانی (Y, h) باشد و متر g را با تحدید h به فضای مماس TX تعریف می‌کنیم. اکنون به تعریف متر برگردان می‌پردازیم. فرض کنیم $\phi: X \to Y$ یک وابریختی باشد و متر ریمانی h روی Y یک متر ریمانی که متر برگردان نامیده می‌شود را روی X القا می‌کند و با $\phi^*(h)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\phi^*(h))_x(\nu_1, \nu_2) = h_{\phi(x)}(d\phi_x(\nu_1), d\phi_x(\nu_2)), \quad \forall x \in X, \ \forall \nu_1, \nu_2 \in T_xX.$$

یک خم هموار $\gamma: I \to X$ یک ژئودزیک روی منیفلدریمانی (X, g) است اگر مشتقات مرتبه‌ی دوم روی فضای مماس $T_{\gamma(t)}X$ در X برای هر t برابر با صفر شود و برای هر $x \in X$ این ژئودزیک یکتاست و یک ژئودزیک مینیمال برای وصل کردن دو نقطه‌ی تعادلی عادی، تعداد متناهی نقطه تعادلی بحرانی را قطع می‌کند. طول خم γ از $\gamma(a)$ تا $\gamma(b)$ به وسیله $\int_a^b \left(g_{\gamma(t)}\left(\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}} dt$ به دست می‌آید که $\frac{d\gamma}{dt}$ مشتق γ نسبت به t می‌باشند. [۱۰، ۱۱].

فرض کنیم $\gamma: U \to \mathbb{R}^3$ یک نگاشت و توابع $g_{11}, g_{12}, g_{22}: U \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$g_{11} = \| \gamma_x \|^2, \qquad g_{12} = g_{21} = \gamma_x \gamma_y, \qquad g_{22} = \| \gamma_y \|^2.$$

فرم $G = g_{11}\, dx^2 + 2g_{12}\, dxdy + g_{22}\, dy^2$ یک فرم نوع دوم برای نگاشت γ نامیده می‌شود. نماد کریستوفل نوع دوم Γ_{ij}^k به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲، ۱۳]،

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\lambda} (\partial_i g_{\lambda j} + \partial_j g_{\lambda i} - \partial_\lambda g_{ij}),$$

و مولفه‌های انحنای ریمان R که با R_{ijk}^s نمایش داده می‌شود به فرم

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s,$$

محاسبه می‌شود. به اضافه می‌توان تانسور انحنای ریمان را به شکل

$$R_{ijks} = \sum_l R_{ijk}^l\, g_{ls} \Rightarrow R_{ijij} = \sum_l R_{iji}^l\, g_{lj} = R_{iji}^1 g_{1j} + R_{iji}^2 g_{2j},$$

بازنویسی کرد و همچنین انحنای ریچی به صورت

$$Ric_p(t, J) = \frac{1}{n-1} \sum_{ij} R_{ijij},$$

و انحنای ریمان به حالت

$$K(t, J) = \frac{1}{n} \sum R\, ic_p(t, J) = \frac{1}{n(n-1)} \sum (R_{ijij}) \qquad (۱)$$

می‌باشد.

۲. پارامتری‌سازی استهلاک و انحناها

فرض کنیم در یک بازار دسته دوم با r منبع مستهلک ثابت و m خریدار، شرط تعادل عرضه و تقاضا حاکم باشد. اگر فرض کنیم $l = m = 2$ آنگاه

$$B(r) = \{(s(t), w_1(t), w_2(t)) \mid f_1(s(t), w_1(t)) + f_2(s(t), w_2(t)) = r(t)\},$$

و منیفلدتعادلی به صورت

$$E(r) = \{(s(t), \omega_1^1, \omega_1^2) \mid f_1^1(s(t), s(t)\omega_1^1 + \omega_1^2) = f_2^1(s(t), s(t)(r_1 - \omega_1^2) + r_2 - \omega_1^2) = r_1\}.$$

خواهد بود. باید در نظر داشته باشیم که $s(t)$ قیمت کالای مستهلک و ω_1^1 تقاضای خریدار اول از کالای مستهلک اول و ω_1^2 تقاضای شخص دوم از کالای مستهلک اول است. با توجه به تعریف استهلاک می‌توان آن را به روش خط مستقیم به صورت زیر محاسبه کرد

$$D_J = \frac{J}{N}(p - s),$$

که N کل عمر مورد انتظار برای یک کالا و s قیمت کالا در انتهای هر دوره‌ی استهلاکی است و p قیمت کالا در ابتدای خرید یعنی زمانی که کالا به حالت مستهلک خریده شده یا نو بود. ارزش دفتری کالا برابر با تفاضل قیمت اولیه کالا در هنگام خرید و قیمت کالا به عنوان کالای مستهلک در انتهای دوره‌ها استهلاکی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$B.V_J = p - \frac{J}{N}(p - s). \qquad (۲)$$

مسئله اصلی که باید مورد توجه قرار گیرد این است که باید ارزش فعلی پولی که در ابتدای دوره‌ها استهلاکی برای خرید کالا خرج کردیم، که در اصل دارایی ما در آن زمان محسوب می‌شود، را با ارزش فعلی کالای مستهلک در بازار دسته دوم مقایسه کنیم. اگر فرض کنیم فروشنده فعلی که خریدار کالا در زمان $t=0$ بوده، ثروت و دارایی خود را صرف خرید کالای مورد نظر نمی‌کرد و آن مقدار پول را دربانک سپرده گذاری می‌کرد، اکنون چه مقدار سرمایه داشت. برای این امر باید از فرمول مرابحه مرکب استفاده کرد که به صورت زیر می‌باشد

$$w = p(1 + i)^J, \qquad (۳)$$

که i نرخ بهره می‌باشد.

اینک فرمول (۳) را با توجه دوره‌های استهلاک به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$w(t) = w(t - J)(1 + i)^J, \qquad (۴)$$

در نهایت با استفاده از فرمول (۴) و با جایگذاری آن در (۲) داریم:

$$B.V_J = w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t)).$$

حال پارامتری سازی را با استفاده از زمان و دوره‌های استهلاک به صورت

$$\phi(t,J) = (s(t), J, w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t))).$$

ارایه می‌کنیم. از طرف دیگر با استفاده از انگاره‌های اقتصادی و نظریه تعادل عمومی، فرض می‌کنیم ارزش کالای دسته دوم در پایان طول عمر مفید، برابر با صفر شود یعنی $s(t)_{t=N} = 0$ و دوره‌های استهلاکی طی شده باید کمتر از کل طول عمر کالا باشد یعنی $J < N$؛ در نتیجه

$$w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t)) = 0,$$

بنابراین $w(t) = \lambda s(t)$, که $\lambda > 1$ و $\lambda = \frac{J}{N-J}$.

مشتقات جزیی پارامتری ϕ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم،

$$\phi(t,J) = (s(t), J, w(t) - \frac{J}{N}(w(t) - s(t))),$$
$$\phi_t = (s'(t), 0, w'(t) - \frac{J}{N}(w'(t) - s'(t))),$$
$$\phi_J = (0, 1, -\frac{1}{N}(w(t) - s(t))),$$
$$\phi_{tt} = (s''(t), 0, w''(t) - \frac{J}{N}(w''(t) - s''(t))),$$
$$\phi_{JJ} = (0,0,0),$$
$$\phi_{tJ} = \phi_{Jt} = (0, 0, -\frac{1}{N}(w'(t) - s'(t))),$$

و بردار نرمال به صورت زیر به‌دست می آید،

$$\vec{n} = \frac{\phi_t \wedge \phi_j}{\|\phi_t \wedge \phi_j\|} =$$

$$(\frac{-Js'(t) - (N-J)w'(t)}{\sqrt{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t))s'(t)^2 + 2Jw'(t)(N-J)s'(t) + w'(t)^2(N-J)}},$$

$$\frac{s'(t)(w(t) - s(t))}{\sqrt{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t))s'(t)^2 + 2Jw'(t)(N-J)s'(t) + w'(t)^2(N-J)}},$$

$$\frac{Ns'(t)}{\sqrt{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t))s'(t)^2 + 2Jw'(t)(N-J)s'(t) + w'(t)^2(N-J)}}).$$

اکنون مولفه‌های متر را به شکل زیر ارایه می‌کنیم

$$g_{11} = \|\phi_t\|^2 = (\frac{(N-J)w'(t) + Js'(t)}{N})^2 + (s'(t))^2,$$

$$g_{22} = \|\phi_j\|^2 = (\frac{w(t) - s(t)}{N})^2 + 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \phi_j \phi_t = \frac{((N-J)w'(t) + Js'(t))(s(t) - w(t))}{N^2},$$

و متر g به فرم

$$\begin{aligned} g = {} & [(\frac{(N-J)w'(t) + Js'(t)}{N})^2 + (s'(t))^2]\, dt^2 \\ & + 2[\frac{((N-J)w'(t) + Js'(t))(s(t) - w(t))}{N^2}]\, dtdJ \\ & +[(\frac{w(t) - s(t)}{N})^2 + 1]\, dJ^2, \end{aligned}$$

خواهد بود که فرم بنیادی نوع دوم است.

وارون مولفه‌های متر با استفاده از $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ بدست می‌آوریم،

$$g^{11} = \frac{w^2(t) - 2w(t)s(t) + s^2(t) + n^2}{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t) + w^2(t))(s'(t))^2 + 2J(N-J)w'(t)s'(t) + (w'(t))^2(N-J)^2},$$

$$g^{12} = \frac{(w'(t)(N-J) + Js'(t))(w(t) - s(t))}{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t) + w^2(t))(s'(t))^2 + 2J(N-J)w'(t)s'(t) + (w'(t))^2(N-J)^2},$$

$$g^{22} = \frac{((w'(t))^2 N^2 - 2(w'(t))^2 NJ + (w'(t))^2 J^2 + 2w'(t)s'(t)NJ - 2w'(t)s'(t)J^2 + (s'(t))^2(N^2 + J^2))}{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t) + w^2(t))(s'(t))^2 + 2J(N-J)w'(t)s'(t) + (w'(t))^2(N-J)^2}.$$

نمادهای کریستوفل نوع دوم نیز در زیر محاسبه شده‌اند

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{(w'(t) - s'(t))(w(t) - s(t))s'(t)}{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t) + w^2(t))(s'(t))^2 + 2J(N-J)w'(t)s'(t) + (w'(t))^2(N-J)^2},$$

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = \frac{(w'(t)N - Jw'(t) + Js'(t))(w'(t) - s'(t))}{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t) + w^2(t))(s'(t))^2 + 2J(N-J)w'(t)s'(t) + (w'(t))^2(N-J)^2},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{(w(t) - s(t))s'(t)(w''(t)s'(t)N - w''(t)s'(t)J - s''(t)w'(t)N + s''(t)w'(t)N)}{(N^2 + J^2 + s^2(t) - 2w(t)s(t) + w^2(t))(s'(t))^2 + 2J(N-J)w'(t)s'(t) + (w'(t))^2(N-J)^2},$$

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{w(t)^2 s''(t)s'(t)-2w(t)s(t)s''(t)s'(t)+s(t)^2 s''(t)s'(t)+w''(t)w'(t)N^2-2w''(t)w'(t)NJ+w''(t)w'(t)J^2}{(N^2+J^2+s^2(t)-2w(t)s(t)+w^2(t))(s'(t))^2+2J(N-J)w'(t)s'(t)+(w'(t))^2(N-J)^2}$$

$$+\frac{w''(t)s'(t)NJ-w''(t)s'(t)J^2+s''(t)w'(t)-s''(t)w'(t)J^2+s'(t)s''(t)N^2+s''(t)s'(t)J^2}{(N^2+J^2+s^2(t)-2w(t)s(t)+w^2(t))(s'(t))^2+2J(N-J)w'(t)s'(t)+(w'(t))^2(N-J)^2},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\Gamma_{22}^{2}=0,$$

و در نهایت انحنای اسکالر با استفاده از فرمول ۲-۱ به شکل زیر به‌دست آمده است،

$$K=-[\frac{Ns'(t)(s'(t)-w'(t))}{(N^2+J^2+s^2(t)-2w(t)s(t)+w^2(t))(s'(t))^2+2J(N-J)w'(t)s'(t)+(w'(t))^2(N-J)^2}]^2.$$

برای نشان دادن منحصربه‌فردی قیمت کالای مستهلک $s(t)$، با استفاده از قضیه ۰، انحنای $E(r)$ باید صفر شود. در نتیجه معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$s'(t)-w'(t)=0,$$

و در کل داریم

$$w(t)=s(t)+c. \qquad (۵)$$

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تعاریف اولیه اقتصادی و فرضیات نظریه تعادل عمومی، توپولوژی و هندسه دیفرانسیل، یک پارامتری سازی جدید برای استهلاک بر پایه‌ی شرط تعادلی و ارزش دفتری ارایه دادیم. ازآنجایی‌که با فرض شرط تعادلی، صفر شدن انحنا و یکتایی قیمت تعادلی لازم و ملزوم هم خواهند بود، معادله‌ی (۵) به‌دست می‌آید.

با فرض اینکه$w(t)$ ارزش فعلی بهای پرداخت شده برای کالا و $s(t)$ ارزش فعلی کالای مستهلک در بازار دسته دوم است، ضمن مقایسه این دو مقدار، اگر $w(t)>s(t)$، c باید به طور اکید کمتر از صفر باشد تا تعادل حاکم باشد و فروشنده با فروش کالا متضرر شده و اگر $w(t)<s(t)$، درحالت تعادلیc به طور اکید بزرگتر از صفر است که یعنی فروش همراه با سود بوده است.

References

1. S. Smale, Global analysis and economic, J. Math. Econ., **1** (1974), 213-221.
2. Y. Balasko, Some results on uniqueness and on stability equilibrium in general equilibrium theory, J. Math. Econ., **2** (1975), 95-118.

3. A. Loi, S. Matta, A Riemannian metric on the Equilibrium manifold: the smooth case, Economics Bulletin, **4** (2006), 1-9.

4. Y. Balasko, Wealth concerns and equilibrium, J. Math. Econ., **59** (2015), 92-101.

5. Loi, S. Matta, Curvature and uniqueness of equilibrium, J. Math. Econ., **74** (2018), 62-67.

6. Y. Balasko, On the number of critical equilibria separating two equilibria, Theor. Econ., **7** (2011), 163–181.

7. Y. Balasko, Economic equilibrium and catastrophe theory: an introduction, Econometrica, **46** (1978), 557-569.

8. Y. Balasko, The set of regular equilibria, J. Econ. Theory, **58** (1992), 1-8.

9. Y. Balasko, Foundations of the Theory of Genaral Equilibrium, Academic Press:Boston, 1988.

10. A. Loi, S. Matta, Structural stability and catastrophes, Economics Bulletin, **32** (2012), 3378-3385.

11. A. Loi, S. Matta, Geodesics on the Equilibrium manifold, J. Math. Econ., **44** (2008), 1379-1384.

12. M.P. Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, New Jersey: Prentice Hall, 1976.

13. M.W. Hirsch, Differential topology, Paris: Springer, 1988.