Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Study of Weak Associated Primes Ore Extensions

M. Zahiri[1] ✉, S. Zahiri[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of scinece, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran. E-mail: ✉ m.zahiri86"gmail.com, m.zahiri@eghlid.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of scinece, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran. E-mail: saeede.zahiri@yahoo.com, s.zahiri@eghlid.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 4 October 2021
Accepted: 27 August 2023
Published online: 10 July 2024

Keywords:
nil δ -weakly rigid rings,
Weak associated primes,
Differential polynomial rings,
Quasi IFP-rings.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this article, R denotes an associative ring with unity. A derivation over R is an additive map $\delta : R \to R$ such that $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, for each $a, b \in R$. We denote by $R[x;\delta]$ the ring of differential polynomial ring, whose elements are the polynomials over R, the addition is defined as usual, and the multiplication subject to the relation $xa = ax + \delta(a)$, for each $a \in R$. The set of all nilpotent elements of R is denoted by $nil(R)$. Recall that a ring R is called *reduced* if $nil(R) = 0$. A ring R is called *reversible* if $ab = 0$ implies $ba = 0$, for all $a, b \in R$; a ring R has IFP (or is *semicommutative*) if $ab = 0$ implies $aRb = 0$, for all $a, b \in R$. A ring R is called 2-*primal* provided $P(R) = nil(R)$, where $P(R)$ is the prime radical of R. According to Kim *et al*. [7], a ring R has *quasi-IFP* provided that $\sum_{i=0}^{n} Ra_iR$ is nilpotent whenever $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ is nilpotent. They showed that, a ring R has quasi-IFP if and only if $N_0(R)$ = nil(R), where $N_0(R)$ is the Wedderburn radical of R. They also obtained that every ring with quasi-IFP is 2-primal, and rings with IFP have quasi-IFP property. In general, each of these implications is irreversible.

reversible rings ⇒ *semicommutative* rings ⇒ rings with quasi-IFP ⇒ 2-primal rings.

According to Krempa [8], an endomorphism α of a ring R is called *rigid* if $a\alpha(a) = 0$ implies $a = 0$ for $a \in R$. A ring R is α-*rigid* if there exists a rigid endomorphism α of R. Note that any rigid endomorphism of a ring is a monomorphism and α-rigid rings are reduced. Hashemi and the Moussavi [8], generalized α-rigid rings to α-*compatible rings*. According to [6], ring R is said to be α-*compatible* if for each $a, b \in R, ab = 0 \Leftrightarrow a\alpha(b) = 0$. Moreover, R is called δ-*compatible* if for each $a, b \in R, ab = 0 \Rightarrow a\delta(b) = 0$. If R is bot α-compatible and δ-compatible, then R is said to be (α, δ)-*compatible*. By [6], a ring R is α-rigid if and only if R is (α, δ)-compatible and reduced.

For a ring R and a right R-module M_R, denoted $r_R(M)$= $\{R \in R \mid mR = 0\}$ the set of right annihilators of M_R. A module M_R is said to be prime if $M_R \neq 0$ and $r_R(M) = r_R(N)$, for every non-zero submodule N of M. If M_R is a right R-module, an ideal P of R is called an associated prime of M_R if there exists a prime submodule N of M such that $P = r_R(N)$. The set of associated primes of M_R is denoted by $Ass(M_R)$. It is shown that for a

commutative ring R, the associated primes ideals of the polynomial ring $R[x]$ are $P[x]$, where $P \in Ass(R)$. Annin [1], extended the result above to the noncommutative setting of Ore extensions.

By Ouyang [14], for a subset X of a ring R, $Nl_R(X) = \{a \in R |\ ax \in nil(R), for\ all\ x \in X\}$ and $Nr_R(X) = \{a \in R |\ xa \in nil(R), for\ all\ x \in X\}$ are called *the left weak annihilator* and *the right weak annihilator* of X in R, respectively. By Ouyang et al. [14], a right ideal I of a non-zero ring R, is called a right weak-prime ideal if $I \nsubseteq nil(R)$ and $Nr_R(I) = Nr_R(J)$ for every right ideal $J \subseteq I$ and $J \nsubseteq nil(R)$. An ideal P of R is called a weak associated prime of R if there exists a right weak-prime ideal I such that $P = Nr_R(I)$. The set weak associated primes of R is denoted by $NAss(R)$. They described all weak associated primes of the skew polynomial ring R[x; α, δ] in terms of the weak associated primes of R. In fact they proved that, *if R is a reversible and* δ*-compatible ring, then* $NAss\ (R[x;\ \delta]) = \{P[x;\ \delta]\ |\ P \in NAss\ (R)\}$.

In this paper we introduce the notion of nil δ-weakly rigid rings which is a generalization of reduced rings and δ-compatible rings. We extend the results of [14] to the more general situation. The main result of the present paper says that when R is nil δ-weakly rigid and quasi-IFP, the $NAss(R[x;\delta]) = \{P[x;\delta] |\ P \in NAss(R)\}$. Note that the notions nil δ-weakly rigid and quasi-IFP can be transfer to $T_n(R)$ but this is not true for δ-compatibility and reversibility property.

How to cite: Zahiri. M., Zahiri. S. (2024). Study of Weak Associated Primes Ore Extensions, *Mathematical Researches*, **10** (2), 34 – 50.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵٤٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵٤
پژوهش‌های ریاضی
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مطالعه ایده‌آل‌های وابسته ضعیف حلقه‌های چندجمله‌ای اریب

معصومه ظهیری[۱]✉، سعیده ظهیری[۲]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضیات وکاربردها، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران m.zahiri@eghlid.ac.ir, m.zahiri86@gmail.com
۲. گروه ریاضیات وکاربردها، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران s.zahiri@eghlid.ac.ir, saeede.zahiri@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۴/۱۰

چکیده

در این مقاله مفهوم حلقه‌های پوچ δ-صلب ضعیف را معرفی می‌کنیم که تعمیم حلقه‌های کاهشی و δ-سازگار هستند. اویانگ[1] در [۱۴] مفهوم ایده‌آل‌های اول وابسته ضعیف را تعریف و ثابت کرد وقتی که حلقه R برگشت‌پذیر و δ-سازگارباشد آنگاه تناظر یک به یکی بین ایده آل‌های وابسته ضعیف حلقه‌های R و $R[x;\delta]$ وجود دارد. دراین مقاله نشان می‌دهیم این تناظر وقتی که حلقه R شبه نیم‌جابجایی و پوچ δ-صلب ضعیف باشد نیز برقرار است. این تعمیم از این جهت اهمیت دارد که خاصیت شبه نیم‌جابجایی و پوچ δ-صلب ضعیف حلقه‌ها، هر دو به حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی منتقل می‌شوند که این خاصیت در مورد حلقه‌های برگشت‌پذیر و δ-سازگار برقرار نیست.

واژه‌های کلیدی:
حلقه پوچ δ- صلب ضعیف،
حلقه وابسته ضعیف اول؛
حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی،
حلقه شبه نیم‌جابجایی.

استناد: ظهیری، معصومه؛ ظهیری، سعیده (۱۴۰۳). مطالعه ایده‌آل های وابسته ضعیف حلقه های چندجمله ای اریب، *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۲)، ۳۴ – ۵۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1] Ouyang

مقدمه

در سراسر این مقاله R را حلقه‌ای شرکت‌پذیر و یکدار فرض می‌کنیم. نگاشت جمعی $\delta: R \to R$ را یک عملگر مشتق روی R گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$ در خاصیت $\delta(\mathrm{ab}) = \delta(\mathrm{a})b + a\delta(b)$ صدق کند. چندجمله‌ای مشتق روی حلقه R را با نماد $R[x, \delta]$ نمایش می‌دهیم که عناصر آن به صورت چندجمله‌ای‌هایی روی R است که از جمع معمولی و قانون ضرب $xa = ax + \delta(a)$ تبعیت می‌کند. مجموعه عناصر پوچتوان حلقه R را با نماد $nil(R)$ نشان می‌دهیم. حلقه R را کاهشی گوییم هرگاه $nil(R) = 0$. در سال ۱۹۹۹، کوهن[1] [۴]، تعمیمی از حلقه های جابجایی و حلقه های کاهشی معرفی کرد. او حلقه R را برگشت‌پذیر نامید هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = 0$ آنگاه $ba = 0$. درسال ۱۹۸۲، ناربن[2] [۱۳]، تعمیمی از حلقه های جابجایی معرفی کرد. او حلقه R را نیم‌جابجایی نامید هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = 0$ آنگاه $aRb = 0$. در سال ۲۰۰۹، کیم و همکارانش[3] [۸]، حلقه های جدیدی که تعمیم حلقه های نیم‌جابجایی بودند را معرفی کردند. آنها حلقه R را شبه نیم‌جابجایی نامیدند هرگاه برای هر چندجمله‌ای $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in nil(R[x])$، عدد طبیعی $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوریکه $(Ra_0R + \cdots + Ra_nR)^k = 0$.

در سال ۱۹۹۳، بیرکنمیر و هیترلی[4][۲]، حلقه R را ۲-اولیه نامیدند هرگاه $P(R) = nil(R)$، که $P(R)$ برابر اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی رابطه زیر بین حلقه های بیان شده وجود دارد:

۲-اولیه $\longrightarrow$ شبه نیم‌جابجایی $\longrightarrow$ نیم‌جابجایی $\longrightarrow$ برگشت‌پذیر $\longrightarrow$ کاهشی

در سال ۲۰۰۰، هاشمی و موسوی [۷]، مفهوم حلقه‌های δ-سازگار را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\forall a, b \in R, ab = 0 \ \to a\delta(b) = 0$$

آنها نشان دادند که هر حلقه α-صلب، δ-سازگار می‌باشد و با ارایه مثال‌هایی نشان دادند که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. لذا حلقه‌های δ-سازگار تعمیمی از حلقه‌های α-صلب هستند. برای هر مدول M، زیرمجموعه $X \subseteq M_R$ پوچساز راست X از R را با نماد $r_R(X)$ نشان می‌دهیم که $r_R(\mathrm{X}) = \{r \in R: Xr = 0\}$. فیث[5] در سال ۲۰۰۰، نشان داد در حلقه‌های جابجایی تناظری یک به یک بین ایده‌آل های اول وابسته حلقه R و حلقه چندجمله‌ای‌های آن وجود دارد. آنین[6]مفهوم مدول‌های اول روی حلقه‌های جابجایی را به مدول‌های اول روی هر حلقه دلخواه تعمیم داد. او مدول N را اول نامید هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر N' از N داشته باشیم $Sr_R(N) = r_R(N')$. وی همچنین مفهوم ایده‌آل‌های اول وابسته روی هر حلقه دلخواه را تعریف کرد و مجموعه ایده‌ال‌های اول وابسته R را با نماد $Ass(R)$ نشان داد و ثابت کرد که تحت شرایطی $Ass(R[x; \alpha, \delta]) = \{P[x; \alpha, \delta]: P \in Ass(R)\}$.

[1] Cohn
[2] Narbone
[3] Kim and etal.
[4] Birkenmeier and Heatherly
[5] Faith
[6] Annin

اویانگ[1][۱۴] در سال ۲۰۱۲، برای هر زیرمجموعه X از R مفهوم پوچساز ضعیف X در R را به صورت $N_R(\mathrm{X}) = \{a \in R: Xa \subseteq nil(R)\}$ تعریف کرد. با استفاده از این تعریف، مفاهیم ایده‌آل‌های راست اول ضعیف و ایده‌آل‌های اول ضعیف وابسته را تعریف و مطالعه کرد. اویانگ ثابت کرد اگر R برگشت‌پذیر و δ-سازگار باشد آنگاه $NAss(R[x,\delta]) = \{P[x,\delta]: P \in NAss(R)\}$.

در این مقاله ما مفهوم حلقه‌های پوچ δ-صلب ضعیف را که تعمیمی از حلقه‌های کاهشی و حلقه‌های δ-سازگار هستند تعریف کرده و خواصی از آن را بیان می‌کنیم. همچنین مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که پوچ δ-صلب ضعیف هستند ولی δ-سازگار یا کاهشی نیستند. در ادامه نشان می‌دهیم اگر حلقه R شبه نیم‌جابجایی و پوچ δ-صلب ضعیف باشد، آنگاه $NAss(R[x,\delta]) = \{P[x,\delta]: P \in NAss(R)\}$. یکی از مهمترین نتایج این مقاله بیان می کند که برای هر حلقه کاهشی و برای هر مشتق δ روی آن، تناظری یک به یک روی ایده‌آل‌های وابسته اول حلقه R و حلقه چندجمله های دیفرانسیلی $R[x,\delta]$، وجود دارد. به عبارت دیگر برای حلقه کاهشی R و هر مشتق دلخواه δ روی حلقه R، همواره داریم: $Ass(R[x,\delta]) = \{P[x,\delta]: P \in Ass(R)\}$.

۱. حلقه‌های پوچ δ- صلب ضعیف

تعریف ۱. حلقهٔ R را پوچ δ-صلب ضعیف نامیم هرگاه برای هر $a,b \in nil(R)$، $aRb = 0$ نتیجه دهد $aR\delta(b) = 0$. به‌وضوح حلقه‌های کاهشی و δ-سازگار و حلقه‌های اول، پوچ- δ-صلب ضعیف هستند در ادامه با ارایه مثال‌هایی نشان می‌دهیم عکس آن برقرار نمی‌باشد.

گزاره ۲. اگر δ یک عملگر مشتق ناصفر و حلقهٔ R، δ- صلب باشد، عملگر مشتق $\bar{\delta}$ را روی $T_3(R)$ به صورت $\bar{\delta}\big((a)_{ij}\big) = (\delta(a))_{ij}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $T_3(R)$، پوچ $\bar{\delta}$-صلب ضعیف است ولی $\bar{\delta}$-سازگار یا کاهشی نیست.

اثبات: چون حلقه R کاهشی است:

$$nil\big(T_3(R)\big) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

حال فرض کنیم $AT_3(R)B = 0$، به‌طوریکه

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ nil\big(T_3(R)\big)$$

[1] Ouyang

از $AT_3(R)B=0$ نتیجه می‌شود $a_{12}Rb_{23}=0$. چون حلقهٔ R، δ- صلب است لذا $a_{12}R\delta(b_{23})=0$. به راحتی می‌توان نشان داد $AR\overline{\delta(B)}=0$. بنابراین $T_3(R)$، پوچ $\bar{\delta}$-صلب ضعیف است.

چون δ یک عملگر مشتق ناصفراست، عضوی مانند $c\in R$ وجود دارد که $\delta(c)\neq 0$. با فرض $B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&c\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}c&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$، داریم $AB=0$ ولی $A\bar{\delta}(B)=\begin{pmatrix}0&0&\delta(c)\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$، که نشان می‌دهد $T_3(R)$، $\bar{\delta}$-سازگار نیست. به‌وضوح $T_3(R)$ حلقه‌ای اول و کاهشی نیست.■

برای حلقهٔ R، $K(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(R)=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{22}&a_{23}\\0&0&0&a_{22}\end{pmatrix}\middle| a_{ij}\in R\right\}$$

مثال ۳. اگر δ یک عملگر مشتق ناصفر و حلقه R، δ- صلب باشد در این صورت عملگر مشتق $\bar{\delta}$ را روی $K(R)$ به صورت $\bar{\delta}\big((a)_{ij}\big)=(\delta(a))_{ij}$ تعریف می‌کنیم در این صورت $K(R)$، پوچ $\bar{\delta}$- صلب ضعیف است ولی $\bar{\delta}$- سازگار یا کاهشی نیست.

برهان: چون δ یک عملگر مشتق ناصفر است عضوی مانند $a\in R$ وجود داردکه $\delta(a)\neq 0$. در اینصورت با فرض

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&a\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}0&0&0&a\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}،$$

داریم $AB=0$ ولی $A\bar{\delta}(B)\neq 0$، بنابراین $K(R)$، $\bar{\delta}-$سازگار نیست. به‌وضوح $K(R)$ کاهشی نیست.

حال نشان می‌دهیم $K(R)$، پوچ $\bar{\delta}-$صلب ضعیف است برای این منظور فرض کنید

$$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&0&a_{23}&a_{24}\\0&0&0&a_{23}\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\0&0&b_{23}&b_{24}\\0&0&0&b_{23}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\in nil(R)$$

و همچنین داشته باشیم $AK(R)B=0$. در این صورت داریم:

$$\begin{cases}a_{12}Rb_{23}=0\\a_{12}Rb_{24}+a_{12}Rb_{23}+a_{13}Rb_{23}=0\\a_{23}Rb_{23}=0\end{cases}$$

چون حلقه R، $\alpha-$ صلب است لذا کاهشی بوده و از $a_{12}Rb_{23}=0$ نتیجه می‌شود $b_{23}a_{12}=0$. حال اگر معادلهٔ $a_{12}Rb_{24}+a_{12}Rb_{23}+a_{13}Rb_{23}=0$ را از سمت چپ در b_{23} ضرب کنیم، داریم $b_{23}a_{13}Rb_{23}=0$، پس $a_{13}Rb_{23}a_{13}Rb_{23}=0$. چون حلقه R کاهشی است لذا $a_{13}Rb_{23}=0$ و در نتیجه $a_{13}R\delta(b_{23})=0$. حال

چون $a_{12}Rb_{23}=0$ و $a_{13}Rb_{23}=0$ و $a_{12}Rb_{24}+a_{12}Rb_{23}+a_{13}Rb_{23}=0$ نتیجه می‌شود $a_{12}Rb_{24}=0$ و لذا $a_{12}R\delta(b_{24})=0$. همچنین از $a_{12}Rb_{23}=0$ و $a_{23}Rb_{23}=0$ نتیجه می‌شود $a_{12}R\delta(b_{23})=0$ و $a_{23}R\delta(b_{23})=0$. با استفاده از این روابط، داریم:

$$\begin{cases} a_{12}R\delta(b_{23})=0 \\ a_{12}R\delta(b_{24})+a_{12}R\delta(b_{23})+a_{13}R\delta(b_{23})=0 \\ a_{23}R\delta(b_{23})=0 \end{cases}$$

بنابراین $A\overline{R\delta}(B)=0$، که نشان می‌دهد $K(R)$ پوچ $\bar{\delta}$-صلب ضعیف است.■

در زیر مثالی از حلقه‌ای ارایه می دهیم که پوچ $\bar{\delta}$-صلب ضعیف نیست.

مثال ۴. فرض کنیم δ عملگر مشتق روی $R=\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$ با تعریف $\delta(a_0+a_1x)=a_1$ باشد در این صورت $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$، پوچ $\bar{\delta}$-صلب ضعیف نیست، زیرا $nil\left(\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}\right)=ax$. حال با فرض $f=x, g=x$ داریم $fRg=0$ ولی $fR\delta(g)=xR\neq 0$. ■

تعریف ۵. حلقه R را شبه-نیم‌جابجایی نامیم هرگاه $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in R[x]$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $\sum_{i=0}^{n}Ra_iR$ نیز پوچ‌توان باشد.

قضیه ۶. فرض کنیم R، شبه-نیم جابجایی باشد در این‌صورت $nil(R)$ ایده‌آلی از R است.

لم ۷. فرض کنیم حلقهٔ R پوچ δ-صلب ضعیف و شبه‌نیم‌جابجایی باشد، آنگاه $\delta(nil(R))\subseteq nil(R)$.

برهان: فرض کنیم a عضو پوچ‌توانی از حلقه R باشد. چون R شبه‌نیم‌جابجایی است عددی مانند k وجود دارد که $(aR)^k=0$. چون $(aR)^{k-1}a=0$ با استفاده از پوچ δ-صلب سازگاری داریم:

$$(aR)^{k-1}\delta(a)\ (aR)^{k-2}aR\delta(a)=0 \qquad (۱)$$

حال با اعمال خاصیت پوچ δ-صلب ضعیف روی $(aR)^{k-2}aRa=0$ داریم:

$$(aR)^{k-2}\delta(aRa)=(aR)^{k-2}\delta(a)Ra+(aR)^{k-2}a\delta(R)a+(aR)^{k-2}aR\delta(a)=0, \qquad (2)$$

چون $(aR)^{k-2}a\delta(R)a\subseteq(aR)^{k-1}a=0$ از رابطه (۲) نتیجه می‌شود:

$$(aR)^{k-2}\delta(a)Ra+(aR)^{k-2}aR\delta(a)=0, \qquad (۳)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(aR)^{k-2}\delta(a)Ra = 0, \tag{۴}$$

حال چون R حلقه‌ای پوچ δ-صلب ضعیف است و $(aR)^{k-3}aRaRa = 0$ داریم:

(۵)

$$\begin{aligned}(aR)^{k-3}\delta(aRaRa) \\ &= (aR)^{k-3}\delta(a)RaRa + (aR)^{k-3}a\delta(R)aRa + (aR)^{k-2}\delta(a)Ra \\ &+ (aR)^{k-2}a\delta(R)a + (aR)^{k-1}\delta(a) = 0\end{aligned}$$

چون

$$(aR)^{k-3}a\delta(R)aRa + (aR)^{k-2}a\delta(R)a \subseteq (aR)^{k-1}a = 0$$

از رابطه (۵) نتیجه می شود:

$$(aR)^{k-3}\delta(a)RaRa + (aR)^{k-2}\delta(a)Ra + (aR)^{k-1}\delta(a) = 0, \tag{۶}$$

با مقایسه روابط (۱)، (۴) و (۶) نتیجه می‌شود $(aR)^{k-3}\delta(a)RaRa = 0$ و با ادامه این روند داریم:

$$aR\delta(a)(Ra)^{k-2} = 0 \tag{۷}$$

از طرفی چون $nil(R)$ ایده آلی از R است لذا $aR\delta(a) \subseteq nil(R)$. با روندی مشابه نتیجه می‌شود:

$$a\big(R\delta(a)\big)^2(Ra)^{k-3} = a\big(R\delta(a)\big)^3(Ra)^{k-4} = \cdots = a\big(R\delta(a)\big)^{k-1} = 0$$

چون $a(R\delta(a))^{k-2}Ra = 0$ و از آنجایی که $(R\delta(a))^{k-2}Ra \subseteq nil(R)$، با اعمال خاصیت پوچ δ- صلب ضعیف داریم:

$$a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-2}R\right)a + a\big(R\delta(a)\big)^{k-1} = 0 \tag{۸}$$

از طرفی چون $a(R\delta(a))^{k-1} = 0$ لذا

$$a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-2}R\right)a = 0, \tag{۹}$$

از طرف دیگر با اعمال مشتق روی عبارت $a(R\delta(a))^{k-2}Ra = 0$ نتیجه می‌شود:

$$(\delta(a)R)^{k-1}a + a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-2}R\right)a + a\big(R\delta(a)\big)^{k-1} = 0 \tag{۱۰}$$

با داشتن $a\big(R\delta(a)\big)^{k-1} = 0$ و مقایسه روابط (۹) و (۱۰) داریم:

$$(\delta(a)R)^{k-1}a = 0, \qquad (۱۱)$$

حال با اعمال عملگر مشتق روی $a\big(R\delta(a)\big)^{k-1} = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\delta(a)\big(R\delta(a)\big)^{k-1} + a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-1}\right) = 0, \qquad (۱۲)$$

با ضرب $a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-1}\right)$ از سمت راست در عبارت (۱۲) و سپس استفاده از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\left(a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-1}\right)\right)^2 = 0.$$

لذا $a\delta\left(\big(R\delta(a)\big)^{k-1}\right) \subseteq nil(R)$ و چون $nil(R)$ ایده‌آلی از R است با استفاده از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\delta(a)\big(R\delta(a)\big)^{k-1} \subseteq nil(R)$$

بنابراین $\delta(a)R \subseteq nil(R)$ که نشان می‌دهد $\delta(nil(R)) \subseteq nil(R)$.

۲. ایده‌آل‌های ضعیف وابسته اول در چند جمله‌ای‌های مشتق

لم ۱. در حلقه $R[x;\delta]$ برای هر عدد صحیح و مثبت n و $r \in R$، داریم

$$x^n r = \delta^n(r) + n\delta^{n-1}(r)x + \cdots + \binom{n}{k}\delta^{n-k}(r)x^k + \cdots + rx^n.$$

گزاره ۲. فرض کنیم حلقهٔ R ، پوچ δ -صلب ضعیف شبه-نیم‌جابجایی باشد در این صورت برای هر $a,b,c \in nil(R)$ داریم:

(۱) اگر $aRbRc = 0$ آنگاه $aR\delta^s(b)Rc = 0$ و $aRbR\delta^t(c) = 0$ برای اعداد صحیح مثبت s,t .

(۲) اگر $aRbRc = 0$ آنگاه $aR\delta^s(b)R\delta^t(c) = 0$ برای اعداد صحیح مثبت s,t .

(۳) اگر $aRb = 0$ آنگاه $aR\delta^n(b) = 0$ و $\delta^n(a)Rb = 0$, برای اعداد صحیح مثبت m,n .

برهان:

(۱): فرض کنیم $aRbRc = 0$، چون بنا به لم ۷ در قسمت ۲، $\delta(nil(R)) \subseteq nil(R)$ و لذا نتیجه می‌شود $aRbR\delta^t(c) = 0$. با استفاده از خاصیت پوچ δ -صلب ضعیف از $aRbRc = 0$ داریم:

$$aR\delta(bRc) = aR\delta(b)Rc + aRb\delta(R)c + aRbR\delta(c) = 0.$$

از اینکه $aRbR\delta^t(c) = 0$ و $aRb\delta(R)c \subseteq aRbRc = 0$ نتیجه می‌شود $aR\delta(b)Rc = 0$. با استفاده مجدد از خاصیت پوچ δ -صلب ضعیف داریم $aR\delta(b)R\delta(c) = 0$.

حال از $aR\delta(b)Rc = 0$ و استفاده مجدد ازخاصیت پوچ δ -صلب ضعیف و ایده‌آل بودن $nil(R)$ داریم :

$$0 = aR\delta(\delta(b)Rc) = aR\delta^2(b)Rc + aR\delta(b)\delta(R)c + aR\delta(b)R\delta(c)$$

و چون $aR\delta(b)\delta(R)c = aR\delta(b)R\delta(c) = 0$ لذا $aR\delta^2(b)Rc = 0$. با ادامه این روند نتیجه می‌شود $aR\delta^s(b)Rc$.

(۲): با استفاده ازلم ۷ در قسمت ۲و بند (۱) نتیجه می‌شود.

(۳): چون $aRb = 0$ از (۱) داریم $aR\delta^n(b) = 0$ و از طرفی داریم

$$\delta(aRb) = \delta(a)Rb + a\delta(R)b + aR\delta(b) = 0.$$

چون $aR\delta(b) = 0$ و $a\delta(R)b = 0$ لذا $\delta(a)Rb = 0$ و چون $\delta(nil(R)) \subseteq nil(R)$ با استفاده از خاصیت پوچ δ -صلب ضعیف داریم $\delta(a)R\delta(b) = 0$. از طرفی از رابطه $\delta(a)Rb = 0$ نتیجه می‌شود $\delta^2(a)Rb + \delta(a)\delta(R)b + \delta(a)R\delta(b) = 0$. چون $\delta(a)\delta(R)b + \delta(a)R\delta(b) = 0$ لذا $\delta^2(a)Rb = 0$ با ادامه این روند داریم $\delta^n(a)Rb = 0$. ■

لم ۳. فرض کنید حلقهٔ R، پوچ δ-صلب ضعیف و شبه جابجایی باشد. آنگاه $a_i \in nil(R)$، برای $0 \leq i \leq n$، اگر و تنها اگر $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in nil(R[x,\delta])$.

برهان: فرض کنیم $a_i \in nil(R)$، $0 \leq i \leq n$. چون هر حلقه شبه نیم جابجایی، ۲-اولیه است لذا داریم $nil(R) = nil_*(R)$، از طرفی برای هر $0 \leq i \leq n$ عدد صحیح مثبتی مانند m_i وجود دارد به طوری که برای هر $(a_iR)^{m_i} = 0 \;\; ; \; 0 \leq i \leq n$.

فرض کنیم $k = \sum_{i=0}^{n} m_i + 1$، در اینصورت برای هر داریم $0 \leq i \leq n$، $(a_iR)^k = 0$. حال ادعا می‌کنیم $f(x)^k = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^k = 0$.

به راحتی می‌توان نشان داد ضرایب $\left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right)^k$ را می‌توان به صورت تک جمله‌ای‌هایی به طول k از a_i و $\delta^{\,k}(a_j)$ نوشت. چون $a_i, a_j \in \{a_0, \dots, a_n\}$ و $k \geq 0$ عدد صحیح مثبت است، چند جمله‌ای $\underbrace{a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})}_{k+1}$ که $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \{a_0, \dots, a_n\}$ و t_j، $1 \leq j \leq k$، اعداد صحیح نامنفی هستند، را در نظر می گیریم. نشان می‌دهیم $a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k}) = 0$. اگر تعداد a_0 در $a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})$ بیشتر از m_0 باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای $a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})$ را می‌توان به صورت

$$b_1\left(\delta^{s_1}(a_0)\right)^{j_1} b_2\left(\delta^{s_2}(a_0)\right)^{j_2} \dots b_v\left(\delta^{s_v}(a_0)\right)^{j_v} b_{v+1}$$

نوشت که $j_1 + j_2 + \cdots + j_v \geq m_0$، $j_1, j_2, \dots, j_v \geq 1$ و b_q برای هر $q = 1,2,\dots,v+1$، حاصل ضرب تعداد متناهی از عناصر انتخاب شده از مجموعه $\{a_{i_1}, \delta^{l_2}(a_{i_2}), \dots, \delta^{l_k}(a_{i_k})\}$ یا یک است. δ^0 را نگاشت همانی در نظر می‌گیریم. چون $(a_iR)^{m_i} = 0$. بنابراین

$$a_0{}^{j_1}Ra_0{}^{j_2} \dots Ra_0{}^{j_v}R = \overbrace{a_0a_0 \dots a_0}^{j_1} R \dots R \overbrace{a_0 \dots a_0}^{j_v} R = 0$$

بنابه گزاره ۲ داریم

$$\left(\delta^{s_1}(a_0)\right)^{j_1} R\left(\delta^{s_2}(a_0)\right)^{j_2} \dots R\left(\delta^{s_v}(a_0)\right)^{j_v} R = 0$$

و در نتیجه داریم:

$$\left(\delta^{s_1}(a_0)\right)^{j_1} b_2\left(\delta^{s_2}(a_0)\right)^{j_2} \ldots b_v\left(\delta^{s_v}(a_0)\right)^{j_v} b_{v+1}=0$$

جاییکه $a_0 b_q, a_0, a_0 b_q \in a_0 R(q=1,2,\ldots,v+1)$. در نتیجه

$$b_1\left(\delta^{s_1}(a_0)\right)^{j_1} b_2\left(\delta^{s_2}(a_0)\right)^{j_2} \ldots\ b_v\left(\delta^{s_v}(a_0)\right)^{j_v} b_{v+1}=0.$$

لذا $a_{i_1}\delta^{t_1}\left(a_{i_2}\right)\ldots\delta^{t_k}\left(a_{i_k}\right)=0$.

اگر تعداد a_iهای ظاهر شده در $a_{i_1}\delta^{t_1}\left(a_{i_2}\right)\ldots\delta^{t_k}\left(a_{i_k}\right)$ بیشتر از m_i باشد، با استدلالی مشابه داریم $a_{i_1}\delta^{t_1}\left(a_{i_2}\right)\ldots\delta^{t_k}\left(a_{i_k}\right)=0$. بنابراین هر تک جمله‌ای ظاهر شده در $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)^k$ صفر است. لذا $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x,\delta]$ عنصری پوچ‌توان است.

حال فرض کنیم $f(x)\in nil(R[x,\delta])$، آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد به طوری‌که $f(x)^k=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)^k=0$. پس

$$0=\left(f(x)\right)^k = \text{جملات با درجه کمتر} + {a_n}^{nk}x^{nk}$$

بنابراین ${a_n}^{nk}=0$ و در نتیجه $a_n\in nil(R)$.

حال با استفاده از لم ۷ در بخش ۲ نتیجه می شود $\delta^j\,(a_n)\in nil(R)$ برای هر $j\le 0$. حال فرض کنید

$$Q=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

در این صورت

$$0=\left(f(x)\right)^k=(Q+a_nx^n)^k=(Q+a_nx^n)(Q+a_nx^n)\cdots(Q+a_nx^n)=$$
$$(Q^2+Qa_nx^n+a_nx^nQ+a_nx^na_nx^n)(Q+a_nx^n)\cdots(Q+a_nx^n)=Q^k+\Delta.$$

که Δ عضوی از $R[x,\delta]$ است که ضرایب آن دارای a_n یا $\delta^j\,(a_n)$ است. چون $nil(R)$ ایده‌آلی از R می‌باشد لذا Δ عضوی از $nil(R)[x,\delta]$ است. بنابراین $Q^k\in nil(R[x,\delta])$ و در نتیجه مشابه روند بالا نتیجه می شود که $a_{n-1}\in nil(R)$. با ادامه این فرایند نتیجه می‌شود برای هر $0\le i\le n$، $a_i\in nil(R)$.■

قضیه۴. فرض کنیم حلقهٔ R، پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نرم جابجایی باشد.

(۱) اگر $ab\in nil(R)$ آنگاه $a\delta^j\,(b)\in nil(R)$ برای هر $0\le j$.

(۲) اگر $ab\in nil(R)$ آنگاه $\delta^i(a)b\in nil(R)$ برای هر $0\le i$.

(۳) اگر $abc\in nil(R)$ آنگاه $a\delta^i(b)\delta^j\,(c)\in nil(R)$ برای هر $0\le j,i$.

برهان:

(۱): فرض کنید $ab\in nil(R)$ آنگاه با در نظر گرفتن $f=b,\ \ g=ax$ داریم $fg\in nil(R[x,\delta])$ و بنابراین

$gf = a\delta(b) + abx \in nil(R[x,\delta])$. بنا به لم ۳، $nil(R[x,\delta]) = nil(R)[x,\delta]$ لذا $a\delta(b), abx \in$ $nil(R)$. حال فرض کنید $f = \delta(b),\ \ g = ax$. آنگاه داریم $fg \in nil(R[x,\delta])$ و بنابراین $gf =$ $a\delta^2(b) + a\delta(b)x \in nil(R[x;\alpha,\delta])$ لذا $a\delta^2(b) \in nil(R)$. با ادامه این روند داریم $a\delta^j(b) \in$ $nil(R)$ برای هر $0 \le j$.

(۲) فرض کنید $ab \in nil(R)$ آنگاه بنا به لم ۷ بخش ۲ داریم

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \in nil(R)$$

چون $nil(R)$ ایده الی از حلقه R است و بنا به (۱)، $a\delta^j(b) \in nil(R)$ برای هر $0 \le j$، لذا $\delta(a)b \in nil(R)$.

دوباره با استفاده از بند (۱)، داریم $\delta(a)\delta(b) \in nil(R)$. بنا به لم ۷ بخش ۲ داریم:

$$\delta(\delta(a)b) = \delta^2(a)b + \delta(a)\delta(b) \in nil(R)$$

چون $nil(R)$ ایده الی از حلقه R است و $\delta(a)\delta(b) \in nil(R)$ نتیجه می شود $\delta^2(a)b \in nil(R)$. با ادامه این روند برای هر $i \ge 0$ داریم $\delta^i(a)b \in nil(R)$.

(۳) فرض کنید $abc \in nil(R)$ آنگاه بنا به بند (۱) داریم $ab\delta^j(c) \in nil(R)$ و لذا $\delta^j(c)ab \in nil(R)$ برای هر $0 \le j$. با استفاده از بند (۱) داریم $\delta^j(c)a\delta^i(b) \in nil(R)$ برای هر $0 \le i, j$. لذا $a\delta^i(b)\delta^j(c) \in$ $nil(R)$ برای هر $0 \le i, j$. ■

لم ۵. فرض کنیم حلقه R پوچ δ-صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$، $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ و $h(x) = \sum_{k=0}^{t} c_k x^k$ عناصری از $R[x,\delta]$ باشند آن‌گاه موارد زیر برقرارند:

(۱) $f(x)g(x) \in nil(R[x,\delta])$ اگر و تنها اگر $a_i b_j \in nil(R)$ برای هر $0 \le i \le m$ و $0 \le j \le n$.

(۲) $f(x)g(x)c \in nil(R[x,\delta])$ اگر و تنها اگر $a_i b_j c \in nil(R)$ برای هر $0 \le i \le m$، $0 \le j \le n$ و $c \in R$.

(۳) $f(x)g(x)h(x) \in nil(R[x,\delta])$ اگر و تنها اگر $a_i b_j c_k \in nil(R)$ برای هر $0 \le i \le m$، $0 \le j \le n$ و $0 \le k \le t$.

برهان: (۱) ($\Leftarrow$) فرض کنید $f(x)g(x) \in nil(R[x,\delta])$. آنگاه

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum\nolimits_{s+t=k}\left(\sum_{i=s}^{m}\binom{i}{s} a_i \delta^{i-s}(b_t)\right)\right)x^k$$

جایی که $0 \le s \le m$ و $0 \le t \le n$. آنگاه با استفاده از لم ۳ داریم:

(۱) $$\Delta_{m+n} = a_m b_n \in nil(R)$$

(۲) $$\Delta_{m+n-1} = a_m b_{n-1} + \sum_{i=m-1}^{m}\binom{i}{m-1} a_i \delta^{i-m+1}(b_n) \in nil(R)$$

$$\Delta_{m+n-2}=\sum_{i=m-2}^{m}\binom{i}{m-2}a_i\delta^{i-m+2}(b_n)=\sum_{i=m-1}^{m}\binom{i}{m-1}a_i\delta^{i-m+1}(b_{n-1})+a_mb_{n-2}\in nil(R) \quad (۳)$$

$\vdots$

$$\Delta_k=\sum_{s+t=k}\left(\sum_{i=s}^{m}\binom{i}{s}a_i\delta^{i-s}(b_t)\right)\in nil(R) \qquad (۴)$$

از رابطه (۱) داریم $a_mb_n\in nil(R)$ در نتیجه $b_na_m\in nil(R)$. حال نشان می‌دهیم برای هر $0\le i\le m$، $a_ib_n\in nil(R)$. اگر رابطه (۲) را از سمت چپ در b_n ضرب کنیم، آنگاه

$$a_{m-1}b_n=b_n\Delta_{m+n-1}-\left(b_na_mb_{n-1}+mb_na_m\delta(b_n)\right)\in nil(R)$$

چون $nil(R)$ ایده‌آل است، $b_na_{m-1}b_n\in nil(R)$ و لذا $b_na_{m-1}\in nil(R)$ و $a_{m-1}b_n\in nil(R)$. اگر رابطه (۳) را از سمت چپ در b_n ضرب کنیم داریم:

$$\begin{aligned}b_na_{m-2}b_n&=b_n\Delta_{m+n-2}-\binom{m-1}{m-2}b_na_{m-1}\delta(b_n)-\binom{m}{m-2}b_na_m\delta^2(b_n)\\&\quad-b_na_{m-1}b_{n-1}-\\&\quad\binom{m}{m-1}b_na_m\delta(b_{n-1})-b_na_mb_{n-2}\\&=b_n\Delta_{m+n-2}-\binom{m-1}{m-2}(b_na_{m-1})\delta(b_n)-\\&\quad\binom{m}{m-2}(b_na_m)\delta^2(b_n)-(b_na_{m-1})b_{n-1}-\binom{m}{m-1}(b_na_m)\delta\\&\quad-(b_na_m)b_{n-2}\\&\quad\in nil(R)\end{aligned}$$

چون $nil(R)$ یک ایده‌آل از R اســت بنابراین $a_{m-2}b_n\in nil(R)$ و $b_na_{m-2}\in nil(R)$. با ادامه این روند نتیجه می شود برای هر $0\le i\le m$، $a_ib_n\in nil(R)$. با ا ستفادهٔ از ق ضیه ۴، $a_i\delta^s(b_n)\in nil(R)$ برای هر $0\le s$ و $0\le i\le m$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}&(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)(b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})\\&=\sum_{k=0}^{m+n-1}\left(\sum_{s+t=k}\left(\sum_{i=s}^{m}\binom{i}{s}a_i\delta^{i-s}(b_t)\right)\right)x^k=\\&\Delta_0+\Delta_1x+\cdots+\Delta_{m+n-1}x^{m+n-1}\in nil(R[x,\delta])\end{aligned}$$

مشـــا به روش بالا داریم $a_ib_{n-1}\in nil(R)$ با ادا مه این رو ند، داریم: $a_ib_j\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$.

($\rightarrow$) فرض کنید $a_ib_j\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$. آنگاه بنا بر قضـــیه ۴، داریم $a_i\delta^t(b_j)\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$ و $0\le t$. چون $nil(R)$ ایده آلی از حلقه R است داریم:

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum\nolimits_{s+t=k}\left(\sum_{i=s}^{m}\binom{i}{s}a_i\delta^{i-s}(b_t)\right)\right)x^k\in nil(R)[x,\delta]$$

چون $nil(R)[x,\delta]=nil(R[x,\delta])$ نتیجه می شود $f(x)g(x)\in nil(R[x,\delta])$.

(۲) $(\leftarrow)$ فرض کنید $f(x)g(x)c\in nil(R[x,\delta])$، آنگاه $cf(x)g(x)\in nilR[x,\delta])$. با اســتفاده از بند (۱) داریم $ca_ib_j\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$. لذا $a_ib_jc\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$.

$(\rightarrow)$ حال فرض کنید $a_ib_jc\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$، آنگاه برای $ca_ib_j\in nil(R)$ هر $0\le i\le m$ و $0\le j\le n$ و $0\le t$. بنا به بند (۱) داریم $cf(x)g(x)\in nil(R[x,\delta])$ و در نتیجه $f(x)g(x)c\in nil(R[x,\delta])$.

(۳) با استفاده از بند های (۱) و (۲) و با روند مشابه نتیجه می شود. ■

لم ۶. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. آن‌گاه برای هر زیرمجموعه $U\subseteq R$، داریم $N_{[x,\delta]}(U[x,\delta])=N_R(U)[x,\delta]$.

برهان: به وضوح داریم $N_R(U)[x,\delta]\subseteq N_{[x,\delta]}(U[x,\delta])$. بنا به لم ۵، برای هر چندجمله‌ای اُریب $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in N_{[x,\delta]}(U[x,\delta])$ و برای هر چندجمله‌ای دلخواه $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$، $f(x)g(x)\in nil(R[x,\delta])$ اگر وتنها اگر $a_ib_j\in nil(R)$ برای هر $0\le i\le n$ و $0\le j\le m$. بنابراین $a_i\in Nr_R(U)$ برای هر $0\le i\le n$. لذا $f(x)\in N_R(U)[x,\delta]$ که نتیجه می دهد $N_{[x,\delta]}(U[x,\delta])\subseteq N_R(U)[x,\delta]$. بنابراین $N_{[x,\delta]}(U[x,\delta])=N_R(U)[x,\delta]$. ■

تعریف ۷. اگر $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k+\cdots+m_nx^n\notin nil(R[x,\delta])$ و $Ndeg(m(x))=k$، آنگاه گوییم $m(x)$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است اگر برای هر $i\le k$، $N_R(m_i)=N_R(m_k)$.

گزاره ۸. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم‌جابجایی باشد. آنگاه برای هر چندجمله‌ای $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k+\cdots+m_nx^n\notin nil(R[x,\delta])$ عضوی مانند $r\in R$ وجود دارد بطوریکه $m(x)r$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است.

برهان: با برهان خلف روی $Ndeg$، فرض کنید برای هر چند جمله ای مانند $f(x)$ با شرط $Ndeg(f(x))<k$ عضوی مانند $r\in R$ وجود دارد بطوریکه $f(x)r$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است. حال فرض کنید چندجمله ای $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k+\cdots+m_nx^n\notin nil(R[x,\delta])$ با $Ndeg(m(x))=k\ge 1$

موجود است بطوریکه برای هر $r \in R$، $m(x)r$ یک چند جمله‌ای بطور ضعیف خوب نیست. لذا $m(x)$ نیز یک چندجمله ای بطور ضعیف خوب نیست. بنابراین عدد صحیح $i < k$ موجود است که $N_R(m_i) \nsubseteq N_R(m_k)$. بنابراین عضوی مانند $b \in R$ موجود است که $m_i b \notin nil(R)$ اما $m_k b \in nil(R)$. چون $Ndeg\big(m(x)\big) = k \geq 1$ لذا برای هر $j \geq k$ داریم $m_j \in nil(R)$. چون $nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه R است لذا برای هر $j \geq k$ داریم $m_j b \in nil(R)$. حال با استفاده از قضیه ۴، برای هر $j \geq k$ و برای هر $t \geq 1$ داریم $m_j \delta^t(b) \in nil(R)$. در نتیجه ضریب k-ام چند جمله‌ای $m(x)b$ یعنی $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} m_i \delta^{i-k}(b)$ متعلق به $nil(R)$ است. از طرفی برای هر $s \geq k+1$ ضریب s-ام چند جمله‌ای $m(x)b$ نیز متعلق به $nil(R)$ است. لذا $m(x)b$ دارای $Ndeg\big(m(x)\big)$ حداکثر $k-1$ است. چون $m_i b \notin nil(R)$ در نتیجه بنا به لم ۵، $m(x)b \notin nil(R[x,\delta])$. چون $m(x)b$ دارای $Ndeg\big(m(x)\big)$ حداکثر $k-1$ است طبق فرض عضوی مانند $c \in R$ وجود دارد بطوریکه $m(x)bc$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است و این تناقض دارد با این فرض که برای هر $r \in R$، $m(x)r$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب نیست. ■

گزاره ۹. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. آنگاه

$$NAss(R[x,\delta]) = \{P[x,\delta] \mid P \epsilon NAss(R)\}.$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $NAss(R[x,\delta]) \supseteq \{P[x,\delta] \mid P \epsilon NAss(R)\}$. برای این منظور فرض کنید $P \epsilon NAss(R)$ در اینصورت ایده آل راستی مانند I از R موجود است که $I \nsubseteq Nil(R)$ و $N_R(I) = P$. اگر نشان دهیم $N_{R[x,\delta]}(I[x,\delta]) = P[x,\delta]$ و $I[x,\delta]$ یک ایده‌آل $P[x,\delta]$-اول است، آنگاه اثبات تمام است.

بنا به لم ۶، داریم $N_{R[x,\delta]}(I[x,\delta]) = N_R(I)[x,\delta] = P[x,\delta]$. حال باید نشان دهیم $I[x,\delta]$ یک $P[x,\delta]$-اول است. چون I یک ایده‌آل P-اول است لذا $I \nsubseteq Nil(R)$ و در نتیجه بنا به لم ۳،

$$I[x,\delta] \nsubseteq Nil(R)[x,\delta] = Nil(R[x,\delta]).$$

برای اینکه $I[x,\delta]$ یک ایده‌آل $P[x,\delta]$-اول باشد کافیست نشان دهیم برای هر ایده‌آل راست $\Omega \nsubseteq Nil(R)[x,\delta]$ و $\Omega \subseteq I[x,\delta]$ داریم $N_{R[x,\delta]}\big(\Omega\big) = N_{R[x,\delta]}(I[x,\delta])$. بوضوح $N_{R[x,\delta]}\big(\Omega\big) \supseteq N_{R[x,\delta]}(I[x,\delta])$. برای اثبات $N_{R[x,\delta]}\big(\Omega\big) \subseteq N_{R[x,\delta]}(I[x,\delta])$، فرض کنید $h(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_k x^k \epsilon N_{R[x,\delta]}\big(\Omega\big)$. در اینصورت داریم $\Omega h(x) \subseteq Nil(R[x,\delta])$ و در نتیجه $C_\Omega h_i \in Nil(R[x,\delta])$، برای هر $0 \leq i \leq k$. لذا برای هر $0 \leq i \leq k$ داریم $J h_i \subseteq Nil(R)$ که J ایده آل راستی از R تولید شده توسط C_Ω است. چون $C_\Omega \subseteq I$ داریم $J \subseteq I$ و چون $\Omega \nsubseteq Nil(R)[x,\delta]$ بنا به لم ۳، $C_\Omega \nsubseteq Nil(R)$. چون I یک ایده‌آل R-اول است لذا $N_R\left(C_\Omega\right) = N_R(I) = P$ که نتیجه می‌دهد $h_i \epsilon P$ برای هر $0 \leq i \leq k$. لذا $h(x) \in P[x,\delta]$ که نتیجه می‌دهد $N_{R[x,\delta]}\big(\Omega\big) \subseteq N_{R[x,\delta]}(I[x,\delta])$. حال نشان می‌دهیم $NAss(R[x,\delta]) \subseteq \{P[x,\delta] \mid P \epsilon NAss(R)\}$. برای این منظور فرض کنید $Q \in NAss(R[x,\delta])$ در اینصورت ایده‌آل $R[x,\delta]$-اولی مانند T موجود است که $N_{R[x,\delta]}(\mathrm{T}) = Q$. فرض کنید $m(x)$ عضوی از T باشد بطوریکه

$$m(x) = m_0 + m_1x + \cdots + m_kx^k + \cdots + m_nx^n \notin nil(R[x,\delta]).$$

در اینصورت می‌توانیم فرض کنیم $m(x)$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب با $Ndeg\big(m(x)\big) = k$ است. فرض کنید $T_0 = m(x)R[x,\delta]$. آنگاه $T_0 \nsubseteq nil(R[x,\delta])$ زیرا $m(x) \notin nil(R[x,\delta])$. بنابراین

$$N_{R[x,\delta]}(T_0) = N_{R[x,\delta]}(\mathrm{T}) = Q$$

چون T ایده آل راست $R[x,\delta]$-اول است. به راحتی می‌توان نشان داد که $Q = UR[x,\delta]$ جایی که $N_R(m_kR) = U$.

حال ادعا می‌کنیم که m_kR یک ایده ال راست R-اول هست. بوضوح $m_kR \nsubseteq Nil(R)$ زیرا $m_k \notin nil(R)$. ایده آل راست $L \nsubseteq Nil(R)$ را در نظر می گیریم که $L \subseteq m_kR$. ادعا می کنیم که $N_R(m_kR) = N_R(L)$. به وضوح $N_R(m_kR) \subseteq N_R(L)$. برای اثبات $N_R(m_kR) \supseteq N_R(L)$ فرض کنید $W = \{m(x)r |\, r \in L\}$. آنگاه $m(x)WR[x,\delta] \subseteq R[x,\delta]$. چون $L \nsubseteq Nil(R)$ و $L \subseteq m_kR$، لذا وجود دارد $a \in R$ بطوریکه $m_ka \notin Nil(R)$ و $m_ka \in L$. لذا $m_km_ka \notin Nil(R)$ و در نتیجه $m(x)m_ka \notin Nil(R[x,\delta])$. بنابراین داریم $WR[x,\delta] \nsubseteq Nil(R)[x,\delta]$.

چون T ایده آل راست $R[x,\delta]$-اول است $N_{R[x,\delta]}(WR[x,\delta]) = N_{R[x,\delta]}(m(x)R[x,\delta]) = Q$. اگر $b \in N_R(L)$ آنگاه $lb \in Nil(R)$ برای هر $l \in L$ و بنابراین برای هر $f(x) \in R[x,\delta]$ داریم $m(x)lf(x)b \in Nil(R[x,\delta])$. لذا برای هر $\sum m(x)l_if_i(x)$ داریم $(\sum m(x)l_if_i(x))b \in Nil(R[x,\delta])$. بنابراین $b \in N_{R[x,\delta]}(WR[x,\delta]) = Q$. در نتیجه داریم $b \in N_R(m_kR)$. بنابراین $N_R(m_kR) \supseteq N_R(L)$. لذا $N_R(m_kR) = N_R(L)$ که نشان می دهد m_kR یک ایده ال راست R-اول است.■

نتیجه ۱۰. فرض کنید حلقه R کاهشی و δ مشتقی دلخواه روی حلقه R باشد. آنگاه $Ass(R[x,\delta]) = \{P[x,\delta] |\, P \epsilon Ass(R)\}$.

References

[1] S. Annin, Associated primes over Ore extension rings, Journal of Algebra and Its Applications, **3**(2) (2004), 193–205.

[2] J. Brewer and W. Heinzer, 3Associated primes of principal ideals, Duke Math. J. **41 (**1974), 1-7.

[3] P.M. Cohn, Reversible rings, Bull. London Math. Soc., **31** (1999), 641–648.

[4] C. Faith, Annihilator ideals, associated primes and Kash–McCoy commutative rings, Comm. Algebra., **19**(7) (1991), 1867–1892.

[5] C. Faith, Associated primes in commutative polynomial ring, Comm. Algebra., **28** (2000), 3903-3986.

[6] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, Acta Math. Hungar, **151** (2000), 215-226.

[7] H.K. Kim, N.K. Kim, M.S. Jeong, Y. Lee, S.J. Ryu, and D.E. Yeo, On conditions provided by nilradicals, J. Korean Math. Soc., **46**(5) (2009), 1027–1040.

[8] J. Krempa, Some examples of reduced, Algebra Coll. **3**(4) (1996), 289–300.
[9] R. Irving, Prime radical of ore extensions over commutative rings, J. Algebra, **56** (1979), 315-342.
[10] T.Y. Lam, A. Leroy and J. Mathczuk, Primeness, semiprimeness and prime radical of ore extensions, Comm. Algebra., **25** (1997), 2459-2506.
[11] R. Mohammadi, A. Moussavi, M. Zahiri, On weak zip skew polynomial rings, Asian- European J. Math., **5**(3) (2012), 1250039 (17 pages).
[12] L. Motais de Narbonne, Anneaux semi-commutatifs etunis riels anneaux dont les id aux principaux sont idempotents, Proceedings of the 106th National Congress of Learned Societies (Perpignan, 1981), Bib. Nat., Paris, 1982, pp. 71-73.
[13] A.R. Nasre-Isfahani and A. Moussavi, On weakly rigid rings, Glasgow J. Math., **51**(3) (2009), 425-440.
[14] L. Ouyang and J. Liu, Weak associated primes over differential polynomial rings, Rocky Mountain J. Math., **42**(5) (2012), 1583-1600
[15] M. Zahiri, A. Moussavi and R. Mohammadi, Associated primes and primary right ideals of generalized triangular matrix rings, Comm. Algebra, **47**(4) (2019), 1464-1477.