Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Subspace-Recurrent C_0-Semigroups and Their Properties

M. Moosapoor[1] ✉, M. Shahriari[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran. ✉ E-mail: m.mosapour@cfu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Maragheh University, Maragheh, Iran. E-mail: shahriari@maragheh.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 27 October 2021
Received in revised form: 16 May 2023
Accepted: 10 June 2023
Published online: 9 June 2024

Keywords:
Subspace-recurrent C_0-semigroup,
Recurrent C_0-semigroup,
Subspace-recurrent vector.

ABSTRACT

Introduction

One of the structures that is notable in dynamical systems are strongly continuous semigroups or C_0-semigroups. Concepts like hypercyclicity, transitivity and recurrency are defined for them. A C_0-semigroups $(T_t)_{t\geq 0}$ on a Banach space X is called recurrent if for any nonempty open set U of X there exists $t > 0$ such that $T_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Mathematicians in recent decade defined some newer concepts like subspace-hypercyclicity and subspace-transitivity for C_0-semigroups. We want to introduce the idea of subspace-recurrent for C_0-semigroups and by this, extend the concept of recurrent C_0-semigroups. Also, we are interested in investigating the properties of this type of C_0-semigroups.

Material and Methods

In this paper, we introduce subspace-recurrent C_0-semigroups and investigate their properties. Also, we state some sufficient conditions for subspace-recurrency by using open sets and dense sets.

Results and discussion

We prove that subspace-recurrent C_0-semigroups exist on both finite dimensional and infinite dimensional Banach spaces. We show that if a C_0-semigroup contains a subspace-recurrent operator, then it is a subspace-recurrent C_0-semigroup.

We define subspace-recurrent vectors. Suppose $(T_t)_{t\geq 0}$ is a C_0-semigroup on a Banach space X and M is a closed subspace of X. A vector $x \in M$ is called an M-recurrent vector for $(T_t)_{t\geq 0}$ if there exists an increasing sequence (t_k) of positive real numbers such that $T_{t_k}x \to x$. We state that if a C_0-semigroup has a dense set of subspace-recurrent vectors, it is subspace-recurrent.

We show that some conditions for a C_0-semigroup leads to its subspace-recurrency. For instance, suppose $(T_t)_{t\geq 0}$ is a C_0-semigroup on a Banach space X and M be a closed subspace of X and Y and Z be two dense subspaces of X such that $T(Y) \subseteq M$ and $T(Z) \subseteq M$ such that

$i)$ $T_t y \to 0$, when $y \in Y$ and $t \to \infty$,

$ii)$ $T_t z \to z$, when $z \in Z$ and $t \to \infty$.

Then $(T_t)_{t\geq 0}$ is subspace-recurrent with respect to M.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- The set of hypercyclic C_0-semigroups is a proper subset of the set of subspace-recurrent C_0-semigroups.
- The idea of subspace-recurrent for C_0-semigroups is an extension of the concept of recurrent C_0-semigroups.
- Subspace-recurrent C_0-semigroups exist on any infinite dimensional Banach spaces.

How to cite: Moosapoor, M. & Shahriari, M. (2024). Subspace-recurrent C_0-semigroups and their properties. *Mathematical Researches*, **10** (1), 119 – 130.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

C_0–نیم‌گروه‌های زیرفضا–بازگشتی و ویژگی‌های آن‌ها

منصوره موسی پور[1] ✉، محمد شهریاری[2]

۱. نویسنده مسئول، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. رایانامه: m.mosapour@cfu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران. رایانامه: shahriari@maragheh.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۳/۲۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۴/۲۵

چکیده

در این مقاله، C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این C_0-نیم‌گروه‌ها روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند. به علاوه، ثابت می‌کنیم که C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی را می‌توان روی فضاهای با بعد متناهی و نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی نیز یافت. همچنین ثابت می‌کنیم که هر C_0-نیم‌گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز است. بردارهای زیرفضا-بازگشتی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر C_0-نیم‌گروه که دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای زیرفضا-بازگشتی باشد، زیرفضا-بازگشتی است. همچنین چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0-نیم‌گروه‌ها ارائه می‌دهیم که بر پایه مجموعه‌های باز و مجموعه‌های چگال در یک زیرفضا بیان شده است.

واژه‌های کلیدی:
C_0-نیم‌گروه زیرفضا-بازگشتی،
C_0-نیم‌گروه بازگشتی،
بردار زیرفضا-بازگشتی.

استناد: موسی پور، منصوره و شهریاری، محمد (۱۴۰۳). C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی و ویژگی‌های آن‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۱)، ۱۱۹ – ۱۳۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمات و پیشنیازها

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. عملگر T روی فضای باناخ X را ترایا[1] می‌نامیم اگر برای هر دو مجموعه باز U و V در X، عدد طبیعی n یافت شود به قسمی که $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. عملگر T را آشوبناک[2] می‌گوییم اگر ترایا باشد و مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب[3] داشته باشد، یعنی بردارهایی همانند x که عدد طبیعی مانند m وجود داشته باشد که $T^m x = x$. همچنین عملگر T را بازگشتی[4] می‌نامیم اگر برای هر مجموعه باز U در X، برای n ای طبیعی داشته باشیم $T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ [۹].

ترایا بودن، آشوبناک بودن و بازگشتی بودن و غیره از ویژگی‌هایی هستند که در نظریه سیستم‌های دینامیکی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بررسی این ویژگی‌ها در دو دهه اخیر رشد سریعی به خود گرفته است. در منابع [۲] و [۹] می‌توان اطلاعات وسیعی درباره سیستم‌های دینامیکی و خواص آن‌ها به دست آورد.

یکی از ساختارهایی که بررسی خواص نامبرده در آن‌ها مورد توجه است، نیم‌گروه‌های به طور قوی پیوسته[5] یا C_0-نیم‌گروه‌ها هستند.

یک خانواده $(T_t)_{t\geq 0}$ از عملگرها روی فضای باناخ X را یک نیم‌گروه به طور قوی پیوسته یا C_0-نیم‌گروه می‌نامیم اگر $T_0 = I$، برای هر $t, s \geq 0$ داشته باشیم $T_t T_s = T_{t+s}$ و همچنین $\lim_{s\to t} T_s x = T_t x$ برای هر $x \in X$ و هر $t \geq 0$.

C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری[6] و ترایا توسط دِش و همکاران در[۷] معرفی شد. C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ را ابردوری می‌نامیم اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\overline{orb((x, (T_t)_{t\geq 0}))} = \overline{\{T_t x : t \geq 0\}} = X.$$

همچنین C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ را ترایا می‌نامیم هرگاه برای هر دو مجموعه باز U و V در X، بتوان $t > 0$ را طوری یافت که $T_t^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$. ثابت می‌شود که ترایا بودن و ابردوری بودن یک C_0-نیم‌گروه باهم معادل هستند [۹، ص ۱۸۶].
C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند[۴، قضیه۲. ۴] ولی هیچ C_0-نیم‌گروه ابردوری روی فضاهای باناخ با بعد متناهی وجود ندارد [۹، قضیه۷. ۱۵]. مقاله‌های [۶] و [۸] نیز حاوی مطالب جالبی درباره C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری و ترایا است.

C_0-نیم‌گروه ترایای $(T_t)_{t\geq 0}$ را آشوبناک می‌نامیم اگر دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در X باشد، یعنی مجموعه‌ای چگال از بردارهایی مانند x عضو X وجود داشته باشد به طوری که برای یک $t > 0$، $T_t x = x$. بر خلاف C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری، فضاهای باناخی با بعد نامتناهی وجود دارند که هیچ C_0-نیم‌گروه آشوبناکی را نمی‌توان روی آن‌ها ساخت [۴، قضیه ۳،۳]. در مراجع [۳] و [۱۲] می‌توانید نکاتی را در مورد ویژگی‌های بردارهای متناوب و جمع مستقیم[7] C_0-

[1] Transitive
[2] Chaotic
[3] Periodic
[4] Recurrent
[5] Strongly continuous semigroups
[6] Hypercyclic
[7] Direct sum

نیم‌گروه‌های آشوبناک مشاهده کنید.

در [۱۱] C_0-نیم‌گروه‌های بازگشتی تعریف شده است. C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ روی X را بازگشتی می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه باز U در X، $t > 0$ یافت شود به قسمی که $T_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$. در [۱۱] ثابت شده است که نیم‌گروه‌های بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی نیز وجود دارند. بنابراین C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری و آشوبناک، زیر مجموعه اکیدی از C_0-نیم‌گروه‌های بازگشتی هستند.

در [۱۴]، C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-ابردوری و زیرفضا ترایا ارائه و بررسی شده‌اند. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M یک زیرفضای بسته و ناصفر از آن باشد. C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ را زیرفضا-ابردوری نسبت به M می‌نامیم اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\overline{orb((x, (T_t)_{t\geq 0})) \cap M} = M.$$

همچنین C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ را M-ترایا می‌نامیم هرگاه برای هر دو مجموعه باز U و V در توپولوژی نسبی M، $t > 0$ یافت شود به قسمی که $T_t^{-1}(U) \cap V$ شامل مجموعه‌ای باز و ناتهی از M باشد. همان‌طور که در [۱۴، قضیه۲. ۱] ثابت شده است، زیرفضا-ترایا بودن یک C_0-نیم‌گروه، زیرفضا-ابردوری بودن را نتیجه می‌دهد. همچنین در [۱۳] هم می‌توانید چند شرط کافی برای زیرفضا-ابردوری بودن و زیرفضا-ترایا بودن C_0-نیم‌گروه‌ها، مشاهده کنید.

در این مقاله C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی[۸] را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی و نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی نیز وجود دارند. همچنین ثابت می‌کنیم که هر C_0-نیم‌گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز است. به علاوه، بردارهای زیرفضا-بازگشتی[۹] را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که هر C_0-نیم‌گروه که دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای زیرفضا-بازگشتی باشد، خود نیم‌گروهی زیرفضا-بازگشتی است. همچنین چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0-نیم‌گروه‌ها ارائه می‌شود که بر پایه مجموعه‌های باز و مجموعه‌های چگال در یک زیرفضا بیان شده است.

۱. نتایج اصلی

تعریف ۱،۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضای بسته‌ای از آن باشد. C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ روی X را زیرفضا-بازگشتی نسبت به M یا M-بازگشتی می‌نامیم اگر برای هر مجموعه باز U در توپولوژی نسبی M، $t > 0$ ای طوری یافت شود که $T_t^{-1}(U) \cap U$ ناتهی باشد.

مثال ۲،۱. اگر $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی بازگشتی روی فضای X باشد، آن‌گاه $(T_t \oplus I)_{t\geq 0}$ نسبت به زیرفضای $M := X \oplus \{0\}$ روی فضای $X \oplus X$، زیرفضا-بازگشتی است.

[۸] Subspace-recurrent

[۹] Subspace-recurrent vectors

عملگر T روی فضای باناخ X را نسبت به زیرفضای بسته M از X، M-بازگشتی می‌نامیم اگر برای هر مجموعه باز U در توپولوژی نسبی[۱۰] M، $n > 0$ یافت شود به قسمی که $T^{-n}(U) \cap U$ در توپولوژی نسبی M، باز و ناتهی باشد[۱۰]. قضیه بعدی بیان می‌کند که اگر C_0-نیم‌گروهی دارای عملگری زیرفضا-بازگشتی باشد، آن‌گاه C_0-نیم‌گروه، خود زیرفضا-بازگشتی است.

قضیه ۳,۱. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی بازگشتی روی فضای X و M زیرفضای بسته‌ای از X باشد. اگر $s > 0$ وجود داشته باشد که T_s عملگری M-بازگشتی باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t\geq 0}$ نیز M-بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. از آنجا که T_s زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است، بنابراین $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $T_s^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. با توجه به تعریف نیم‌گروه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $T_s^n = T_{ns}$. پس $T_{ns}^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$. در نتیجه تعریف M-بازگشتی بودن برای $(T_t)_{t\geq 0}$ نیز برقرار است.

در [۱۱]، بردار بازگشتی برای یک C_0-نیم‌گروه تعریف شده است. به همین ترتیب می‌توانیم بردار M-بازگشتی را برای زیرفضای بسته M از X تعریف کنیم.

تعریف ۴,۱. ([۱۱]) فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضایی بسته از آن باشد. بردار $x \in M$ را M-بازگشتی برای نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ می‌نامیم هرگاه دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت وجود داشته باشد به طوری که $T_{t_k}x \to x$.

مجموعه بردارهای M-بازگشتی $(T_t)_{t\geq 0}$ را با $Rec_M(T_t)_{t\geq 0}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵,۱. اگر $\overline{Rec_M(T_t)_{t\geq 0}} = \mathrm{M}$، آن‌گاه $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی M-بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. چون $Rec_M(T_t)_{t\geq 0}$ در M چگال است پس x وجود دارد به قسمی که

$$x \in U \cap \ Rec_M(T_t)_{t\geq 0}. \qquad (۱)$$

بنابراین دنباله صعودی (t_k) را می‌توان یافت به قسمی که $T_{t_k}x \to x$. در نتیجه عدد k_0 وجود دارد به قسمی که $T_{t_{k_0}}x \in U$. پس

$$x \in T_{t_{k_0}}^{-1}U. \qquad (۲)$$

حال از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $x \in U \cap T_{t_{k_0}}^{-1}U$.

نقطه x را یک نقطه متناوب برای C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ می‌نامیم اگر $t_0 > 0$ یافت شود به قسمی که $T_{t_0}x = x$.

[10] Relative topology

در لم بعد نشان می‌دهیم که هر نقطه متناوب از یک C_0-نیم‌گروه، در صورتی که عضو زیرفضای بسته M باشد، یک بردار M-بازگشتی است.

لم ۶،۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضای بسته‌ای از آن باشد. هر نقطه $x \in M$ که نقطه‌ای متناوب از C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ باشد، یک نقطه M-بازگشتی برای آن است.

برهان. فرض کنیم $x \in M$ نقطه‌ای متناوب برای C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ باشد. بنابراین $t_0 > 0$ ای یافت می‌شود که $T_{t_0}x = x$. با توجه به ویژگی‌های نیم‌گروه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم،

$$T_{nt_0}x = T_{t_0}^n x = x.$$

بنابراین $T_{nt_0}x \to x$. در نتیجه کافی است دنباله (nt_0) را دنباله صعودی مورد نظر انتخاب کنیم.

با توجه به لم ۶،۱ و قضیه ۵،۱، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۷،۱. اگر C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ روی فضای باناخ X، در زیرفضای بسته M از X مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب داشته باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t\geq 0}$، M-بازگشتی است.

مثال ۸،۱. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی باشد که برای هر $t \geq 0$، $T_t: S \to S$ و با ضابطه $T_t(x) = e^{it}x$ تعریف شده است که در آن $S = \{x \in X: |x| = 1\}$. در مثال۱ از [۱۱] نشان داده شده است که اگر $t_0 = \frac{2}{N}\pi$ (N یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱) را در نظر بگیریم، آن‌گاه T_{t_0} و در نتیجه $(T_t)_{t\geq 0}$، مجموعه‌ای چگال از بردارهای بازگشتی در S دارد. حال اگر $x \in Rec(T_t)_{t\geq 0}$ باشد، آن‌گاه

$$x \oplus 0 \in Rec(T_t \oplus I)_{t\geq 0}.$$

زیرا اگر $T_{t_k}x \to x$، آن‌گاه

$$(T_{t_k} \oplus I)(x \oplus 0) \to x \oplus 0.$$

بنابراین اگر زیرفضای $M \coloneqq S \oplus \{0\}$ را در نظر بگیریم، مجموعه $(T_t \oplus I)_{t\geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از بردارهای M-بازگشتی در M دارد. پس بنا به نتیجه۷، مجموعه $(T_t \oplus I)_{t\geq 0}$ یک نیم‌گروه M-بازگشتی روی فضای با بعد متناهی $S \oplus S$ و نسبت به زیرفضای با بعد متناهی $M \coloneqq S \oplus \{0\}$ است.

بنابراین می‌توان قضیه بعدی را بیان کرد.

قضیه ۹،۱. C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی و نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی هم قابل ساخت هستند.

برهان. در مثال ۸،۱، C_0-نیم‌گروهی زیرفضا-بازگشتی را روی فضایی با بعد متناهی، نسبت به زیرفضایی با بعد متناهی ساختیم. پس C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی، نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی هم قابل ساخت هستند.

در ادامه ثابت می‌کنیم که هر C_0-نیم‌گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز است.

قضیه ۱۰،۱. هر C_0-نیم‌گروه بازگشتی $(T_t)_{t\geq 0}$ روی فضای باناخ با بعد نامتناهی X، زیرفضا-بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$ یک C_0-نیم‌گروه بازگشتی روی X باشد. بنا به قضیه۳ از[۱۱]، $\overline{Rec(T_t)_{t\geq 0}} = \mathrm{X}$. از طرفی بنا به قضیه ۱،۲ از [۱]، زیرفضای بسته و نابدیهی M از X وجود دارد که $\overline{Rec(T_t)_{t\geq 0} \cap M} = \mathrm{M}$. پس $(T_t)_{t\geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از بردارهای بازگشتی در M دارد. درنتیجه بنا به قضیه ۵،۱، $(T_t)_{t\geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است. □

به کمک قضیه ۱۰،۱ می‌توانیم C_0-نیم‌گروه‌های متنوعی همانند مثال بعد بسازیم.

مثال ۱۱،۱. در مثال۲ از [۱۱] می‌بینیم که $(T_t)_{t\geq 0}$ که برای هر $t \geq 0$ با ضابطه $T_t f(x) = e^{\beta t} f(x+t)$ تعریف شده است، C_0-نیم‌گروهی بازگشتی روی فضای $C_0(\mathbb{R}^+)$ است. در نتیجه بنا به قضیه ۱۰، $(T_t)_{t\geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی است.

با استفاده از قضیه ۱۰،۱، نتیجه بعدی را می‌توان به دست آورد.

قضیه ۱۲،۱. C_0-نیم‌گروه‌های بازگشتی روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند.

برهان. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$ یک فضای باناخ با بعد نامتناهی باشد. همان‌طور که در مقدمه بیان شد، C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری و در نتیجه C_0-نیم‌گروه‌های ترایا روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند. اما بنا به تعریف C_0-نیم‌گروه ترایا به آسانی دیده می‌شود که هر C_0-نیم‌گروه ترایا، بازگشتی نیز است. اکنون بنا به قضیه ۱۰،۱، $(T_t)_{t\geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نیز است. پس C_0-نیم‌گروه‌های بازگشتی روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند.

۲. چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن

در این بخش، ابتدا با استفاده از نقطه‌های متناوب، یک شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲،۱. هر C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ روی فضای با بعد نامتناهی X که مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب داشته باشد، زیرفضا-بازگشتی است. به ویژه، C_0-نیم‌گروه‌های آشوبناک، زیرفضا-بازگشتی هستند.

برهان. فرض کنیم $Per(T_t)_{t\geq 0}$ نشان دهنده نقطه‌های متناوب $(T_t)_{t\geq 0}$ باشد و $\overline{Per(T_t)_{t\geq 0}} = X$. بنا به قضیه ۱،۲ از [۱]، زیرفضای بسته و نابدیهی M از X وجود دارد که $\overline{Per(T_t)_{t\geq 0} \cap M} = \mathrm{M}$. پس $(T_t)_{t\geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب در M دارد. از این رو، بنا به نتیجه۷، $(T_t)_{t\geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است.

حال اگر C_0-نیم‌گروه $(T_t)_{t\geq 0}$ آشوبناک باشد، مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب دارد و در نتیجه زیرفضا-بازگشتی است.

در ادامه با سه شرط کافی دیگر برای زیرفضا-بازگشتی بودن آشنا می‌شویم که مبنای آن‌ها مجموعه‌های چگال و مجموعه‌های باز است.

قضیه ۲,۲. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی روی فضای باناخ X و M زیرفضای بسته‌ای از X باشد. فرض کنیم Y و Z دو زیرفضای چگال از M باشند به قسمی که $T(Y) \subseteq M$ و $T(Z) \subseteq M$ و

۱) برای هر $y \in Y$، $T_t y \to 0$ وقتی $t \to \infty$.

۲) برای هر $z \in Z$، $T_t z \to z$ وقتی $t \to \infty$.

در این صورت $(T_t)_{t\geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. چون Y و Z در M چگال هستند در نتیجه y و z یافت می‌شوند به قسمی که

$$y \in U \cap Y \text{ و } z \in U \cap Z. \qquad (۳)$$

w_t را به صورت $w_t = z + T_t y$ در نظر می‌گیریم. از فرضیات قضیه و رابطه (۳) نتیجه می‌شود که

$$w_t \to z, \ \mathrm{t} \to \infty \quad \text{وقتی} \qquad (۴)$$

از طرفی

$$T_t(w_t) = T_t z + T_t(T_t y) = T_t z + T_{2t} y.$$

توجه می‌کنیم که وقتی $t \to \infty$، آن‌گاه $2t \to \infty$. بنابراین از (۴) داریم، $T_{2t} y \to 0$ و بنابراین

$$T_t(w_t) \to z. \qquad (۵)$$

حال از (۴) و (۵) می‌توانیم $t > 0$ را به قسمی بیابیم که $w_t \in T_t^{-1}(U) \cap U$. پس $(T_t)_{t\geq 0}$ نسبت به M زیرفضا-بازگشتی است.

قضیه ۳,۲. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی روی X و M زیرفضای بسته‌ای از X باشد. فرض کنیم زیرفضای چگال Y از M وجود داشته باشد به قسمی که $T(Y) \subseteq M$ و

۱) برای هر $y \in Y$، $T_t y \to 0$ وقتی $t \to 0$.

۲) برای هر $y \in Y$، زیرفضای چگال X_y از M وجود داشته باشد که برای هر $x \in X_y$، $T_t x \to x$ وقتی $t \to 0$.

در این صورت $(T_t)_{t\geq 0}$، M-بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. از آنجا که Y در M چگال است پس $U \cap Y$ ناتهی است. فرض کنیم $y \in U \cap Y$. بنا به قسمت (۲) فرض، متناظر با y یافت شده، زیرفضای چگال X_y از M با شرایط داده شده وجود دارد. حال چون X_y در M چگال است پس $U \cap X_y$ ناتهی است. فرض کنیم $x \in U \cap X_y$. بنا به قسمت (۲) فرض وقتی $t \to 0$ داریم،

$$T_t x \to x. \qquad (۶)$$

متغیر $u_t = T_t y$ را در نظر می‌گیریم، حال

$$x + u_t \to x. \qquad (۷)$$

از طرفی

$$T_t(x + u_t) = T_t(x) + T_t(u_t). \qquad (۸)$$

اما بنا به خواص نیم‌گروه داریم:

$$T_t(u_t) = T_t(T_t y) = T_{2t} y.$$

هرگاه $t \to 0$، آن‌گاه $2t \to 0$. در نتیجه

$$T_{2t} y \to 0. \qquad (۹)$$

بنابراین از (۶)، (۸) و (۹) نتیجه می‌شود که

$$T_t(x + u_t) \to x. \qquad (۱۰)$$

همچنین از (۷) و (۱۰) نتیجه می‌شود که برای t به اندازه کافی بزرگ داریم،

$$x + u_t \in T^{-1}(U) \cap U.$$

پس $(T_t)_{t\geq 0}$ نیم‌گروهی M-بازگشتی است.

قضیه ۴٫۲. فرض کنیم $(T_t)_{t\geq 0}$، C_0-نیم‌گروهی روی X و M زیرفضایی بسته از X باشد. اگر برای هر مجموعه باز U در توپولوژی نسبی M و هر همسایگی W از صفر در توپولوژی نسبی M، $t > 0$ وجود داشته باشد که $T_t(U) \cap W$ و $T_t(W) \cap U$ ناتهی باشند، آن‌گاه $(T_t)_{t\geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است.

برهان. بنا به لم۲. ۳۶ از [۹] مجموعه باز U_1 و همسایگی W_1 از صفر در M وجود دارد که

$$U_1 + W_1 \subseteq U. \qquad (۱۱)$$

بنا به فرض $t > 0$ وجود دارد که

$$T_t(U_1) \cap W_1 \neq \emptyset \quad \text{و} \quad T_t(W_1) \cap U_1 \neq \emptyset. \qquad (۱۲)$$

بنا به (۱۲)، $x \in U_1$ و $y \in W_1$ وجود دارد که $T_t x \in W_1$ و $T_t y \in U_1$. با توجه به (۱۱)

$$y + x \in U_1 + W_1 \subseteq U \qquad (۱۳)$$

و

$$T_t(y + x) = T_t(y) + T_t(x) \in U_1 + W_1 \subseteq U \qquad (۱۴)$$

(۶) و (۷) نشان می‌دهند که $T_t^{-1}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U} \neq \emptyset$ و این برهان را تمام می‌کند.

۳. نتیجه گیری

یکی از ساختارهای مورد توجه در ریاضیات C_0-نیم‌گروه‌ها هستند. در این مقاله، C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی را تعریف کردیم. مجموعه C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری، زیرمجموعه اکیدی از مجموعه C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی هستند چون همان‌طور که در قضیه ۹,۱ دیدیم، C_0-نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای باناخ با بعد متناهی هم وجود دارند در صورتی که C_0-نیم‌گروه‌های ابردوری فقط روی فضاهای با بعد نامتناهی وجود دارند[۹].

در قضیه ۳,۱ دیدیم که اگر T_{t_0} برای یک $t_0 > 0$ زیرفضا-بازگشتی باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t\geq 0}$ نیز زیرفضا-بازگشتی است. اکنون این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان از زیرفضا-بازگشتی بودن $(T_t)_{t\geq 0}$، زیرفضا-بازگشتی بودن هرکدام از T_t ها را نتیجه گرفت؟

در قضیه ۱۰,۱ دیدیم که روی فضاهای باناخ با بعد نامتناهی هر C_0-نیم‌گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز هست. حال این سوال به ذهن می‌رسد که آیا این نتیجه گیری برای فضاهای باناخ با بعد متناهی نیز برقرار است؟

در این مقاله، چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0-نیم‌گروه‌ها آورده شده است که بر پایه بردارهای زیرفضا-بازگشتی، زیرمجموعه‌های باز و زیرمجموعه‌های چگال از فضا بیان شده است. بنابراین پرسشی که به ذهن می‌رسد این است که از چه ایده‌های دیگری می توان برای بیان شرایط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0-نیم گروه‌ها استفاده کرد؟

References

1. N. Bamerni, V. Kadets and A. Kilicman, Hypercyclic operators are subspace-hypercyclic, J. Math. Anal. Appl., **435** (2016), 1812-1815.
2. F. Bayart and E. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.
3. T. Bermudez, A. Bonilla and H. Emamirad, Chaotic Tensor Product Semigroups, Semigr. Forum, **71** (2005), 252-264.
4. T. Bermudez, A. Bonilla and A. Martinon, On the existence of chaotic and hypercyclic semigroups

on Banach spaces, Proc. Am. Math. Soc., **131(8)** (2002), 2435-2441.

5. G. Costakis and A. Peris, Hypercyclic semigroups and somewhere dense orbits, C. R. Math., **335(11)** (2002), 895-898.
6. W. Desch and W. Schappacher, On products of hypercyclic Semigroups, Semigr. Forum, **71(2)** (2005), 301-311.
7. W. Desch, W. Schappacher and G. F. Webb, Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators, Ergod. Theory Dyn. Syst., **17** (1997), 793-819.
8. S. El Mourchid, On a hypercylicity criterion for strongly continuous semigroups, Discrete Contin. Dyn. Syst. A, **13(2)** (2005), 271-275.
9. K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, Linear Chaos, Springer-Verlag, London, UK, 2011.
10. M. Moosapoor, On subspace-recurrent operators, Tamkang J. Math., **53(4)** (2022), 363-371.
11. M. Moosapoor, On the recurrent C_0-semigroups, their existence, and some criteria, J. Math., (2021), Article ID 6756908, 7 pages.
12. G. A. Munoz-Fernandez, J. B. Seoane-Sepulveda and A. Weber, The set of periods of chaotic operators and semigroups, RACSAM, **105** (2011), 397-402.
13. A. Tajmouati, A. El Bakkali and A. Toukmati, The M-hypercyclicity criterion of C_0-semigroups, Int. J. Pure Appl. Math., **114 (2)** (2017), 241-247.
14. A. Tajmouati, A. El Bakkali and A. Toukmati, On some properties of M-hypercyclic C_0-semigroup, Ital. J. Pure Appl. Math., **35** (2015), 351-360.