




Subspace-Recurrent C_0 -Semigroups and Their Properties

M. Moosapoor¹  , M. Shahriari² 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran.  E-mail: m.mosapour@cfu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Maragheh University, Maragheh, Iran. E-mail: shahriari@maragheh.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 27 October 2021
Received in revised form:
16 May 2023
Accepted: 10 June 2023
Published online:
9 June 2024

Keywords:

Subspace-recurrent C_0 -
semigroup,
Recurrent C_0 -semigroup,
Subspace-recurrent vector.

ABSTRACT

Introduction

One of the structures that is notable in dynamical systems are strongly continuous semigroups or C_0 -semigroups. Concepts like hypercyclicity, transitivity and recurrency are defined for them. A C_0 -semigroups $(T_t)_{t \geq 0}$ on a Banach space X is called recurrent if for any nonempty open set U of X there exists $t > 0$ such that $T_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Mathematicians in recent decade defined some newer concepts like subspace-hypercyclicity and subspace-transitivity for C_0 -semigroups. We want to introduce the idea of subspace-recurrent for C_0 -semigroups and by this, extend the concept of recurrent C_0 -semigroups. Also, we are interested in investigating the properties of this type of C_0 -semigroups.

Material and Methods

In this paper, we introduce subspace-recurrent C_0 -semigroups and investigate their properties. Also, we state some sufficient conditions for subspace-recurrency by using open sets and dense sets.

Results and discussion

We prove that subspace-recurrent C_0 -semigroups exist on both finite dimensional and infinite dimensional Banach spaces. We show that if a C_0 -semigroup contains a subspace-recurrent operator, then it is a subspace-recurrent C_0 -semigroup.

We define subspace-recurrent vectors. Suppose $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and M is a closed subspace of X . A vector $x \in M$ is called an M -recurrent vector for $(T_t)_{t \geq 0}$ if there exists an increasing sequence (t_k) of positive real numbers such that $T_{t_k}x \rightarrow x$. We state that if a C_0 -semigroup has a dense set of subspace-recurrent vectors, it is subspace-recurrent.

We show that some conditions for a C_0 -semigroup leads to its subspace-recurrency. For instance, suppose $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and M be a closed subspace of X and Y and Z be two dense subspaces of X such that $T(Y) \subseteq M$ and $T(Z) \subseteq M$ such that

i) $T_t y \rightarrow 0$, when $y \in Y$ and $t \rightarrow \infty$,

ii) $T_t z \rightarrow z$, when $z \in Z$ and $t \rightarrow \infty$.

Then $(T_t)_{t \geq 0}$ is subspace-recurrent with respect to M .

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

-
-
- The set of hypercyclic C_0 -semigroups is a proper subset of the set of subspace-recurrent C_0 -semigroups.
 - The idea of subspace-recurrent for C_0 -semigroups is an extension of the concept of recurrent C_0 -semigroups.
 - Subspace-recurrent C_0 -semigroups exist on any infinite dimensional Banach spaces.

How to cite: Moosapoor, M. & Shahriari, M. (2024). Subspace-recurrent C_0 -semigroups and their properties. *Mathematical Researches*, **10** (1), 119 – 130.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

C_0 -نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی و ویژگی‌های آن‌ها

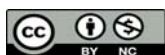
منصوره موسی پور^۱ ✉، محمد شهریاری^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. رایانامه: m.mosapour@cfu.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران. رایانامه: shahriari@maragheh.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله، C_0 -نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این C_0 -نیم‌گروه‌ها روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند. به علاوه، ثابت می‌کنیم که C_0 -نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی را می‌توان روی فضاهای با بعد متناهی و نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی نیز یافت. همچنین ثابت می‌کنیم که هر C_0 -نیم‌گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز است. بردارهای زیرفضا-بازگشتی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر C_0 -نیم‌گروه که دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای زیرفضا-بازگشتی باشد، زیرفضا-بازگشتی است. همچنین چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0 -نیم‌گروه‌ها ارائه می‌دهیم که بر پایه مجموعه‌های باز و مجموعه‌های چگال در یک زیرفضا بیان شده است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۲۰	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۵	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۳/۲۸	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۴/۲۵	
واژه‌های کلیدی:	
C_0 -نیم‌گروه زیرفضا-بازگشتی،	
C_0 -نیم‌گروه بازگشتی،	
بردار زیرفضا-بازگشتی.	

استناد: موسی پور، منصوره و شهریاری، محمد (۱۴۰۳). C_0 -نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی و ویژگی‌های آن‌ها. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰(۱)، ۱۱۹ - ۱۳۰.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

نیم گروه های آشوبناک مشاهده کنید.

در [۱۱] C_0 -نیم گروه های بازگشتی تعریف شده است. C_0 -نیم گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی X را بازگشتی می نامیم هر گاه برای هر مجموعه باز U در X ، $t > 0$ یافت شود به قسمی که $T_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ در [۱۱] ثابت شده است که نیم گروه های بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی نیز وجود دارند. بنابراین C_0 -نیم گروه های ابردوری و آشوبناک، زیر مجموعه اکیدی از C_0 -نیم گروه های بازگشتی هستند.

در [۱۴]، C_0 -نیم گروه های زیرفضا-ابردوری و زیرفضا تراپا ارائه و بررسی شده اند. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M یک زیرفضای بسته و ناصفر از آن باشد. C_0 -نیم گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ را زیرفضا-ابردوری نسبت به M می نامیم اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\overline{orb((x, (T_t)_{t \geq 0}))} \cap M = M.$$

همچنین C_0 -نیم گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ را M -تراپا می نامیم هر گاه برای هر دو مجموعه باز U و V در توپولوژی نسبی M ، $t > 0$ یافت شود به قسمی که $T_t^{-1}(U) \cap V$ شامل مجموعه ای باز و ناتهی از M باشد. همان طور که در [۱۴، قضیه ۲.۱] ثابت شده است، زیرفضا-تراپا بودن یک C_0 -نیم گروه، زیرفضا-ابردوری بودن را نتیجه می دهد. همچنین در [۱۳] هم می توانید چند شرط کافی برای زیرفضا-ابردوری بودن و زیرفضا-تراپا بودن C_0 -نیم گروه ها، مشاهده کنید.

در این مقاله C_0 -نیم گروه های زیرفضا-بازگشتی^۸ را تعریف می کنیم. نشان می دهیم که C_0 -نیم گروه های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی و نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی نیز وجود دارند. همچنین ثابت می کنیم که هر C_0 -نیم گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز است. به علاوه، بردارهای زیرفضا-بازگشتی^۹ را تعریف می کنیم و ثابت می کنیم که هر C_0 -نیم گروه که دارای مجموعه ای چگال از بردارهای زیرفضا-بازگشتی باشد، خود نیم گروهی زیرفضا-بازگشتی است. همچنین چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0 -نیم گروه ها ارائه می شود که بر پایه مجموعه های باز و مجموعه های چگال در یک زیرفضا بیان شده است.

۱. نتایج اصلی

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضای بسته ای از آن باشد. C_0 -نیم گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی X را زیرفضا-بازگشتی نسبت به M یا M -بازگشتی می نامیم اگر برای هر مجموعه باز U در توپولوژی نسبی M ، $t > 0$ ای طوری یافت شود که $T_t^{-1}(U) \cap U$ ناتهی باشد.

مثال ۲.۱. اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم گروهی بازگشتی روی فضای X باشد، آن گاه $(T_t \oplus I)_{t \geq 0}$ نسبت به زیرفضای $M := X \oplus \{0\}$ روی فضای $X \oplus X$ ، زیرفضا-بازگشتی است.

⁸ Subspace-recurrent

⁹ Subspace-recurrent vectors

عملگر T روی فضای باناخ X را نسبت به زیرفضای بسته M از M -بازگشتی می‌نامیم اگر برای هر مجموعه باز U در توپولوژی نسبی M ، $n > 0$ یافت شود به قسمی که $T^{-n}(U) \cap U$ در توپولوژی نسبی M ، باز و ناتهی باشد [۱۰]. قضیه بعدی بیان می‌کند که اگر C_0 -نیم‌گروهی دارای عملگری زیرفضا-بازگشتی باشد، آن‌گاه C_0 -نیم‌گروه، خود زیرفضا-بازگشتی است.

قضیه ۳،۱. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم‌گروهی بازگشتی روی فضای X و M زیرفضای بسته‌ای از X باشد. اگر $s > 0$ وجود داشته باشد که T_s عملگری M -بازگشتی باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ نیز M -بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. از آنجا که T_s زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است، بنابراین $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $T_s^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. با توجه به تعریف نیم‌گروه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $T_s^n = T_{ns}$ پس $T_{ns}^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ در نتیجه تعریف M -بازگشتی بودن برای $(T_t)_{t \geq 0}$ نیز برقرار است.

در [۱۱]، بردار بازگشتی برای یک C_0 -نیم‌گروه تعریف شده است. به همین ترتیب می‌توانیم بردار M -بازگشتی را برای زیرفضای بسته M از X تعریف کنیم.

تعریف ۴،۱. ([۱۱]) فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضایی بسته از آن باشد. بردار $x \in M$ را M -بازگشتی برای نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ می‌نامیم هرگاه دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت وجود داشته باشد به طوری که $T_{t_k}x \rightarrow x$ مجموعه بردارهای M -بازگشتی $(T_t)_{t \geq 0}$ را با $Rec_M(T_t)_{t \geq 0}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵،۱. اگر $Rec_M(T_t)_{t \geq 0} = M$ ، آن‌گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم‌گروهی M -بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. چون $Rec_M(T_t)_{t \geq 0}$ در M چگال است پس x وجود دارد به قسمی که

$$x \in U \cap Rec_M(T_t)_{t \geq 0}. \quad (1)$$

بنابراین دنباله صعودی (t_k) را می‌توان یافت به قسمی که $T_{t_k}x \rightarrow x$ در نتیجه عدد k_0 وجود دارد به قسمی که $T_{t_{k_0}}x \in U$ پس

$$x \in T_{t_{k_0}}^{-1}U. \quad (2)$$

حال از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $x \in U \cap T_{t_{k_0}}^{-1}U$

نقطه x را یک نقطه متناوب برای C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ می‌نامیم اگر $t_0 > 0$ یافت شود به قسمی که $T_{t_0}x = x$

¹⁰ Relative topology

در لم بعد نشان می‌دهیم که هر نقطه متناوب از یک C_0 -نیم‌گروه، در صورتی که عضو زیرفضای بسته M باشد، یک بردار M -بازگشتی است.

لم ۶،۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضای بسته‌ای از آن باشد. هر نقطه $x \in M$ که نقطه‌ای متناوب از C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ باشد، یک نقطه M -بازگشتی برای آن است.

برهان. فرض کنیم $x \in M$ نقطه‌ای متناوب برای C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ باشد. بنابراین $t_0 > 0$ ای یافت می‌شود که $T_{t_0}x = x$ با توجه به ویژگی‌های نیم‌گروه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم،

$$T_{nt_0}x = T_{t_0}^n x = x.$$

بنابراین $T_{nt_0}x \rightarrow x$ در نتیجه کافی است دنباله (nt_0) را دنباله صعودی مورد نظر انتخاب کنیم.

با توجه به لم ۶،۱ و قضیه ۵،۱، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۷،۱. اگر C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی فضای باناخ X ، در زیرفضای بسته M از X مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب داشته باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ ، M -بازگشتی است.

مثال ۸،۱. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم‌گروهی باشد که برای هر $t \geq 0$ ، $T_t: S \rightarrow S$ و با ضابطه $T_t(x) = e^{it}x$ تعریف شده است که در آن $S = \{x \in X: |x| = 1\}$. در مثال ۱ از [۱۱] نشان داده شده است که اگر $t_0 = \frac{2}{N}\pi$ (یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱) را در نظر بگیریم، آن‌گاه T_{t_0} و در نتیجه $(T_t)_{t \geq 0}$ ، مجموعه‌ای چگال از بردارهای بازگشتی در S دارد. حال اگر $x \in \text{Rec}(T_t)_{t \geq 0}$ باشد، آن‌گاه

$$x \oplus 0 \in \text{Rec}(T_t \oplus I)_{t \geq 0}.$$

زیرا اگر $T_{t_k}x \rightarrow x$ ، آن‌گاه

$$(T_{t_k} \oplus I)(x \oplus 0) \rightarrow x \oplus 0.$$

بنابراین اگر زیرفضای $M := S \oplus \{0\}$ را در نظر بگیریم، مجموعه $(T_t \oplus I)_{t \geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از بردارهای M -بازگشتی در M دارد. پس بنا به نتیجه ۷، مجموعه $(T_t \oplus I)_{t \geq 0}$ یک نیم‌گروه M -بازگشتی روی فضای با بعد متناهی $S \oplus S$ و نسبت به زیرفضای با بعد متناهی $M := S \oplus \{0\}$ است.

بنابراین می‌توان قضیه بعدی را بیان کرد.

قضیه ۹،۱. C_0 -نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای با بعد متناهی و نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی هم قابل ساخت هستند.

برهان. در مثال ۸،۱، C_0 -نیم‌گروهی زیرفضا-بازگشتی را روی فضایی با بعد متناهی، نسبت به زیرفضایی با بعد متناهی ساختم. پس C_0 -نیم‌گروه‌های زیرفضا-بازگشتی روی فضاها با بعد متناهی، نسبت به زیرفضاهای با بعد متناهی هم قابل ساخت هستند.

در ادامه ثابت می‌کنیم که هر C_0 -نیم‌گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز است.

قضیه ۱۰،۱. هر C_0 -نیم‌گروه بازگشتی $(T_t)_{t \geq 0}$ روی فضای باناخ با بعد نامتناهی X ، زیرفضا-بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C_0 -نیم‌گروه بازگشتی روی X باشد. بنا به قضیه ۳ از [۱۱]، $\overline{Rec(T_t)_{t \geq 0}} = X$ از طرفی بنا به قضیه ۱،۲ از [۱]، زیرفضای بسته و نابدیهی M از X وجود دارد که $\overline{Rec(T_t)_{t \geq 0}} \cap M = M$ پس $(T_t)_{t \geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از بردارهای بازگشتی در M دارد. در نتیجه بنا به قضیه ۵،۱، $(T_t)_{t \geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است. \square

به کمک قضیه ۱۰،۱ می‌توانیم C_0 -نیم‌گروه‌های متنوعی همانند مثال بعد بسازیم.

مثال ۱۱،۱. در مثال ۲ از [۱۱] می‌بینیم که $(T_t)_{t \geq 0}$ که برای هر $t \geq 0$ با ضابطه $T_t f(x) = e^{bt} f(x+t)$ تعریف شده است، C_0 -نیم‌گروهی بازگشتی روی فضای $C_0(\mathbb{R}^+)$ است. در نتیجه بنا به قضیه ۱۰،۱، $(T_t)_{t \geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی است. با استفاده از قضیه ۱۰،۱، نتیجه بعدی را می‌توان به دست آورد.

قضیه ۱۲،۱. C_0 -نیم‌گروه‌های بازگشتی روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند.

برهان. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک فضای باناخ با بعد نامتناهی باشد. همان‌طور که در مقدمه بیان شد، C_0 -نیم‌گروه‌های بردوری و در نتیجه C_0 -نیم‌گروه‌های تراپا روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند. اما بنا به تعریف C_0 -نیم‌گروه تراپا به آسانی دیده می‌شود که هر C_0 -نیم‌گروه تراپا، بازگشتی نیز است. اکنون بنا به قضیه ۱۰،۱، $(T_t)_{t \geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نیز است. پس C_0 -نیم‌گروه‌های بازگشتی روی هر فضای باناخ با بعد نامتناهی وجود دارند.

۲. چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن

در این بخش، ابتدا با استفاده از نقطه‌های متناوب، یک شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲،۱. هر C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی فضای با بعد نامتناهی X که مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب داشته باشد، زیرفضا-بازگشتی است. به ویژه، C_0 -نیم‌گروه‌های آشوبناک، زیرفضا-بازگشتی هستند.

برهان. فرض کنیم $Per(T_t)_{t \geq 0}$ نشان دهنده نقطه‌های متناوب $(T_t)_{t \geq 0}$ باشد و $Per(T_t)_{t \geq 0} = X$ بنا به قضیه ۱،۲ از [۱]، زیرفضای بسته و نابدیهی M از X وجود دارد که $\overline{Per(T_t)_{t \geq 0}} \cap M = M$ پس $(T_t)_{t \geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از نقطه‌های متناوب در M دارد. از این رو، بنا به نتیجه ۷، $(T_t)_{t \geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است.

حال اگر C_0 -نیم گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ آشوبناک باشد، مجموعه ای چگال از نقطه های متناوب دارد و در نتیجه زیرفضا-بازگشتی است.

در ادامه با سه شرط کافی دیگر برای زیرفضا-بازگشتی بودن آشنا می شویم که مبنای آنها مجموعه های چگال و مجموعه های باز است.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم گروهی روی فضای باناخ X و M زیرفضای بسته ای از X باشد. فرض کنیم Y و Z دو زیرفضای چگال از M باشند به قسمی که $T(Y) \subseteq M$ و $T(Z) \subseteq M$ و

$$(۱) \quad \text{برای هر } y \in Y, T_t y \rightarrow 0 \text{ وقتی } t \rightarrow \infty.$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } z \in Z, T_t z \rightarrow z \text{ وقتی } t \rightarrow \infty.$$

در این صورت $(T_t)_{t \geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. چون Y و Z در M چگال هستند در نتیجه Y و Z یافت می شوند به قسمی که

$$y \in U \cap Y \text{ و } z \in U \cap Z. \quad (۳)$$

w_t را به صورت $w_t = z + T_t y$ در نظر می گیریم. از فرضیات قضیه و رابطه (۳) نتیجه می شود که

$$w_t \rightarrow z, t \rightarrow \infty \quad \text{وقتی} \quad (۴)$$

از طرفی

$$T_t(w_t) = T_t z + T_t(T_t y) = T_t z + T_{2t} y.$$

توجه می کنیم که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، آن گاه $2t \rightarrow \infty$. بنابراین از (۴) داریم، $T_{2t} y \rightarrow 0$ و بنابراین

$$T_t(w_t) \rightarrow z. \quad (۵)$$

حال از (۴) و (۵) می توانیم $t > 0$ را به قسمی بیابیم که $w_t \in T_t^{-1}(U) \cap U$. پس $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به M زیرفضا-بازگشتی است.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم گروهی روی X و M زیرفضای بسته ای از X باشد. فرض کنیم زیرفضای چگال Y از M وجود داشته باشد به قسمی که $T(Y) \subseteq M$ و

$$(۱) \quad \text{برای هر } y \in Y, T_t y \rightarrow 0 \text{ وقتی } t \rightarrow 0.$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } y \in Y, \text{ زیرفضای چگال } X_y \text{ از } M \text{ وجود داشته باشد که برای هر } x \in X_y, T_t x \rightarrow x \text{ وقتی } t \rightarrow 0.$$

در این صورت $(T_t)_{t \geq 0}$ ، M -بازگشتی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در توپولوژی نسبی M باشد. از آنجا که Y در M چگال است پس $U \cap Y$ ناتهی است. فرض کنیم $y \in U \cap Y$. بنا به قسمت (۲) فرض، متناظر با y یافت شده، زیرفضای چگال X_y از M با شرایط داده شده وجود دارد. حال چون X_y در M چگال است پس $U \cap X_y$ ناتهی است. فرض کنیم $x \in U \cap X_y$. بنا به قسمت (۲) فرض وقتی $t \rightarrow 0$ داریم،

$$T_t x \rightarrow x. \quad (۶)$$

متغیر $u_t = T_t y$ را در نظر می‌گیریم، حال

$$x + u_t \rightarrow x. \quad (۷)$$

از طرفی

$$T_t(x + u_t) = T_t(x) + T_t(u_t). \quad (۸)$$

اما بنا به خواص نیم‌گروه داریم:

$$T_t(u_t) = T_t(T_t y) = T_{2t} y.$$

هرگاه $t \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $2t \rightarrow 0$. در نتیجه

$$T_{2t} y \rightarrow 0. \quad (۹)$$

بنابراین از (۶)، (۸) و (۹) نتیجه می‌شود که

$$T_t(x + u_t) \rightarrow x. \quad (۱۰)$$

همچنین از (۷) و (۱۰) نتیجه می‌شود که برای t به اندازه کافی بزرگ داریم،

$$x + u_t \in T^{-1}(U) \cap U.$$

پس $(T_t)_{t \geq 0}$ نیم‌گروهی M -بازگشتی است.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ ، C_0 -نیم‌گروهی روی X و M زیرفضایی بسته از X باشد. اگر برای هر مجموعه باز U در توپولوژی نسبی M و هر همسایگی W از صفر در توپولوژی نسبی M ، $t > 0$ وجود داشته باشد که $T_t(U) \cap W$ و $T_t(W) \cap U$ ناتهی باشند، آن‌گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ زیرفضا-بازگشتی نسبت به M است.

برهان. بنا به لم ۲.۳۶ از [۹] مجموعه باز U_1 و همسایگی W_1 از صفر در M وجود دارد که

$$U_1 + W_1 \subseteq U. \quad (۱۱)$$

بنا به فرض $t > 0$ وجود دارد که

$$T_t(U_1) \cap W_1 \neq \emptyset \quad \text{و} \quad T_t(W_1) \cap U_1 \neq \emptyset. \quad (۱۲)$$

بنا به (۱۲)، $x \in U_1$ و $y \in W_1$ وجود دارد که $T_t x \in W_1$ و $T_t y \in U_1$ با توجه به (۱۱)

$$y + x \in U_1 + W_1 \subseteq U \quad (۱۳)$$

و

$$T_t(y + x) = T_t(y) + T_t(x) \in U_1 + W_1 \subseteq U \quad (۱۴)$$

(۶) و (۷) نشان می دهند که $T_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ و این برهان را تمام می کند.

۳. نتیجه گیری

یکی از ساختارهای مورد توجه در ریاضیات C_0 -نیم گروه ها هستند. در این مقاله، C_0 -نیم گروه های زیرفضا-بازگشتی را تعریف کردیم. مجموعه C_0 -نیم گروه های ابردوری، زیرمجموعه اکیدی از مجموعه C_0 -نیم گروه های زیرفضا-بازگشتی هستند چون همان طور که در قضیه ۹،۱ دیدیم، C_0 -نیم گروه های زیرفضا-بازگشتی روی فضاهای باناخ با بعد متناهی هم وجود دارند در صورتی که C_0 -نیم گروه های ابردوری فقط روی فضاهای با بعد نامتناهی وجود دارند [۹].

در قضیه ۳،۱ دیدیم که اگر T_{t_0} برای یک $t_0 > 0$ زیرفضا-بازگشتی باشد، آن گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ نیز زیرفضا-بازگشتی است. اکنون این سوال مطرح می شود که آیا می توان از زیرفضا-بازگشتی بودن $(T_t)_{t \geq 0}$ ، زیرفضا-بازگشتی بودن هر کدام از T_t ها را نتیجه گرفت؟

در قضیه ۱۰،۱ دیدیم که روی فضاهای باناخ با بعد نامتناهی هر C_0 -نیم گروه بازگشتی، زیرفضا-بازگشتی نیز هست. حال این سوال به ذهن می رسد که آیا این نتیجه گیری برای فضاهای باناخ با بعد متناهی نیز برقرار است؟

در این مقاله، چند شرط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0 -نیم گروه ها آورده شده است که بر پایه بردارهای زیرفضا-بازگشتی، زیرمجموعه های باز و زیرمجموعه های چگال از فضا بیان شده است. بنابراین پرسشی که به ذهن می رسد این است که از چه ایده های دیگری می توان برای بیان شرایط کافی برای زیرفضا-بازگشتی بودن C_0 -نیم گروه ها استفاده کرد؟

References

1. N. Bamerni, V. Kadets and A. Kilicman, Hypercyclic operators are subspace-hypercyclic, *J. Math. Anal. Appl.*, **435** (2016), 1812-1815.
2. F. Bayart and E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.
3. T. Bermudez, A. Bonilla and H. Emamirad, Chaotic Tensor Product Semigroups, *Semigr. Forum*, **71** (2005), 252-264.
4. T. Bermudez, A. Bonilla and A. Martinon, On the existence of chaotic and hypercyclic semigroups

- on Banach spaces, Proc. Am. Math. Soc., **131(8)** (2002), 2435-2441.
5. G. Costakis and A. Peris, Hypercyclic semigroups and somewhere dense orbits, C. R. Math., **335(11)** (2002), 895-898.
 6. W. Desch and W. Schappacher, On products of hypercyclic Semigroups, Semigr. Forum, **71(2)** (2005), 301-311.
 7. W. Desch, W. Schappacher and G. F. Webb, Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators, Ergod. Theory Dyn. Syst., **17** (1997), 793-819.
 8. S. El Mourchid, On a hypercyclicity criterion for strongly continuous semigroups, Discrete Contin. Dyn. Syst. A, **13(2)** (2005), 271-275.
 9. K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, Linear Chaos, Springer-Verlag, London, UK, 2011.
 10. M. Moosapoor, On subspace-recurrent operators, Tamkang J. Math., **53(4)** (2022), 363-371.
 11. M. Moosapoor, On the recurrent C_0 -semigroups, their existence, and some criteria, J. Math., (2021), Article ID 6756908, 7 pages.
 12. G. A. Munoz-Fernandez, J. B. Seoane-Sepulveda and A. Weber, The set of periods of chaotic operators and semigroups, RACSAM, **105** (2011), 397-402.
 13. A. Tajmouati, A. El Bakkali and A. Toukmati, The M-hypercyclicity criterion of C_0 -semigroups, Int. J. Pure Appl. Math., **114 (2)** (2017), 241-247.
 14. A. Tajmouati, A. El Bakkali and A. Toukmati, On some properties of M-hypercyclic C_0 -semigroup, Ital. J. Pure Appl. Math., **35** (2015), 351-360.