Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Transitivity and Sensitivity Properties of the Subalgebras of a Finite-Dimensional Lie Algebra

L. Goudarzi[1], Z. Riyahi[2] ✉

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. E-mail: le.goudarzi@abru.ac.ir
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran. ✉ E-mail: zahra.riyahi@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 November 2021.
Accepted: 13 June 2024
Published online:
10 July 2024

Keywords:
Transitivity,
Sensitivity,
Lie algebra,
c-ideal,
Solvable,
Supersolvable.

ABSTRACT

Introduction

In 2013, Petrillo [5] presented results on the properties of transitivity, persistence, and sensitivity in the subgroups of a finite group in his paper. Using the properties of cover-avoidance and normality, he obtained results regarding finite groups. It can be mentioned that the property of cover-avoidance has been studied by many individuals, both in finite group theory and in Lie algebras, including [3, 7, 9]. It is worth noting that this property has led to the definition of specific subgroups and subalgebras called CAP-subgroups and CAP-subalgebras. In Lie algebras, these subalgebras were examined by Towers in [9]. Using these concepts, he provided results on the solvability and supersolvability of Lie algebras. He defined the property of cover-avoidance and CAP-subalgebras. In 1972, Venzke [11] introduced the concept of a maximal-sensitive subgroup in his paper and obtained results in finite groups from this concept. This concept gained attention in Petrillo's work in [5], where he expressed the sensitivity property using it.

Material and Methods

In this paper, we use Petrillo's definition and similarly define this property for Lie algebras. Furthermore, we intend to specifically examine CAP-transitive and maximal-sensitive subalgebras by applying these concepts, and present results on these subalgebras.

Results and discussion

We first study connections between the α-transitivity, ideality, and c-ideality and some other algebraic concept such as t-algebras and ct-algebras and then present results on Lie algebras that have CAP-transitive subalgebras and on Lie algebras where the cover-avoidance property is transitive. We will also provide results on Lie algebras that have maximal-sensitive subalgebras.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- If L is a nilpotent Lie algebra, then L is a t-algebra if and only if every subalgebra of L is an ideal of L.
- If L is a solvable Lie algebra, then L is a ct-algebra if and only if every subalgebra of L is a c-ideal of L.

- Suppose N is an ideal of L. If N is a CAP-transitive subalgebra of L, then every chief factor of L contained in N is a chief factor of N.

How to cite: Goudarzi, L., Riyahi, Z. (2024). Transitivity and sensitivity properties of the subalgebras of a finite dimensional Lie algebra, *Mathematical Researches*, **10** (2), 116 – 128.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

خواص تعدی و حساسیت زیرجبرها در جبرهای لی متناهی بعد

لیلا گودرزی[۱]، زهرا ریاحی[۲] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت ا... بروجردی(ره)، بروجرد، ایران. رایانامه: le.goudarzi@abru.ac.ir
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران. رایانامه: zahra.riyahi@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۴/۲۰

واژه‌های کلیدی:
تعدی،
حساسیت،
جبر لی،
c-ایدآل،
حل‌پذیر،
ابرحل‌پذیر

چکیده

زیرجبر H از L را یک α-زیرجبر از L می‌گوییم هرگاه H دارای خاصیت α باشد. همچنین زیرجبر H از جبر لی L را α-متعدی می‌گوییم هرگاه هر α-زیرجبر از H، یک α-زیرجبر از L باشد و آن زیرجبر را α-حساس می‌گوییم هرگاه برای هر α-زیرجبر K از H، یک α-زیرجبر A از L موجود باشد به‌طوری‌که A∩H=K. این مفاهیم مشابه با مفاهیم زیرگروه‌های α-متعدی و α-حساس در نظریه گروه‌های متناهی هستند. در این مقاله، نتایج اصلی روی خواص پوشش-اجتناب، بیشین بودن، ایدآل بودن و c-ایدآل بودن است و به‌طورخاص زیرجبرهای CAP-متعدی و بیشین-حساس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به‌علاوه، تأثیر این مفاهیم را روی ساختار جبرهای لی متناهی‌بعد مورد بررسی قرار داده و به‌ویژه نتایجی در مورد جبرهای لی ابرحل‌پذیر بیان می‌کنیم.

استناد: گودرزی، لیلا؛ ریاحی، زهرا (۱۴۰۳). خواص تعدی و حساسیت در جبرهای لی متناهی بعد. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۲)، ۱۱۶ – ۱۲۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در این مقاله، L نشان‌دهنده‌ی یک جبر لی متناهی‌بعد روی میدان دلخواه F خواهد بود. زیرفضای H از L زیرجبر L نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x,y\in H$، $[x,y]\in H$ و زیرفضای A از L یک ایدآل L نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x\in L$ و هر $y\in A$، $[x,y]\in A$. هم‌چنین خارج قسمت A/B یک عامل اصلی L گفته می‌شود هرگاه B ایدآل L و A/B ایدآل کمین L/B باشد. اگر A یک زیرجبر از L باشد، آنگاه A یک زیرایدآل از L نامیده می‌شود هرگاه یک زنجیر از زیرجبرها به صورت $A=A_0\leq A_1\leq\ldots\leq A_n=L$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $0\leq i\leq n-1$، A_i ایدآل A_{i+1} باشد. زیرجبر B از L یک c-ایدآل [۸] از L گفته می‌شود هرگاه یک ایدآل C از L موجود باشد به‌طوری‌که $L=B+C$ و $B\cap C\leq B_L$. به‌علاوه، جبر لی L ابرحل‌پذیر است هرگاه یک زنجیر از ایدآل‌های L به صورت

$$L=L_n\supseteq L_{n-1}\supseteq\ldots\supseteq L_2\supseteq L_1\supseteq\{0\},$$

موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $1\leq i\leq n$، $\dim L_i=i$.

در سال ۲۰۱۳، پتریلو[۱][۵] در مقاله خود، نتایجی در مورد خواص تعدی، پایداری و حساسیت در زیرگروه‌های یک گروه متناهی بیان نمود و با استفاده از خواص پوشش-اجتناب و نرمال بودن، نتایجی را در مورد گروه‌های متناهی به دست آورد. می‌توان اشاره کرد که هم در نظریه گروه‌های متناهی و هم در جبرهای لی، خاصیت پوشش-اجتناب مورد مطالعه افراد بسیاری از جمله [۹،۷،۳] قرار گرفته است. لازم به‌ذکر است این خاصیت باعث تعریف زیرگروه‌ها و زیرجبرهای خاصی با عنوان CAP-زیرگروه‌ها و CAP-زیرجبرها شده است. در جبرهای لی، این زیرجبرها در [۹] توسط تاورز[۲] مورد بررسی قرار گرفت. او با استفاده از این مفاهیم، نتایجی در مورد حل‌پذیری و ابرحل‌پذیری جبرهای لی ارائه نمود. او خاصیت پوشش-اجتناب و CAP-زیرجبرها را به صورت زیر تعریف نمود:

تعریف ۱. فرض کنید L یک جبر لی و H زیرجبری از L و A/B یک عامل اصلی از L باشد. در این صورت

الف) H، A/B را می‌پوشاند، هرگاه $H+A=H+B$؛ و

ب) H، از A/B اجتناب می‌کند، هرگاه $H\cap A=H\cap B$.

تعریف ۲. زیرجبر H یک CAP-زیرجبر L گفته می‌شود هرگاه هر عامل اصلی L را بپوشاند یا از آن اجتناب کند.

همچنین در سال ۱۹۷۲، ونزکی[۳] در مقاله خود [۱۱]، مفهومی با عنوان زیرگروه بیشین- حساس تعریف نمود و نتایجی نیز در گروه‌های متناهی از این مفهوم به دست آورد که در سال ۲۰۱۳ موردتوجه پتریلو قرار گرفت و خاصیت حساسیت را با استفاده از آن بیان کرد که البته در این مقاله، ما نیز از تعریف بیان شده توسط پتریلو استفاده نموده و به طور مشابه این خاصیت را برای جبرهای لی تعریف می‌کنیم. به‌علاوه در این مقاله قصد داریم با به‌کاربردن مفاهیم فوق، به‌طور ویژه زیرجبرهای CAP-متعدی و بیشین-حساس را موردبررسی قرار داده و نتایجی از این زیرجبرها را ارائه دهیم.

---

[1] Petrillo

[2] Towers

[3] Venzke

تعاریف زیر در این مقاله نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

تعریف ۳. زیرجبر H از L را یک α-زیرجبر از L می‌گوییم و با نماد $H\alpha L$ نشان می‌دهیم، هرگاه H دارای خاصیت α باشد.

تعریف ۴. فرض کنید α یک خاصیت باشد.

الف) اگر برای هر $H\leq K\leq L$ با داشتن $H\alpha K$ و $K\alpha L$ نتیجه بگیریم $H\alpha L$، آنگاه می‌گوییم α، متعدی است.

ب) اگر برای هر $H\leq K\leq L$، $H\alpha L$ نتیجه دهد $H\alpha K$، آنگاه می‌گوییم α، پایدار است.

مثال ۱. زیرجبر بودن متعدی و ایدآل بودن و c-ایدآل بودن پایدار هستند.

توجه کنید که در حالت کلی خواص ایدآل بودن و c-ایدآل بودن متعدی نیستند و در بخش ۳ در مورد جبرهای لی که این دو خاصیت در آن‌ها متعدی است، نتایجی ارائه خواهد شد. در زیر مثالی آورده می‌شود که مؤید مطلب فوق است.

مثال ۲. فرض کنید $L=Fx+Fy+Fz$ که F میدان اعداد مختلط است و $[x,y]=y$ و $[x,z]=2z$ باشد. در این صورت L یک جبر لی است و $L^2=Fy+Fz$ ایدآلی از L است و در نتیجه c-ایدآل L نیز هست. هم‌چنین $F(y+z)$ یک ایدآل و در نتیجه یک c-ایدآل از L^2 است که آبلی است. اما $F(y+z)$ یک c-ایدآل L نیست. زیرا در غیر این صورت ایدآل B از L موجود است به‌طوری‌که $L=F(y+z)+B$ و $F(y+z)\cap B=0$ و این نتیجه می‌دهد که $L^2\subseteq B$ و از این رو $L=L^2$، که تناقض است.

تعریف ۵. الف) زیرجبر H از جبر لی L را α-متعدی می‌گوییم و با نماد $H\alpha_T L$ نمایش می‌دهیم هرگاه هر α-زیرجبر از H، یک α-زیرجبر از L باشد.

ب) زیرجبر H از جبر لی L را α-پایدار می‌گوییم و با نماد $H\alpha_P L$ نمایش می‌دهیم هرگاه هر α-زیرجبر از L مشمول در H، یک α-زیرجبر از H باشد.

ج) زیرجبر H از جبر لی L را α-حساس می‌گوییم و با نماد $H\alpha_S L$ نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر α-زیرجبر K از H، یک α-زیرجبر A از L موجود باشد به‌طوری‌که $A\cap H=K$.

مثال ۳. جبر لی هایزنبرگ $H_3 =< e_1, e_2, e_3 >$ با ضرب لی $[e_2, e_3] = e_1$ و α را خاصیت ایدآل بودن در نظر می‌گیریم. به سادگی قابل بررسی است که $< e_1 >$ یک ایدآل ایدآل-متعدی از H_3 است در حالی که $< e_1, e_2 >$ ایدآل-متعدی نیست.

۱. نتایج اولیه

در این بخش ارتباط بین بعضی از مفاهیم فوق را بیان می‌کنیم.

لم ۱،۱. فرض کنید α یک خاصیت باشد.

الف) α-حساسیت، متعدی است.

ب) یک زیرجبر α-متعدی، α-حساس است.

برهان. الف) فرض کنید $H\alpha_s K\alpha_s L$. می‌خواهیم نشان دهیم $H\alpha_s L$. برای این منظور فرض کنید $A\alpha H$. چون $H\alpha_s K$، لذا یک α-زیرجبر B از K موجود است به‌طوری‌که $B\cap H=A$. حال چون $K\alpha_s L$ و $B\alpha K$، پس یک α-زیرجبر C از L موجود است به‌طوری‌که $C\cap K=B$. از این رو داریم:

$$A=B\cap H=(C\cap K)\cap H=C\cap H.$$

بنابراین $H\alpha_s L$.

ب) فرض کنید $H\alpha_T L$. می‌خواهیم نشان دهیم $H\alpha_s L$. برای این منظور فرض کنید $A\alpha H$. در این صورت $A\alpha L$ و چون $A\cap H=A$، لذا $H\alpha_s L$.

برای مثال ایدآل $<e_1>$ از H_3 در مثال۳ از بخش مقدمه یک ایدآل ایدآل-حساس است. در حالت کلی هر ایدآلی که ایدآل-متعدی باشد ایدآل-حساس نیز است و برعکس. گزاره زیر این موضوع را روشن می‌سازد.

گزاره ۱،۱. فرض کنید N ایدآلی از جبر لی L باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) N یک ایدآل ایدآل- متعدی از L است.

ب) N یک ایدآل ایدآل- حساس از L است.

پ) هر عامل اصلی از N یک عامل اصلی از L است.

برهان. الف $\Leftarrow$ ب: فرض کنید N یک ایدآل ایدآل- متعدی از L باشد. در این صورت بنا به لم ۱،۱، N یک ایدآل ایدآل- حساس از L است.

ب $\Leftarrow$ الف: فرض کنید N یک ایدآل ایدآل- حساس از L باشد و فرض کنید H ایدآلی از N باشد. در این صورت یک ایدآل A از L موجود است به‌طوری‌که $A\cap N=H$ و در نتیجه H ایدآلی از L نیز می‌باشد.

الف $\Leftarrow$ پ: فرض کنید A/B یک عامل اصلی از N باشد. در این صورت A و B ایدآل‌های N هستند و چون N ایدآلی ایدآل- متعدی از L است، لذا A و B ایدآل‌های L نیز می‌باشند. حال اگر C ایدآلی از L باشد که $B<C<A$، آنگاه C ایدآلی از N است و در این صورت A/B دیگر عامل اصلی N نیست، که این تناقض است.

پ $\Leftarrow$ الف: فرض کنید A ایدآلی از N باشد. اگر A ایدآلی کمین از N باشد، آنگاه $A/\{0\}$ یک عامل اصلی از N است و از این رو طبق فرض یک عامل اصلی از L است و در نتیجه A ایدآلی از L است. اگر $\mathrm{N/A}$ ساده باشد، آنگاه یک عامل اصلی از N است و لذا یک عامل اصلی از L است و در نتیجه A ایدآلی از L است. اما اگر $\mathrm{N/A}$ شامل ایدآلی کمین مانند $\mathrm{B/A}$ باشد، آنگاه $\mathrm{B/A}$ یک عامل اصلی از N و در نتیجه یک عامل اصلی از L است و در نتیجه A ایدآلی از L است.

قضیه ۱٫۱. فرض کنید N یک زیرجبر ایدآل-متعدی از L باشد. در این صورت روابط زیر برقرارند:

الف) برای هر عامل اصلی $\mathrm{H/K}$ از L که توسط N پوشانده می‌شود، $(\mathrm{N\cap H})/(\mathrm{N\cap K})$ یک عامل اصلی از N است.

ب) برای هر CAP-زیرجبر H از L، $\mathrm{H\cap N}$ یک CAP-زیرجبر از N است.

پ) هر CAP-زیرجبر H از L، هر عامل اصلی N را یا می‌پوشاند یا از آن اجتناب می‌کند.

ت) N یک زیرجبر CAP-پایدار از L است.

برهان. الف) فرض کنید $\mathrm{H/K}$ یک عامل اصلی L باشد که توسط N پوشانده می‌شود. چون N زیرجبر ایدآل-متعدی از L است، لذا N ایدآلی از L است و در نتیجه $\mathrm{N\cap H}$ و $\mathrm{N\cap K}$ ایدآل‌های L می‌باشند. از طرفی بنا به [۹، لم ۲-۱]، $\mathrm{N\cap H+K=H}$ و بنابراین داریم:

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}=\frac{\mathrm{N\cap H+K}}{\mathrm{K}}\cong\frac{\mathrm{N\cap H}}{\mathrm{N\cap H\cap K}}=\frac{\mathrm{N\cap H}}{\mathrm{N\cap K}}.$$

پس $(\mathrm{N\cap H})/(\mathrm{N\cap K})$ یک عامل اصلی از L است. حال اگر M ایدآلی از N باشد که $\mathrm{N\cap K<M<N\cap H}$، آنگاه M ایدآلی از L است و این یک تناقض است. پس $(\mathrm{N\cap H})/(\mathrm{N\cap K})$ یک عامل اصلی از N است.

ب) فرض کنید $\mathrm{A/B}$ یک عامل اصلی از N باشد و فرض کنید H یک CAP-زیرجبر از L باشد. در این صورت چون N یک ایدآل ایدآل- متعدی از L است، لذا بنا به گزاره ۱٫۱، $\mathrm{A/B}$ یک عامل اصلی از L است. حال از [۹، لم ۲-۱] می‌توان نتیجه گرفت $\mathrm{B+H\cap A=A}$ یا $\mathrm{B+H\cap A=B}$. از طرفی $\mathrm{B+(H\cap A)=B+((H\cap N)\cap A)}$. پس با استفاده دوباره از [۹، لم ۲-۱] می‌توان نتیجه گرفت $\mathrm{H\cap N}$، $\mathrm{A/B}$ را می‌پوشاند یا از آن اجتناب می‌کند.

پ) فرض کنید H یک CAP-زیرجبر از L باشد و فرض کنید $\mathrm{A/B}$ یک عامل اصلی از N باشد. در این صورت بنا به گزاره ۱٫۱، $\mathrm{A/B}$ یک عامل اصلی از L است و لذا H، $\mathrm{A/B}$ را می‌پوشاند یا از آن اجتناب می‌کند.

ت) فرض کنید A یک CAP-زیرجبر از L مشمول در N باشد و فرض کنید $\mathrm{B/C}$ یک عامل اصلی از N باشد. بنا به قسمت (پ)، A، $\mathrm{B/C}$ را می‌پوشاند یا از آن اجتناب می‌کند و این یعنی A یک CAP-زیرجبر از N است.

مثال ۱٫۱. جبر لی $A_{5,2}=<e_1,e_2,e_3,e_4,e_5>$ [4] را با ضرب لی $[e_2,e_5]=e_1$، $[e_3,e_5]=e_2$، $[e_4,e_5]=e_3$ و α را خاصیت ایدآل بودن در نظر می‌گیریم. ایدآل $N=<e_1,e_2>$ یک ایدآل ایدآل-متعدی از $A_{5,2}$ است. از آنجایی که $A_{5,2}$ ابرحل‌پذیر است و هر CAP-زیرجبر از $A_{5,2}$ مشمول در N یک CAP-زیر جبر از N است، نتیجه می‌شود که N یک زیرجبر CAP-پایدار $A_{5,2}$ است. قابل بررسی است که مابقی روابط قضیه ۱٫۱ نیز برقرارند.

۲. t-جبرها و ct-جبرها

جبرهای لی که در آن‌ها، خاصیت ایدآل بودن (c-ایدآل بودن) متعدی است، t-جبر (ct-جبر) نامیده می‌شوند. در واقع، در t-جبرها (ct-جبرها) هر ایدآل (c-ایدآل)، ایدآل متعدی (c-ایدآل-متعدی) است.

در مقالات [۲، ۱۰]، t-جبرها مورد بررسی قرار گرفته‌اند که بعضی از قضایایی که در ادامه در مورد t-جبرها آورده خواهند شد، برگرفته از این مقالات است.

لم ۱,۲. فرض کنید L یک t-جبر (ct-جبر) باشد و N ایدآلی از L باشد. در این صورت L/N نیز یک t-جبر (ct-جبر) است.

برهان: واضح است (برای ct-جبرها به راحتی با استفاده از [8، لم ۲-۱] نتیجه حاصل می‌شود).

لم ۲,۲. فرض کنید L یک t-جبر (ct-جبر) باشد و N یک ایدآل کمین آبلی از L باشد. در این صورت $\dim N=1$.

برهان. فرض کنید M یک زیرجبر بیشین N باشد. در این صورت (بنا به [۸، قضیه ۳-۱])، M یک ایدآل (c-ایدآل) از N است و چون L یک t-جبر (ct-جبر) است، لذا M یک ایدآل (c-ایدآل) از L است. حال با استفاده از [۶، لم ۲-۴] می‌توان نتیجه گرفت $\dim N=1$.

لم ۳,۲. الف) اگر L یک t-جبر پوچتوان باشد، آنگاه هر زیرجبر بیشین M از L نیز یک t-جبر است.

ب) اگر L یک ct-جبر حل‌پذیر باشد، آنگاه هر زیرجبر بیشین M از L نیز یک ct-جبر است.

برهان. فقط اثبات قسمت (ب) را می‌آوریم. قسمت (الف) به طور مشابه اثبات خواهد شد. اگر L یک جبر لی حل‌پذیر باشد، آنگاه بنا به [۸، قضیه ۳-۱]، هر زیرجبر بیشین M از L یک c-ایدآل از L است. حال فرض کنید $H,K\leq M$ و H یک c-ایدآل از K و K یک c-ایدآل از M باشد. در این صورت K یک c-ایدآل از L است و در نتیجه H نیز یک c-ایدآل از L می‌شود. بنابراین با توجه به [۸، لم ۲-۱]، H یک c-ایدآل از M است و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۱,۲. اگر L یک t-جبر حل‌پذیر باشد، آنگاه احکام زیر برقرارند:

الف) برای هر ایدآل کمین A از L، $\dim A=1$.

ب) L ابرحل‌پذیر است.

برهان. الف) بنا به لم ۲,۲ واضح است.

ب) فرض کنید N ایدآلی کمین از L باشد. بنا به لم ۱،۲، L/N یک t-جبر است و با استقرا روی بعد L می‌توان گفت L/N ابرحل‌پذیر است. از طرفی با توجه به قسمت (الف)، $\dim N=1$ و در نتیجه L ابرحل‌پذیر است.

توجه داریم که عکس قسمت (ب) قضیه بالا لزوماً برقرار نیست. برای مثال جبر لی $A_{5,2}$ ابرحل‌پذیر و $N=<e_1, e_2, e_3>$ ایدآلی در $A_{5,2}$ است. در حالی که $<e_3>$ به عنوان ایدآل N، ایدآلی در $A_{5,2}$ نیست.

قضیه ۲،۲. فرض کنید L یک ct-جبر حل‌پذیر باشد. در این صورت نتایج زیر برقرارند:

الف) هر زیرجبر L یک ct-جبر است.

ب) هر زیرایدآل از L یک c-ایدآل از L است.

ج) برای هر ایدآل کمین A از L، $\dim A=1$.

د) L ابرحل‌پذیر است.

برهان. الف) فرض کنید H زیرجبری از L باشد. دوحالت را در نظر می‌گیریم:

(۱) H زیرجبری بیشین از L باشد: در این حالت بنا به لم ۳،۲، H یک ct-جبر است.

(۲) H زیرجبر بیشین L نباشد: در این حالت H مشمول در یک زیرجبر بیشین مانند M است که بنا به لم ۳،۲، M یک ct-جبر است. حال با استقرا روی بعد L می‌توان نتیجه گرفت که هر زیرجبر از M یک ct-جبر است.

ب) با توجه به اینکه L یک ct-جبر است نتیجه واضح است حتی اگر L حل‌پذیر نباشد.

ج) از لم ۲،۲ نتیجه می‌شود.

د) فرض کنید L مثال نقض با کوچکترین بعد باشد و A ایدآلی کمین از L باشد. در این صورت از قسمت (ج) نتیجه می‌شود که $\dim A=1$. از طرفی بنا به لم ۱،۲، L/A نیز یک ct-جبر است. بنابراین L/A در فرض قضیه صدق می‌کند و در نتیجه ابرحل‌پذیر است و از این رو L ابرحل‌پذیر است، که تناقض است.

قضیه ۳،۲. (۱) اگر L یک جبر لی پوچتوان باشد، آنگاه L یک t-جبر است اگر و تنها اگر هر زیرجبر L یک ایدآل از L باشد.

(۲) اگر L یک جبر لی حل‌پذیر باشد، آنگاه L یک **ct**-جبر است اگر و تنها اگر هر زیرجبر L یک c-ایدآل از L باشد.

برهان. (۱) اگر هر زیرجبر L یک ایدآل از L باشد واضح است که خاصیت ایدآل بودن در L متعدی است و L یک t-جبر است. برعکس، فرض کنید L یک t-جبر پوچتوان باشد. در این صورت واضح است که هر زیرجبر L در L، ایدآل است.

(۲) برهان این قسمت مشابه با قسمت (۱) و با استفاده از [۸، قضیه ۳-۱] حاصل می‌شود.

۳. زیرجبرهای CAP- متعدی و بیشین-حساس

در این بخش به ارائه نتایجی در مورد جبرهای لی که دارای زیرجبرهای CAP- متعدی می‌باشند و همچنین جبرهای لی که خاصیت پوشش- اجتناب در آنها متعدی است، می‌پردازیم و در ادامه در مورد جبرهای لی که دارای زیرجبرهای بیشین-حساس هستند نتایجی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱,۳. فرض کنید H یک زیرجبر از جبر لی L باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) H یک زیرجبر CAP- متعدی از L است.

ب) هر ایدآل از H، یک CAP-زیرجبر از L است.

پ) H یک CAP-زیرجبر از L است و برای هر عامل اصلی A/B از L که توسط H پوشانده می‌شود، $(H\cap A)/(H\cap B)$ یک عامل اصلی از H است.

برهان. الف $\Leftarrow$ ب: چون بنا به [۹، لم ۲-۱]، هر ایدآل از H یک CAP-زیرجبر از H است و H یک زیرجبر CAP- متعدی از L است، لذا هر ایدآل از H، یک CAP-زیرجبر از L است.

ب $\Leftarrow$ پ: واضح است که H یک CAP-زیرجبر از L است. فرض کنید A/B یک عامل اصلی از L باشد که توسط H پوشانده می‌شود. می‌دانیم $H\cap A$ و $H\cap B$ هر دو ایدآلی از H می‌باشند و $H\cap A\neq H\cap B$. حال اگر N ایدآلی از H باشد که $H\cap B\lneqq N\leq H\cap A$، آنگاه چون N یک CAP-زیرجبر از L است، لذا بنا به [۹، لم ۲-۱] B یا $(N\cap A)+B=A$. از طرفی $N\cap A=N$ و در نتیجه B یا $N+B=A$. حال اگر $N+B=B$، آنگاه $N\subseteq B$ و درنتیجه $N=H\cap B$، که تناقض است. بنابراین $N+B=A$، که در این حالت داریم:

$$(H\cap A)/(H\cap B) \cong A/B=N+B/B\cong N/N\cap B=N/N\cap H\cap B=N/H\cap B \ ,$$

پس $N=H\cap A$ و درنتیجه $(H\cap A)/(H\cap B)$ یک عامل اصلی از H است.

پ $\Leftarrow$ الف: فرض کنید که K یک CAP-زیرجبر از H باشد. چون K از هر عامل اصلی L که توسط H اجتناب می‌شود، اجتناب می‌کند، لذا کافی است نشان دهیم که K هر عامل اصلی L که توسط H پوشانده می‌شود را می‌پوشاند یا از آن اجتناب می‌کند. برای این منظور فرض کنید A/B یک عامل اصلی L باشد که توسط H پوشانده می‌شود. در این صورت طبق فرض، $(H\cap A)/(H\cap B)$ یک عامل اصلی از H است و در نتیجه توسط K پوشانده می‌شود یا از آن اجتناب می‌شود. پس یا $K+(H\cap A)=K+(H\cap B)$، که در این صورت به راحتی با استفاده از [۹، لم ۲-۱] می‌توان نتیجه گرفت $K+A=K+B$، و در غیر این صورت $K\cap A=K\cap B$. بنابراین K یک CAP-زیرجبر از L است.

ازآنجایی که تمام زیرجبرهای یک جبر لی ابرحل‌پذیر CAP-زیرجبر هستند ([۹، گزاره ۲-۹])، در ادامه مثالی از یک جبر لی غیر ابرحل‌پذیر خواهیم آورد که در شرایط قضیه بالا صدق کند.

مثال ۱,۳. جبر لی غیر ابرحل‌پذیر $L=<x, y,z, e_0, e_1>$ را با ضرب لی $[x,y]=z$ و $[e_0,x]=e_1$ و $[e_1,x]=e_0$ و $[e_1,y]=e_0$ و $[e_0,z]=e_0$ و $[e_1,z]=e_1$ روی میدان بسته جبری و از مشخصه دو در نظر می‌گیریم [1]. از آنجایی که زیرجبر $H=<e_0,e_1>$ ایدآلی از L است، پس بنا به [۹، لم ۲-۱]، H یک CAP-زیرجبر L است. هر ایدآل H به صورت $<0>$، $<e_0>$، $<e_1>$، $<e_0+e_1>$، $<e_0, e_1>$ است. اگر H_i هر یک از زیرجبرهای فوق باشد و B/C یک عامل اصلی L باشد، دو حالت برای زیرجبر H_i رخ می‌دهد: در حالت اول، $H_i⊆C⊂B$ و در نتیجه تمام ایدآل‌های فوق در تساوی $H_i∩C=H_i∩B$ صدق می‌کنند. پس در این حالت تمام ایدآل‌های H از هر عامل اصلی L اجتناب می‌کنند. در حالت دوم، یعنی وقتی $C⊂B⊆H_i$، آنگاه $H_i∩C=H_i∩B$. در نتیجه هر ایدآل H یک CAP-زیرجبر از L است. با توجه به این که تمام زیرجبرها و ایدآل‌های H موارد ذکر شده در بالا هستند نتیجه می‌شود که H یک زیرجبر CAP-متعدی در L است.

نتیجه ۱,۳. فرض کنید N ایدآلی از L باشد. اگر N یک زیرجبر CAP- متعدی از L باشد، آنگاه هر عامل اصلی L مشمول در N یک عامل اصلی از N است.

قضیه ۲,۳. اگر L یک جبر لی باشد که در آن خاصیت پوشش- اجتناب متعدی است، آنگاه هر عامل اصلی L ساده است.

برهان. با توجه به فرض، هر زیرایدآل از L، یک CAP-زیرجبر از L است. حال فرض کنید A/B یک عامل اصلی از L باشد و C/B ایدآلی از A/B باشد. در این صورت C ایدآلی از A است و لذا یک CAP-زیرجبر از A و در نتیجه یک CAP-زیرجبر از L است. از این رو یا C+A=C+B یا C∩A=C∩B. در حالت اول C/B=A/B و در حالت دوم $C/B=\bar{0}$. بنابراین A/B ساده است.

قضیه ۳,۳. اگر L یک جبر لی ابرحل‌پذیر باشد، آنگاه خاصیت پوشش- اجتناب در آن متعدی است.

برهان. فرض کنید H یک CAP-زیرجبر از L و K یک CAP-زیرجبر از H باشد. در این صورت چون L ابرحل‌پذیر است، لذا بنا به [۹، گزاره ۲-۹]، هر زیرجبر L از جمله K یک CAP-زیرجبر از L است. بنابراین حکم برقرار است.

قضیه ۴,۳. اگر خاصیت پوشش- اجتناب در L متعدی باشد، آنگاه هر ایدآل از L، یک زیرجبر CAP- متعدی از L است.

برهان. فرض کنید N ایدآلی از L باشد. در این صورت N یک CAP-زیرجبر از L است. حال اگر H یک CAP-زیرجبر از N باشد، بنا به فرض یک CAP-زیرجبر از L است.

در ادامه قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که شرطی برای بیشین- حساس بودن هر زیرجبر ارائه می‌دهد. لازم به ذکر است که زیرجبر H از L دارای متمم ایدآل در L است، هرگاه ایدآل A از L موجود باشد به‌طوری‌که $L=H\dot{+}A$.

قضیه ۵٫۳. فرض کنید L یک جبر لی باشد که هر زیرجبر آن در آن دارای متمم ایدآل است. در این صورت هر زیرجبر L، در آن بیشین- حساس است.

برهان. فرض کنید H یک زیرجبر از L باشد. در این صورت طبق فرض در L دارای متمم ایدآل مانند A در L است، یعنی $L=H\dot{+}A$. حال فرض کنید H' زیرجبر بیشین H باشد. در این صورت $H'\dot{+}A$ زیرجبر بیشین L است. قرار می‌دهیم $M=H'\dot{+}A$. در نتیجه داریم:

$$M\cap H=(H'+A)\cap H=H'+(A\cap H)=H'.$$

پس H یک زیرجبر بیشین- حساس از L است.

در پایان قضیه ای می‌آوریم که شرطی برای t-جبر بودن یک جبر لی حل‌پذیر ارائه می‌دهد.

قضیه ۶٫۳. فرض کنید L یک جبر لی حل‌پذیر باشد که در آن هر ایدآل از L در L بیشین- حساس باشد. در این صورت هر ایدآل L، یک ایدآل ایدآل- متعدی از L است.

برهان. فرض کنید H ایدآلی از L و K ایدآلی از H باشد. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید بین H و K ایدآلی از H نیست. در این صورت K زیرجبر بیشین H است و چون H بیشین- حساس است، لذا زیرجبر بیشین M از L موجود است به طوری که $M\cap H=K$. از طرفی $L=M+H$ و در نتیجه K ایدآلی از L است.

References

1. D. W. Barnes and M. L. Newell, Some theorems on saturated homomorphs of soluble Lie algebras, Math. Zeit., **115** (1970), 179–187.

2. A. G. Gein and Y. N. Muhin, Complements to subalgebras of Lie algebras, Ural Gos. Univ. Mat. Zap, **12** (1980), 24-48.

3. X. Gou and K. P. Shum, Cover-avoidance properties and the structure of finite groups, J. Pure Appl. Alg., **181** (2003), 297-308.

4. G. N. Mubarakzyanov, Classification of real Lie algebras in dimension five, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **3**(34) (1963), 99–106.

5. J. Petrillo, On generalizing transitivity, persistence, and sensitivity, Ricerche Mat., **62** (2013), 127-137.

6. A. R. Salemkar, S. Chehrazi, and F. Tayanloo, Characterizations for supersolvable Lie algebras, Comm. Algebra, **41** (2013), 2310-2316.

7. E. L. Stitzinger, Covering avoidance for saturated formations of solvable Lie algebras, Math. Zeit., **106** (1972), 237-249.

8. D. A. Towers, C-ideals of Lie algebras, Comm. Algebra, **37** (2009), 4366-4373.

9. D. A. Towers, Subalgebras that cover or avoid chief factors of Lie algebras, Proc. Edinb. Math.

Soc., **54** (2015), 531-542.

10. V. R. Varea, On Lie algebras in which the relation of being an ideal is transitive, Comm. Algebra, **13**(5) (1985), 1135-1150.

11. P. Venzke, Finite groups with many maximal sensitive subgroups, J. Algebra, **22** (1972), 297-308.