



## A New Algorithm for Solving Split Common Fixed Point Problem with Applications

M. Eslamian

Department of Mathematics, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran.

E-mail: [eslamian@mazust.ac.ir](mailto:eslamian@mazust.ac.ir)

---

### Article Info

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 11 June 2022

Accepted: 13 August 2023

Published online:

9 June 2024

#### Keywords:

Split common fixed point,

Demimetric mappings,

Null point problem,

Variational inequality.

---

### ABSTRACT

#### Introduction

Let  $H$  and  $K$  be real Hilbert spaces,  $A:H \rightarrow K$  be a bounded linear operator and let  $\{C_i\}_{i=1}^s$  be a family of nonempty closed convex subsets in  $H$  and  $\{Q_i\}_{i=1}^s$  be a family of nonempty closed convex subsets in  $K$ . The multiple-set split feasibility problem was introduced by Censor et al. (2005) and is formulated as finding a point  $x^*$  with the property:  $x^* \in \bigcap_{i=1}^s C_i$  and  $A(x^*) \in \bigcap_{i=1}^s Q_i$ . The multiple-set split feasibility problem with  $s=1$  is known as the split feasibility problem. The split common fixed point problem is formulated as finding a point  $x^*$  with the property:  $x^* \in \text{Fix}(U) := \{x \in H : Ux = x\}$  such that  $A(x^*) \in \text{Fix}(T) := \{x \in K : Tx = x\}$ ; where  $A:H \rightarrow K$  is a bounded linear operator,  $U:H \rightarrow H$  and  $T:K \rightarrow K$  are general operators. It is worth underlining that split common fixed point problem can be regarded as a generalization of the split feasibility problem. The split feasibility problem and the split common fixed point problem have received much attention due to its applications in signal processing, approximation theory, control theory, image reconstruction, with particular progress in intensity-modulated radiation therapy. In the last decades, many iterative methods have been constructed for solving the split feasibility problem and the split common fixed point problem. Recently some authors consider these problems in Banach spaces. In this paper we study the split common fixed point problem for a finite family of generalized demimetric mappings in uniformly convex and smooth Banach spaces.

#### Material and Methods

Let  $E$  be a Banach space and let  $T:E \rightarrow E$  be a nonlinear mapping. The mapping  $T:E \rightarrow E$  is called: Lipschitz continuous with constant  $L > 0$  if

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

If  $0 \leq L < 1$ , then  $T$  is called a contraction. If  $L=1$ , then  $T$  is called nonexpansive.

In 2000, Moudafi introduced the following so-called viscosity approximation methods:

$$x_{n+1} = a_n f(x_n) + (1 - a_n) T x_n$$

where  $f$  is contraction and  $T$  is nonexpansive mapping. He proved that under some appropriate condition imposed on the parameters, the sequence  $\{x_n\}$  converges strongly to the unique solution of the variational inequality

$$\langle x^* - f x^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \text{Fix}(T).$$

In 2018, Kawasaki and Takahashi introduced a new general class of mappings, called generalized demimetric mappings as follows:

---

---

---

Let  $\eta$  be a real number with  $\eta \neq 0$ . A mapping  $T:E \rightarrow E$  with  $Fix(T) \neq \emptyset$  is called generalized demimetric, if

$$\eta \langle x - p, J(x - Tx) \rangle \geq \|x - Tx\|^2, \quad \forall x \in E, \quad \forall p \in Fix(T),$$

where  $J$  is duality mapping on  $E$ . This mapping  $T$  is called  $\eta$ -generalized demimetric. We note that the class of generalized demimetric mappings covers the classes of well-known mappings such as strict pseudo-contraction, quasi-nonexpansive and demicontractive mappings. Moreover, many common types of mappings arising in optimization belong to this class of mappings.

### Results and discussion

In this paper, by using the viscosity iterative method we present a new algorithm for solving the split common fixed point problem for a finite family of generalized demimetric mappings in uniformly convex and smooth Banach spaces. We establish strong convergence of the sequence generated by the algorithm to a solution of split common fixed point problem which also solves some variational inequality problems. Finally, we present some applications of our main result for solving the multiple-set split feasibility problem and the split null point problem. The result presented in the paper generalizes several results in the literature.

### Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- A new and simple iterative method for approximating the solutions of the split common fixed point problem is given. Under mild and standard assumptions, strong convergence of the new algorithm is established in the framework of Banach spaces.
- Some applications of the main result to the multiple-set split feasibility problem and split common null point problem are presented.

---

---

**How to cite:** Eslamian, Mohammad. (2024). A new algorithm for solving split common fixed point problem with applications. *Mathematical Researches*, **10** (1), 33 – 50.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

---

## الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی و کاربردهای آن

محمد اسلامیان

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران. رایانامه: [eslamian@mazust.ac.ir](mailto:eslamian@mazust.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی در فضاهای باناخ عبارت است از یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشته‌های غیرخطی در یک فضای باناخ به طوری که تصویر آن تحت یک عملگر خطی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای دیگر از نگاشته‌های غیرخطی در یک فضای باناخ قرار می‌گیرد. مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف ریاضی و علوم مهندسی به عنوان نمونه در بهینه‌سازی، بازسازی تصاویر، تنظیم شدت پرتودرمانی و پردازش تصاویر دارند. در این مقاله، الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی برای خانواده‌ای از عملگرهای نیم متریک تعمیم یافته در فضای باناخ هموار و به طور یکنواخت محدب ارائه می‌دهیم. سپس همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط این الگوریتم به جوابی از مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی که هم‌چنین جوابی از یک مساله نامساوی تغییراتی نیز می‌باشد را اثبات می‌نماییم. در پایان به بیان نتایج و همچنین کاربردهای قضیه اصلی مقاله در حل مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی و مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای می‌پردازیم.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۲۱	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۲	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۳/۲۰	
<b>واژه‌های کلیدی:</b>	
مساله نقطه ثابت مشترک،	
نگاشت نیم‌متریک،	
مساله نقطه صفر،	
مساله نامساوی تغییراتی.	

استناد: اسلامیان، محمد. (۱۴۰۳). الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی و کاربردهای آن. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۱)، ۳۳ -

۵۰



## ۱. مقدمه

در سال ۲۰۰۵ سنسور و همکارانش [1] مساله ای تحت عنوان مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای<sup>۱</sup> را به منظور مدل سازی مسایل معکوس که در بازسازی تصاویر پزشکی بدست می آید، معرفی نمودند:

فرض کنیم  $H$  و  $K$  فضاهای هیلبرت و برای  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  عملگرهای خطی و کران دار باشند. اگر خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای  $H$  و  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای  $K$  باشند. مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای عبارت است از یافتن  $x^*$  با این ویژگی که  $x^* \in \bigcap_{j=1}^s C_j$  به طوری که برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  داشته باشیم  $A_i(x^*) \in Q_i$ .

در حالتی که  $r=s=1$ ، این مساله را مساله امکان پذیری شکافتنی گوییم که توسط سنسور و الفینگ [2] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. مساله امکان پذیری شکافتنی، ابتدا برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی مطرح شد. در سال‌های اخیر این مساله به خاطر کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف مانند بازسازی تصاویر، برنامه ریزی پرتودرمانی، پردازش تصاویر و بهینه سازی مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه منابع [11 - 3] را ببینید.

بسیاری از مسایل در آنالیز غیرخطی، بهینه سازی و معادلات دیفرانسیل می‌تواند به فرم معادله زیر نوشته شود:

یافتن عضوی مانند  $x$  در یک فضای متریک  $X$  به طوری که  $T(x) = x$ ، که در آن  $T: X \rightarrow X$  نگاشت غیرخطی می باشد. چنین عضوی را نقطه ثابت  $T$  می‌نامیم.

در سال ۲۰۰۹ سنسور و سگال [12] مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی<sup>۲</sup> را به عنوان تعمیمی از مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه ای ارایه داده اند. فرض کنیم  $H$  و  $K$  فضاهای هیلبرت و برای  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$   $A_i: H \rightarrow K$  عملگرهای خطی و کران دار باشند. اگر  $T_i: H \rightarrow H$  و  $S_i: K \rightarrow K$  نگاشت های غیرخطی باشند. مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی عبارت است از یافتن  $x^*$  با این ویژگی که  $x^* \in \bigcap_{i=1}^r \text{Fix}(T_i)$  به طوری که

$$A_i(x^*) \in \text{Fix}(S_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

تا کاهاشی در سال ۲۰۱۸ رده جدیدی از نگاشت ها را معرفی نمود: ([13] و [14])

اگر  $E$  یک فضای باناخ انعکاسی، اکید محدب و هموار باشد و  $\eta$  عدد حقیقی ناصفر باشد. آن‌گاه نگاشت  $T: E \rightarrow E$  با  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$  را  $\eta$ -نیم متریک<sup>۳</sup> تعمیم یافته گوییم هرگاه برای هر  $x \in E$  و  $p \in \text{Fix}(T)$  داشته باشیم:

$$\eta \langle x - p, J(x - Tx) \rangle \geq \|x - Tx\|^2$$

که در آن  $J$  نگاشت دوگانی می‌باشد که در بخش ۲ تعریف آن ذکر شده است. در حالتی که  $\eta > 0$  این نگاشت نیم

<sup>1</sup> Multiple-sets split feasibility problem

<sup>2</sup> Split common fixed point problem

<sup>3</sup> Demimetric

متریک نامیده می‌شود، اخیراً، تاکاهاشی ([13] و [14]) مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای و مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی را در فضاهای باناخ مورد مطالعه قرار داده است.

در این مقاله قصد داریم الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی برای یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های نیم متریک تعمیم یافته در فضای هیلبرت به طوری که تصویر آن تحت دو عملگر خطی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌های دیگر از نگاشت‌های نیم متریک تعمیم یافته در فضاهای باناخ هموار و به طور یکنواخت محدب قرار می‌گیرد، ارائه دهیم. سپس همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط این الگوریتم به جوابی از مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی که هم‌چنین جوابی از یک مساله نامساوی تغییراتی نیز می‌باشد، را اثبات می‌نماییم. در پایان به بیان نتایج و همچنین کاربردهای نتایج اصلی مقاله در حل مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی و مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای می‌پردازیم.

## ۲. تعاریف و پیش نیازهای مقدماتی

در این بخش به یادآوری برخی مفاهیم و لم‌های مقدماتی که در نتایج اصلی این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌پردازیم.

اگر  $\{x_n\}$  یک دنباله در فضای باناخ  $E$  و  $x \in E$  باشد. همگرایی ضعیف  $\{x_n\}$  به  $x$  را با  $x_n \rightarrow x$  و همگرایی قوی  $\{x_n\}$  به  $x$  را با  $x_n \rightarrow x$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.** نگاشت  $T: E \rightarrow E$  را غیرانبساطی گوئیم هر گاه برای هر  $x, y \in E$  داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

**تعریف ۲.۲.** نگاشت  $T: E \rightarrow E$  را اکید شبه انقباضی گوئیم هر گاه ثابتی مانند  $\eta \in [0, 1)$  موجود باشد به طوری که برای  $x, y \in E$  داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \eta \|(x - Tx) - (y - Ty)\|^2.$$

در این صورت  $T$  را  $\eta$ -اکید شبه انقباضی گوئیم.

**مثال ۳.۲.** فضای  $E = \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم. نگاشت  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $Tx = 3x - 1$  تعریف می‌کنیم. در این صورت  $p = \frac{1}{2}$  تنها نقطه ثابت نگاشت  $T$  می‌باشد. نگاشت  $T$ ،  $(-2)$ -نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد. در واقع برای  $x \in \mathbb{R}$  داریم

$$\eta \langle x - \frac{1}{2}, (x - Tx) \rangle = (-2) \langle x - \frac{1}{2}, 1 - 2x \rangle = (1 - 2x)^2 = \|x - Tx\|^2.$$

هم‌چنین با قرار دادن  $x = 1, y = \frac{1}{2}$  داریم که نگاشت  $T$  اکید شبه انقباضی و غیرانبساطی نیست.

**تعریف ۴.۲.** اگر  $E$  فضای باناخ و  $T: E \rightarrow E$  نگاشت دلخواه باشد آن‌گاه  $I - T$  را نیم بسته در صفر گوئیم هر گاه برای هر دنباله  $\{x_n\}$  در  $E$  با شرایط  $x_n \rightarrow x$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$  داشته باشیم  $x = Tx$ .

**لم ۵.۲. ([15]).** اگر  $H$  یک فضای هیلبرت و  $T: H \rightarrow H$  نگاشتی  $\eta$ -اکید شبه انقباضی باشد. آنگاه  $I - T$  در صفر نیم بسته است.

**تعریف ۶.۲.** فرض کنیم  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد. نگاشت  $T: X \rightarrow X$  را یک نگاشت انقباض گوئیم هر گاه ثابتی مانند  $k \in [0, 1)$  موجود باشد به طوری که برای  $x, y \in X$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

**قضیه ۷.۲. (اصل انقباض باناخ).** اگر  $(X, d)$  یک فضای متریک کامل و  $T: X \rightarrow X$  یک نگاشت انقباض باشد، آن‌گاه  $T$  دارای نقطه ثابت منحصر به فرد می باشد.

فرض کنیم  $C$  زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت  $H$  و  $x \in H$  باشد. در این صورت عضو یکتایی مانند  $y \in C$  موجود است به طوری که برای هر  $z \in C$ ،  $\|y - x\| \leq \|z - x\|$ .  $y$  را تصویر متریک از  $x$  به  $C$  می نامیم و با  $P_C$  نشان می دهیم. برای هر  $x \in H$  تصویر متریک  $y = P_C x$  اگر و تنها اگر

$$\langle x - y, y - z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in C.$$

داریم  $P_C: H \rightarrow C$  نگاشتی غیرانبساطی می باشد و  $Fix(P_C) = C$  (برای جزئیات مرجع [16] را ببینید).

فرض کنیم  $E$  یک فضای باناخ و  $E^*$  فضای دوگان آن باشد. مقدار  $y^* \in E^*$  در  $x \in E$  را با  $\langle x, y^* \rangle$  نشان می دهیم. نگاشت دوگانی  $J$  از  $E$  به  $E^*$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

اگر  $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ . آن‌گاه نرم  $E$  را مشتق پذیر گاتو گوئیم هر گاه برای هر  $x, y \in U$  حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}.$$

در این حالت  $E$  را هموار گوئیم.

فضای باناخ  $E$  را اکید محدب گوئیم هر گاه برای هر  $x, y \in E$  که  $x \neq y$  از  $\|x\| = \|y\| = 1$  نتیجه شود

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

فضای باناخ  $E$  را به طوریکنواخت محدب گوئیم هر گاه به ازای هر  $0 < \varepsilon \leq 2$  عدد  $0 < \delta < 1$  یافت شود به طوری

که برای هر  $x, y \in E$  با شرایط  $\|x - y\| \geq \varepsilon$  و  $\|x\| = \|y\| = 1$  نتیجه شود

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

توجه داریم هر فضای هر یکنواخت محدب، اکید محدب می‌باشد. هم‌چنین داریم فضاهای هیلبرت به طور یکنواخت محدب می‌باشند.

اثبات شده است که فضای باناخ  $E$  هموار است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانی  $J$ ، نگاشتی تک مقداری از  $E$  به  $E^*$  باشد. هم‌چنین می‌دانیم فضای باناخ  $E$  انعکاسی است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانی  $J$ ، پوشا باشد. فضای باناخ  $E$  اکید محدب است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانی  $J$  یک به یک باشد. برای جزئیات به منابع [16] و [17] رجوع کنید.

لم ۸.۲ . ([13]). فرض کنیم  $E$  یک فضای باناخ انعکاسی، اکید محدب و هموار باشد و  $\eta \neq 0$ . اگر  $T: E \rightarrow E$  نگاشت  $\eta$ -نیم متریک تعمیم یافته باشد، آن‌گاه  $Fix(T)$  مجموعه‌ای محدب و بسته می‌باشد.

لم ۹.۲ . ([18]). اگر  $\{s_n\}$  یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به طوری که برای هر  $i \in \mathbb{N}$ ، زیردنباله‌ای مانند  $\{n_i\}$  از  $\{n\}$  موجود باشد که  $s_{n_i} s_{n_i+1} < s_{n_i}$ . آن‌گاه زیر دنباله نانزولی مانند  $\{\tau(n)\} \subset \mathbb{N}$  موجود است به طوری که  $\tau(n) \rightarrow \infty$  و برای هر  $n \in \mathbb{N}$  (و به اندازه کافی بزرگ)

$$s_{\tau(n)} \leq s_{\tau(n)+1} \quad \text{و} \quad s_n \leq s_{\tau(n)+1}$$

درحقیقت  $\tau(n) = \max \{k \leq n : s_k < s_{k+1}\}$ .

لم ۱۰.۲ . ([19]). فرض کنیم  $\{a_n\}$  یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشد به طوری که برای هر  $i \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \leq (1 - \eta_n) a_n + \eta_n \delta_n$$

که در آن  $\{\eta_n\}$  یک دنباله در  $(0,1)$  و  $\{\delta_n\}$  دنباله‌ای در  $\mathbb{R}$  می‌باشد که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \infty \quad (\text{الف})$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n \leq 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{دراین صورت}$$

### ۳. الگوریتم و آنالیز همگرایی

در این جا قضیه اصلی این مقاله را بیان می‌نماییم.

**قضیه ۳-۱:** فرض کنیم  $H$  یک فضای هیلبرت،  $E$  و  $F$  فضاهای باناخ هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشند. اگر برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  داشته باشیم  $\zeta_i, \rho_i, k_i \neq 0$ ،  $T_i: H \rightarrow H$  خانواده‌ای از نگاشت‌های  $\zeta_i$ -نیم متریک تعمیم یافته،  $S_i: F \rightarrow F$  خانواده‌ای از نگاشت‌های  $k_i$ -نیم متریک تعمیم یافته و  $U_i: E \rightarrow E$  خانواده‌ای از نگاشت‌های  $\rho_i$ -نیم متریک تعمیم یافته باشند به‌طوری‌که  $I - T_i$ ،  $I - S_i$  و  $I - U_i$  در صفر نیم بسته می‌باشند. فرض کنیم  $A: H \rightarrow F$ ،  $B: H \rightarrow F$  عملگرهای خطی و کران دار و  $f: H \rightarrow H$  نگاشت انقباض باشد. فرض کنیم

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i) \cap A^{-1}(\text{Fix}(U_i)) \cap B^{-1}(\text{Fix}(S_i)) \neq \emptyset.$$

اگر  $\{x_n\}$  دنباله تولید شده با الگوریتم

$$\begin{cases} x_0 \in H \\ z_n = x_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i l_i A^* J_E (A x_n - U_i A x_n) \\ u_n = z_n - \sum_{i=1}^m \beta_{(n,i)} \theta_i s_i B^* J_F (B z_n - S_i B z_n) \\ y_n = u_n + \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} \mu_i r_i (T_i u_n - u_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

باشد که در آن  $l_i = \frac{\rho_i}{|\rho_i|}$ ،  $r_i = \frac{\zeta_i}{|\zeta_i|}$ ،  $s_i = \frac{k_i}{|k_i|}$  و دنباله‌های اسکالر  $\{\alpha_{(n,i)}\}$ ،  $\{\beta_{(n,i)}\}$ ،  $\{\gamma_{(n,i)}\}$ ،  $\{\theta_i\}$ ،  $\{\lambda_i\}$  و  $\{\sigma_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^m \beta_{(n,i)} = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} = 1 \quad \text{و} \quad \{\beta_{(n,i)}\}, \{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1) \quad \text{الف}$$

$$\liminf_n \gamma_{(n,i)} > 0 \quad \text{و} \quad \liminf_n \beta_{(n,i)} > 0 \quad \text{و} \quad \liminf_n \alpha_{(n,i)} > 0 \quad \text{ب}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty \quad \text{ج}$$

$$0 < \mu_i < \frac{2r_i}{\zeta_i}, \quad 0 < \theta_i < \frac{2s_i}{\|B\|^2 k_i} \quad \text{و} \quad 0 < \lambda_i < \frac{2l_i}{\|A\|^2 \rho_i} \quad \text{د}$$

آن‌گاه دنباله  $\{x_n\}$  همگرایی قوی به عضوی مانند  $x^* \in \Omega$  است که هم‌چنین جوابی از مساله نامساوی تغییراتی زیر می‌باشد:

$$\langle x^* - f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

**برهان:** توجه داریم  $P_\Omega f: H \rightarrow H$  یک نگاشت انقباض می‌باشد. بنابراین انقباض باناخ  $P_\Omega f$  دارای نقطه ثابت منحصر بفردی مانند  $x^*$  می‌باشد. با توجه به تحدب  $\|\cdot\|^2$  و با توجه به این‌که  $U_i$  نگاشت‌های  $\rho_i$ -نیم متریک تعمیم یافته می‌باشند، داریم



$$\begin{aligned}
 \|z_n - x^*\|^2 &= \left\| (x_n - x^* - \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i l_i A^* J_E (A x_n - U_i A x_n)) \right\|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \left\| (x_n - x^* - \lambda_i l_i A^* J_E (A x_n - U_i A x_n)) \right\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} ( \|x_n - x^*\|^2 - 2 \langle x_n - x^*, \lambda_i l_i A^* J_E (A x_n - U_i A x_n) \rangle \\
 &\quad + \| \lambda_i l_i A^* J_E (A x_n - U_i A x_n) \|^2 ) \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} ( \|x_n - x^*\|^2 - 2 \lambda_i l_i \langle A x_n - A x^*, J_E (A x_n - U_i A x_n) \rangle \\
 &\quad + \lambda_i^2 \|A\|^2 \| J_E (A x_n - U_i A x_n) \|^2 ) \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} ( \|x_n - x^*\|^2 - 2 \lambda_i l_i \frac{1}{\rho_i} \|A x_n - U_i A x_n\|^2 + \\
 &\quad \lambda_i^2 \|A\|^2 \|A x_n - U_i A x_n\|^2 ) \\
 &= \|x_n - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i \left( \lambda_i \|A\|^2 - \frac{2 l_i}{\rho_i} \right) \|A x_n - U_i A x_n\|^2.
 \end{aligned}$$

از آنجا که  $0 < \lambda_i < \frac{2 l_i}{\|A\|^2 \rho_i}$  داریم

$$\|z_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|.$$

به طور مشابه داریم

$$\|u_n - x^*\|^2 \leq \|z_n - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^m \beta_{(n,i)} \theta_i \left( \theta_i \|B\|^2 - \frac{2 S_i}{k_i} \right) \|B z_n - S_i B z_n\|.$$

با توجه به تحدب  $\|\cdot\|^2$  داریم

$$\begin{aligned}
 \|y_n - x^*\|^2 &\leq \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} \|u_n - x^* + \mu_i r_i (T_i u_n - u_n)\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} ( \|u_n - x^*\|^2 + (\mu_i r_i)^2 \|T_i u_n - u_n\|^2 \\
 &\quad + 2 \langle u_n - x^*, \mu_i r_i (T_i u_n - u_n) \rangle ) \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} ( \|u_n - x^*\|^2 + (\mu_i)^2 \|T_i u_n - u_n\|^2 - 2 (\mu_i r_i) \left( \frac{1}{\zeta_i} \right) \|T_i u_n - u_n\|^2 ) \\
 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} \mu_i \left( \frac{2 r_i}{\zeta_i} - \mu_i \right) \|T_i u_n - u_n\|^2.
 \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|\sigma_n f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n - x^*\| \\ &\leq \sigma_n \|f(y_n) - x^*\| + (1 - \sigma_n) \|y_n - x^*\| \\ &\leq \sigma_n \|f(y_n) - f(x^*)\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - \sigma_n) \|y_n - x^*\| \\ &\leq \sigma_n k \|y_n - x^*\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - \sigma_n) \|y_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \sigma_n(1 - k)) \|y_n - x^*\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\| \\ &\leq (1 - \sigma_n(1 - k)) \|x_n - x^*\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\|. \end{aligned}$$

با استفاده از استقرا ریاضی برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \max \left\{ \|x_0 - x^*\|, \frac{1}{1-k} \|f(x^*) - x^*\| \right\}.$$

بنابراین  $\{x_n\}$  کران دار است. علاوه بر این داریم  $\{z_n\}$ ،  $\{y_n\}$  و  $\{f(y_n)\}$  نیز کراندار می‌باشند. با توجه به روابط فوق داریم

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \sigma_n^2 \|f(y_n) - x^*\|^2 + (1 - \sigma_n)^2 \|y_n - x^*\|^2 \\ &+ \sigma_n(1 - \sigma_n) \|y_n - x^*\| \|f(y_n) - x^*\| \\ &\leq \sigma_n^2 \|f(y_n) - x^*\|^2 + \sigma_n(1 - \sigma_n) \|y_n - x^*\| \|f(y_n) - x^*\| \\ &+ (1 - \sigma_n)^2 - (1 - \sigma_n)^2 \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i \left( \frac{2l_i}{\rho_i} - \lambda_i \|A\|^2 \right) \|A x_n - U_i A x_n\|^2 \\ &- (1 - \sigma_n)^2 \sum_{i=1}^m \beta_{(n,i)} \theta_i \left( \frac{2s_i}{k_i} - \theta_i \|B\|^2 \right) \|B z_n - S_i B z_n\| \\ &- (1 - \sigma_n)^2 \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} \mu_i \left( \frac{2r_i}{\zeta_i} - \mu_i \right) \|T_i u_n - u_n\|^2. \quad (2) \end{aligned}$$

بنابراین برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  داریم:

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_n)^2 \gamma_{(n,i)} \mu_i \left( \frac{2r_i}{\zeta_i} - \mu_i \right) \|T_i u_n - u_n\|^2 \\ \leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 + \sigma_n^2 \|f(y_n) - x^*\|^2 \\ + \sigma_n(1 - \sigma_n) \|y_n - x^*\| \|f(y_n) - x^*\|. \quad (3) \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم  $x_n \rightarrow x^*$ . برای اثبات این منظور دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنیم  $\{\|x_n - x^*\|\}$  دنباله یکنوا باشد. چون  $\{\|x_n - x^*\|\}$  کران دار است بنابراین همگراست. از

آنجا که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  و با توجه به کران دار بودن  $\{f(y_n)\}$  و  $\{x_n\}$  از نامساوی (3) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i u_n - u_n\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

با استفاده از بحث مشابه، از نامساوی (2) برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A x_n - U_i A x_n\| = 0, \quad (5)$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B z_n - S_i B z_n\| = 0. \quad (6)$$

با توجه به الگوریتم (۱) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - u_n\| = 0.$$

هم چنین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - u_n\| = 0.$$

بنابراین با توجه به الگوریتم (۱) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0.$$

حال نشان می‌دهیم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_n \rangle \leq 0.$$

برای اثبات این منظور، زیر دنباله  $\{x_{n_i}\}$  از  $\{x_n\}$  را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_{n_i} \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_n \rangle.$$

چون  $\{x_{n_i}\}$  کران دار است، زیر دنباله‌ای مانند  $\{x_{n_{i_j}}\}$  از  $\{x_{n_i}\}$  موجود است که همگرای ضعیف به  $\hat{x}$  می‌باشد. بدون این که به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد  $\{x_{n_i}\}$  همگرای ضعیف به  $\hat{x}$  است. با توجه به این که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$  داریم  $\{u_{n_i}\}$  همگرای ضعیف به  $\hat{x}$  می‌باشد. از رابطه (4) و با توجه به نیم بسته بودن  $T_i - I$  داریم  $\hat{x} \in \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(T_i)$  به‌طور مشابه با استفاده از رابطه‌های (5) و (6) و با توجه به نیم بسته بودن  $S_i - I$  و  $U_i - I$  داریم:

$$A\hat{x} \in \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(U_i) \quad \text{و} \quad B\hat{x} \in \bigcap_{i=1}^m \text{Fix}(S_i)$$

بنابراین  $\hat{x} \in \Omega$ . از آنجا که  $\hat{x} \in \Omega$  و  $x^* = P_\Omega(f)x^*$  داریم

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_n \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle (I - f)x^*, x^* - x_{n_i} \rangle = \langle (I - f)x^*, x^* - \hat{x} \rangle \leq 0.$$

با استفاده از رابطه  $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle$  داریم:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|(1 - \sigma_n)(y_n - x^*)\|^2 + 2\sigma_n \langle f(y_n) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq (1 - \sigma_n)^2 \|y_n - x^*\|^2 + 2\sigma_n \langle f(y_n) - f(x^*), x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\quad + 2\sigma_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\ &\leq (1 - \sigma_n)^2 \|y_n - x^*\|^2 + 2k \sigma_n \|x_n - x^*\| \|x_{n+1} - x^*\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sigma_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
& + k\sigma_n (\|x_n - x^*\|^2 + \|x_{n+1} - x^*\|^2) \\
& \leq (1 - \sigma_n)^2 \|y_n - x^*\|^2 + 2\sigma_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
& \leq ((1 - \sigma_n)^2 + k\sigma_n) \|x_n - x^*\|^2 + k\sigma_n (\|x_{n+1} - x^*\|^2) \\
& + 2\sigma_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle
\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 & \leq \frac{1 - 2\sigma_n + (\sigma_n)^2 + k\sigma_n}{1 - k\sigma_n} \|x_n - x^*\|^2 \\
& + \frac{2\sigma_n}{1 - k\sigma_n} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
& = \left(1 - \frac{2(1 - k)\sigma_n}{1 - k\sigma_n}\right) \|x_n - x^*\|^2 + \frac{(\sigma_n)^2}{1 - k\sigma_n} \|x_n - x^*\|^2 \\
& + \frac{2\sigma_n}{1 - k\sigma_n} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
& \leq \left(1 - \frac{2(1 - k)\sigma_n}{1 - k\sigma_n}\right) \|x_n - x^*\|^2 \\
& + \left(\frac{2(1 - k)\sigma_n}{1 - k\sigma_n}\right) \left(\frac{(\sigma_n)M}{2(1 - k)} + \left(\frac{1}{1 - k} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle\right)\right) \\
& = (1 - \xi_n) \|x_n - x^*\|^2 + \eta_n \xi_n
\end{aligned}$$

که در آن  $\xi_n = \frac{2(1 - k)\sigma_n}{1 - k\sigma_n}$  و  $M = \sup_{n \geq 0} \|x_n - x^*\|^2$

$$\eta_n = \frac{(\sigma_n)M}{2(1 - k)} + \left(\frac{1}{1 - k} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle\right).$$

مشاهده می‌کنیم که  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \infty$  و  $\xi_n \rightarrow 0$ . حال بنابر لم ۱۰،۲ نتیجه می‌شود که دنباله  $\{x_n\}$  همگرای قوی به  $x^*$  است.

**حالت ۲:** فرض کنیم  $\{\|x_n - x^*\|\}$  دنباله یکنوا نباشد. دنباله  $\{\tau(n)\}$  از اعداد صحیح را برای هر  $n \geq n_0$  ( برای یک  $n_0$  به اندازه کافی بزرگ) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau(n) = \max\{k \in \mathbb{N}; k \leq n: \|x_k - x^*\| < \|x_{k+1} - x^*\|\}.$$

توجه داریم  $\{\tau(n)\}$  دنباله نازولی و  $\tau(n) \rightarrow \infty$  هنگامی که  $n \rightarrow \infty$ . برای هر  $n \geq n_0$  داریم

$$\|x_{\tau(n)} - x^*\| < \|x_{\tau(n)+1} - x^*\|.$$

حال از رابطه (۲) داریم

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 \\ & \leq (\sigma_n)^2 \|f(y_n) - x^*\|^2 + ((\sigma_n)^2 - 2\sigma_n)\|x_n - x^*\|^2 \\ & + 2\sigma_n(1 - \sigma_n)\|f(y_n) - x^*\|\|x_n - x^*\|. \end{aligned}$$

از آنجا که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  و با توجه به کرانداری  $\{f(y_n)\}$  و  $\{x_n\}$  داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_{\tau(n)+1} - x^*\|^2 - \|x_{\tau(n)} - x^*\|^2) = 0$$

با بحث مشابه آنچه در حالت ۱ بیان شد داریم

$$\|x_{\tau(n)+1} - x^*\|^2 - (1 - \xi_{\tau(n)})\|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \leq \eta_{\tau(n)} \xi_{\tau(n)}$$

که در آن  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_{\tau(n)} \leq 0$  از آنجا که  $\|x_{\tau(n)} - x^*\| < \|x_{\tau(n)+1} - x^*\|$  داریم

$$\xi_{\tau(n)} \|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \leq \xi_{\tau(n)} \eta_{\tau(n)}.$$

با توجه به این که  $\xi_{\tau(n)} > 0$  نتیجه می‌گیریم که

$$\|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \leq \eta_{\tau(n)}.$$

از  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_{\tau(n)} \leq 0$  داریم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\tau(n)} - x^*\| = 0$ . حال با استفاده از لم ۹،۲ داریم

$$0 \leq \|x_n - x^*\| \leq \max\{\|x_{\tau(n)} - x^*\|, \|x_n - x^*\|\} \leq \|x_{\tau(n)+1} - x^*\|.$$

بنابراین  $\{x_n\}$  همگرای قوی به  $x^* = P_{\Omega}(f)$  می‌باشد.

#### 4. نتایج و کاربردها

در این بخش، نتایج و کاربردهایی از قضیه اصلی را بیان می‌نماییم.

در ابتدا کاربردی از قضیه اصلی برای حل مساله امکان‌پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۴-۱:** فرض کنیم  $H$  و  $E$  فضاها هیلبرت و  $A: H \rightarrow E$  عملگرهای خطی و کران‌دار باشند. اگر  $\{C_i\}_{i=1}^m$  خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای  $H$  و  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای  $E$  باشند به طوری که  $\Omega = \bigcap_{i=1}^m (C_i \cap A^{-1}(Q_i)) \neq \emptyset$ . فرض کنیم  $f: H \rightarrow H$  نگاشت انقباض باشد. اگر  $\{x_n\}$  دنباله تولید شده با  $x_0 \in H$  و الگوریتم

$$\left\{ \begin{array}{l} z_n = x_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i A^* (A x_n - P_{Q_i} A x_n) \\ y_n = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} (P_{C_i} z_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n, \quad n \geq 0 \end{array} \right.$$

باشد که در آن دنباله‌های  $\{\alpha_{(n,i)}\}$ ،  $\{\gamma_{(n,i)}\}$  و  $\{\lambda_i\}$  و  $\{\sigma_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} = 1 \text{ و } \{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1) \quad (\text{الف})$$

$$\liminf_n \gamma_{(n,i)} > 0 \text{ و } \liminf_n \alpha_{(n,i)} > 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty \quad (\text{ج})$$

$$0 < \lambda_i \leq \frac{2}{\|A\|^2} \quad (\text{د})$$

آن‌گاه دنباله  $\{x_n\}$  همگرای قوی به  $x_0 \in \Omega$  می‌باشد.

**برهان:** توجه داریم نگاشت‌های تصویر  $P_{C_i}$  و  $P_{Q_i}$  نگاشت‌های (1) - نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد. هم‌چنین می‌دانیم

$I - P_{C_i}$  و  $I - P_{Q_i}$  در صفر نیم بسته می‌باشند. حال با قراردادن  $B = I$ ،  $S_i = I$ ،  $F = H$ ،  $\mu_i = 1$  در قضیه ۱،۳

نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

حال با استفاده از قضیه اصلی، الگوریتم زیر را برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی برای نگاشت‌های اکید شبه انقباضی در فضاهای هیلبرت ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۲-۴:** فرض کنیم  $H$  و  $E$  فضاهای هیلبرت و  $A: H \rightarrow E$  عملگر خطی و کران‌دار باشد. اگر  $T_i: H \rightarrow H$  برای

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، خانواده‌ای از نگاشت‌های  $\zeta_i$ -اکید شبه انقباضی و  $U_i: E \rightarrow E$  خانواده‌ای از نگاشت‌های  $\rho_i$ -اکید

شبه انقباضی باشند. فرض کنیم  $f: H \rightarrow H$  نگاشت انقباض باشد و داشته باشیم

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m (\text{Fix}(T_i)) \cap A^{-1}(\text{Fix}(U_i)) \neq \emptyset.$$

اگر  $\{x_n\}$  دنباله تولید شده با  $x_0 \in H$  و الگوریتم

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = x_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i A^* (A x_n - U_i A x_n) \\ y_n = u_n + \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} \mu_i (T_i u_n - u_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n, \quad n \geq 0 \end{array} \right.$$

باشد که در آن دنباله‌های  $\{\alpha_{(n,i)}\}$ ،  $\{\gamma_{(n,i)}\}$  و  $\{\lambda_i\}$  و  $\{\sigma_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} = 1 \text{ و } \{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1) \quad (\text{الف})$$

$$\liminf_n \gamma_{(n,i)} > 0 \text{ و } \liminf_n \alpha_{(n,i)} > 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty \quad (\text{ج})$$

$$0 < \mu_i < 1 - \zeta_i \text{ و } 0 < \lambda_i \leq \frac{1 - \rho_i}{\|A\|^2} \quad (\text{د})$$

آن گاه دنباله  $\{x_n\}$  همگرایی قوی به  $x_0 \in \Omega$  می‌باشد.

**برهان:** توجه داریم هر نگاشت  $\eta$ -اکید شبه انقباضی، نگاشتی  $\frac{2}{1-\eta}$  - نیم متریک تعمیم یافته است. با توجه به لم ۲،۴

داریم  $I - U_i$  و  $I - T_i$  در صفر نیم بسته می‌باشند. هم‌چنین می‌دانیم در یک فضای هیلبرت، نگاشت دوگانی برابر تابع

همانی می‌باشد. حال با قرار دادن  $\mu_i = 1, F = H, S_i = I, B = I$  در قضیه ۱،۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

فرض کنیم  $E$  یک فضای باناخ و  $A$  نگاشتی از  $E$  به  $2^{E^*}$  باشد. دامنه موثر  $A$  را با  $dom(A)$  نشان داده و عبارت است

از نگاشت  $dom(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$ . چند مقداری  $A$  روی  $E$  را یکنوا گوییم هر گاه

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$$

برای هر  $x, y \in dom(A)$  و هر  $u \in Ax, v \in Ay$

عملگر یکنوای  $A$  را ماکزیمال روی  $E$  گوییم هر گاه گراف آن به طور محض در گراف عملگر یکنوای دیگری روی  $E$  قرار

نگیرد. اگر  $E$  یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب با نرم مشتق پذیر گاتو و  $A$  عملگر یکنوای ماکزیمال از  $E$  به  $2^{E^*}$

باشد. برای هر  $x \in E$  و  $r > 0$  معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0 \in J(x_r - x) + rAx_r$$

این معادله دارای جواب منحصر به فرد  $x_r$  می‌باشد. تعریف می‌کنیم  $x_r = J_r x$ . نگاشت  $J_r$  را حلال متریک  $A$  گوییم. مجموعه نقاط

صفر  $A$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^{-1}(0) = \{z \in E : 0 \in Az\}.$$

داریم  $A^{-1}(0)$  مجموعه ای محدب و بسته می‌باشد ([16]). هم‌چنین حلال متریک  $J_r$  نگاشتی (1) - نیم متریک

تعمیم یافته می‌باشد ([14]).

در سال ۲۰۰۹ بیرنه و همکارانش [20] مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی<sup>۱</sup> را معرفی نمودند:

فرض کنیم  $H$  و  $K$  فضاهای هیلبرت و برای  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  عملگرهای خطی و کران دار باشند.

اگر  $T_i: H \rightarrow 2^H$  و  $S_i: K \rightarrow 2^K$  عملگرهای یکنوای ماکزیمال باشند. مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی عبارت است

از یافتن  $x^*$  با این ویژگی که  $x^* \in \bigcap_{i=1}^r T_i^{-1}(0)$  به طوری که برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  داشته باشیم  $A_i(x^*) \in$

$$S_i^{-1}(0)$$

در اینجا کاربردی از قضیه اصلی برای حل مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۳-۴:** فرض کنیم  $H$  و  $E$  فضاهای هیلبرت و  $A: H \rightarrow E$  عملگر خطی و کران دار باشد. اگر برای  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

<sup>1</sup> Split common null point problem

$G_i: E \rightarrow 2^E$  و  $F_i: H \rightarrow 2^H$  خانواده‌ای از عملگرهای یکنوای ماکزیمال باشند به طوری که

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^m F_i^{-1} 0 \cap A^{-1} (G_i^{-1} 0) \neq \emptyset$$

فرض کنیم برای  $\delta_i > 0$  و  $\mu_i > 0$ ،  $J_{\delta_i}^{G_i}$  و  $J_{\mu_i}^{F_i}$  به ترتیب حلال  $G_i$  و  $F_i$  باشند. فرض کنیم  $f: H \rightarrow H$  نگاشت انقباض باشد. اگر دنباله تولید شده با  $x_0 \in H$  و الگوریتم

$$\left\{ \begin{array}{l} z_n = x_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i A^* (A x_n - J_{\delta_i}^{G_i} A x_n) \\ y_n = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} (J_{\mu_i}^{F_i} z_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n, \quad n \geq 0 \end{array} \right.$$

باشد که در آن دنباله‌های  $\{\alpha_{(n,i)}\}$ ،  $\{\gamma_{(n,i)}\}$ ،  $\{\lambda_i\}$  و  $\{\sigma_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} = 1 \text{ و } \{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1) \quad (\text{الف})$$

$$\liminf_n \gamma_{(n,i)} > 0 \text{ و } \liminf_n \alpha_{(n,i)} > 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty \quad (\text{ج})$$

$$0 < \lambda_i \leq \frac{2}{\|A\|^2} \quad (\text{د})$$

آن‌گاه دنباله  $\{x_n\}$  همگرای قوی به  $x_0 \in \Omega$  می‌باشد.

**برهان:** توجه داریم عملگرهای حلال  $J_{\delta_i}^{G_i}$  و  $J_{\mu_i}^{F_i}$  نگاشت‌های (1) - نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد. هم‌چنین می‌دانیم  $I - J_{\delta_i}^{G_i}$  و  $I - J_{\mu_i}^{F_i}$  در صفر نیم بسته می‌باشند. حال با قراردادن  $I = B, S_i = I, F = H, \mu_i = 1$  در قضیه ۱،۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

در پایان، به عنوان نتیجه‌ای از قضیه اصلی، الگوریتمی برای یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های اکید شبه انقباضی و نقاط صفر مشترک خانواده‌ای از عملگرهای یکنوای ماکزیمال ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۴-۴:** فرض کنیم  $H$  یک فضای هیلبرت باشد. اگر برای  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  داشته باشیم  $\{k_i\} \subset [0, 1)$ ،  $T_i: H \rightarrow H$  نگاشت‌های  $k_i$ -اکید شبه انقباضی و  $F_i: H \rightarrow 2^H$  عملگرهای یکنوای ماکزیمال باشند به طوری که  $\Omega = \bigcap_{i=1}^m ((\text{Fix}(T_i) \cap F_i^{-1}(0))) \neq \emptyset$ . فرض کنیم برای  $\mu_i > 0$ ،  $J_{\mu_i}^{F_i}$  حلال  $F_i$  باشد. اگر  $f: H \rightarrow H$  نگاشت انقباض باشد و  $\{x_n\}$  دنباله تولید شده با الگوریتم



$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = x_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} \lambda_i (x_n - T_i x_n) \\ y_n = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} (J_{\mu_i}^{F_i} u_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n, \quad n \geq 0 \end{array} \right.$$

باشد که در آن دنباله‌های  $\{\alpha_{(n,i)}\}$ ,  $\{\gamma_{(n,i)}\}$ ,  $\{\lambda_i\}$ ,  $\{\sigma_n\}$  در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^m \gamma_{(n,i)} = 1 \text{ و } \{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1) \text{ الف}$$

$$\liminf_n \gamma_{(n,i)} > 0 \text{ و } \liminf_n \alpha_{(n,i)} > 0 \text{ ب}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty \text{ ج}$$

$$0 < \lambda_i \leq 1 - k_i \text{ د}$$

آن‌گاه دنباله  $\{x_n\}$  همگرایی قوی به  $x^* \in \Omega$  می‌باشد.

**برهان:** با قراردادن  $A = B = I$ ,  $S_i = I$ ,  $E = F = H$  و در قضیه ۱,۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

**قردانی:** این طرح تحقیقاتی با استفاده از اعتبارات ویژه پژوهشی دانشگاه علم و فناوری مازندران به شماره ۱۹۲۹۰۸۷۷ مورخ

۱۴۰۱/۰۴/۰۴ انجام شده است.

## References

- [1] Y. Censor, T. Elfving, N. Kopf, T. Bortfeld, The multiple-sets split feasibility problem and its applications., *Inverse Problems*, **21** (2005) 2071-2084.
- [2] Y. Censor, T. Elfving, A multiprojection algorithms using Bragman projection in a product space., *Numer. Algorithm*, **8** (1994), 221-239.
- [3] C. Byrne, A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction. *Inverse Problems*, **20** (2004), 103-120.
- [4] Y. Censor, T. Bortfeld, B. Martin and A. Trofimov, A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy. *Phys. Med. Biol.*, **51** (2006), 2353- 2365.
- [5] A. Moudafi, The split common fixed-point problem for demicontractive mappings. *Inverse Problem*, **26** 055007 (2010).
- [6] W. Takahashi, H.K. Xu, J.C. Yao, Iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces, *Set-Valued Var. Anal.*, **23** (2015) 205-221.
- [7] M. Eslamian, General algorithms for split common fixed point problem of demicontractive mappings. *Optimization* **65** (2016), 443-465.
- [8] M. Eslamian, Split common fixed point and common null point problem, *Math. Meth. Appl Sci.*, **40** (2017), 7410-7424.
- [9] M. Eslamian, G.Z. Eskandani, M. Raeisi, Split Common Null Point and Common Fixed Point

- Problems Between Banach Spaces and Hilbert Spaces, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14** (3), 119 (2017).
- [10] H. He., H.K. Xu, Splitting methods for split feasibility problems with application to Dantzig selectors, *Inverse Problems*, **33** (2017) 055003.
- [11] J. Deepho, P. Thounthong, P. Kumam and S. Phiangsungnoeng, A new general iterative scheme for split variational inclusion and fixed point problems of k-strict pseudo-contraction mappings with convergence analysis. *J. Comput. Appl. Math.*, **318** (2017), 293-306.
- [12] Y. Censor, A. Segal, The split common fixed point problem for directed operators, *J. Convex Ana.*, **16** (2009), 587-600.
- [13] T. Kawasaki, W. Takahashi, A strong convergence theorem for countable families of nonlinear nonself mappings in Hilbert spaces and applications, *J Nonlinear Convex Anal.* **19** (2018), 543-560.
- [14] W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for new demimetric mappings and the split common fixed point problem in Banach spaces, *Numerical Functional Analysis and ptimization*, **39** (2018), 1011-1033.
- [15] G. Marino and H. K. Xu, Weak and strong convergence theorems for strictly pseudo-contractions in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **329** (2007), 336-349.
- [16] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, (2009).
- [17] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed points*, Yokohama Publishers, Yokohama, (2000) (Japanese).
- [18] P. E. Mainge, Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization, *Set-Valued Analysis*. **16** (2008), 899-912.
- [19] H. K. Xu, Iterative algorithms for nonlinear operators, *J. Lond. Math. Soc.*, **66** (2002), 240-256.
- [20] C. Byrne, Y. Censor, A. Gibali and S. Reich, The split common null point problem, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **13** (2012), 759-775.