Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

A New Algorithm for Solving Split Common Fixed Point Problem with Applications

M. Eslamian

Department of Mathematics, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran.
E-mail: eslamian@mazust.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 11 June 2022
Accepted: 13 August 2023
Published online:
9 June 2024

Keywords:
Split common fixed point,
Demimetric mappings,
Null point problem,
Variational inequality.

ABSTRACT

Introduction

Let H and K be real Hilbert spaces, A:H→K be a bounded linear operator and let $\{ C_i \}_{i=1}^{s}$ be a family of nonempty closed convex subsets in H and $\{ Q_i \}_{i=1}^{s}$ be a family of nonempty closed convex subsets in K. The multiple-set split feasibility problem was introduced by Censor et al. (2005) and is formulated as finding a point x^* with the property: $x^* \in \bigcap_{i=1}^{s} C_i$ and $A(x^*) \in \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$. The multiple-set split feasibility problem with s= 1 is known as the split feasibility problem. The split common fixed point problem is formulated as finding a point x^* with the property: $x^* \in \mathrm{Fix}(U) := \{x \in H : Ux = x\}$ such that $A(x^*) \in \mathrm{Fix}(T) := \{x \in K : Tx = x\}$; where A:H→K is a bounded linear operator, U:H→H and T:K→K are general operators. It is worth underlining that split common fixed point problem can be regarded as a generalization of the split feasibility problem. The split feasibility problem and the split common fixed point problem have received much attention due to its applications in signal processing, approximation theory, control theory, image reconstruction, with particular progress in intensity-modulated radiation therapy. In the last decades, many iterative methods have been constructed for solving the split feasibility problem and the split common fixed point problem. Recently some authors consider these problems in Banach spaces. In this paper we study the split common fixed point problem for a finite family of generalized demimetric mappings in uniformly convex and smooth Banach spaces.

Material and Methods

Let E be a Banach space and let T:E→E be a nonlinear mapping. The mapping T:E→E is called: Lipschitz continuous with constant $L > 0$ if

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

If $0 \leq L < 1$, then T is called a contraction. If L=1, then T is called nonexpansive.

In 2000, Moudafi introduced the following so-called viscosity approximation methods:

$$x_{n+1} = a_n f(x_n) + (1 - a_n)Tx_n$$

where f is contraction and T is nonexpansive mapping. He proved that under some appropriate condition imposed on the parameters, the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to the unique solution of the variational inequality

$$\langle x^* - f\, x^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall\, x \in Fix(T).$$

In 2018, Kawasaki and Takahashi introduced a new general class of mappings, called generalized demimetric mappings as follows:

Let η be a real number with $\eta \neq 0$. A mapping T:E→E with $Fix\,(T) \neq \emptyset$ is called generalized demimetric, if

$$\eta\langle x-p,\ J(x-Tx)\ \rangle \ \geq\ \left\|x-Tx\right\|^2,\quad \forall\, x \in E,\ \ \forall\, p \in Fix(T),$$

where J is duality mapping on E. This mapping T is called η - generalized demimetric. We note that the class of generalized demimetric mappings covers the classes of well-known mappings such as strict pseudo-contraction, quasi-nonexpansive and demicontractive mappings, Moreover, many common types of mappings arising in optimization belong to this class of mappings.

Results and discussion

In this paper, by using the viscosity iterative method we present a new algorithm for solving the split common fixed point problem for a finite family of generalized demimetric mappings in uniformly convex and smooth Banach spaces. We establish strong convergence of the sequence generated by the algorithm to a solution of split common fixed point problem which also solves some variational inequality problems. Finally, we present some applications of our main result for solving the multiple-set split feasibility problem and the split null point problem**.** The result presented in the paper generalized several results in the literature.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- A new and simple iterative method for approximating the solutions of the split common fixed point problem is given. Under mild and standard assumptions, strong convergence of the new algorithm is established in the framework of Banach spaces.
- Some applications of the main result to the multiple-set split feasibility problem and split common null point problem are presented.

How to cite: Eslamian, Mohammad. (2024). A new algorithm for solving split common fixed point problem with applications. *Mathematical Researches*, **10** (1), 33 – 50.

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
پژوهش‌های ریاضی
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی و کاربردهای آن

محمد اسلامیان

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران. رایانامه: eslamian@mazust.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۳/۲۰

چکیده

مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی در فضاهای باناخ عبارت است از یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت های غیرخطی در یک فضای باناخ به طوری که تصویر آن تحت یک عملگر خطی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای دیگر از نگاشت‌های غیرخطی در یک فضای باناخ قرار می گیرد. مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی کاربردهای وسیعی در حوزه های مختلف ریاضی و علوم مهندسی به عنوان نمونه در بهینه سازی، بازسازی تصاویر، تنظیم شدت پرتودرمانی و پردازش تصاویر دارند. در این مقاله، الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی برای خانواده‌ای از عملگرهای نیم متریک تعمیم یافته در فضای باناخ هموار و به طور یکنواخت محدب ارایه می‌دهیم. سپس همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط این الگوریتم به جوابی از مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی که هم‌چنین جوابی از یک مساله نامساوی تغییراتی نیز می‌باشد را اثبات می‌نماییم. در پایان به بیان نتایج و همچنین کاربردهای قضیه اصلی مقاله در حل مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی و مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی:
مساله نقطه ثابت مشترک،
نگاشت نیم‌متریک،
مساله نقطه صفر،
مساله نامساوی تغییراتی.

استناد: اسلامیان، محمد. (۱۴۰۳). الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی و کاربردهای آن. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۱)، ۳۳ – ۵۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در سال ۲۰۰۵ سنسور و همکارانش[1] مساله ای تحت عنوان مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای[1] را به منظور مدل سازی مسایل معکوس که در بازسازی تصاویر پزشکی بدست می آید، معرفی نمودند:

فرض کنیم H و K فضاهای هیلبرت و برای $\mathrm{i}\in\{1,2,\ldots,\mathrm{r}\}$ ، $A_i: H \to K$ عملگرهای خطی و کران‌دار باشند. اگر $\{ C_j \}_{j=1}^{s}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای H و $\{ Q_i \}_{i=1}^{r}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای K باشند. مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{j=1}^{s} C_j$ به طوری که برای هر $\mathrm{i} \in \{1, 2, \ldots,\mathrm{r}\}$، داشته باشیم $A_i(x^*) \in Q_i$.

در حالتی که r=s=1، این مساله را مساله امکان پذیری شکافتنی گوییم که توسط سنسور و الفینگ [2] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. مساله امکان پذیری شکافتنی، ابتدا برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی مطرح شد. در سال‌های اخیر این مساله به خاطر کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف مانند بازسازی تصاویر، برنامه ریزی پرتودرمانی، پردازش تصاویر و بهینه سازی مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه منابع $[3 - 11]$ را ببینید.

بسیاری از مسایل در آنالیز غیرخطی، بهینه سازی و معادلات دیفرانسیل می‌تواند به فرم معادله زیر نوشته شود:

یافتن عضوی مانند x در یک فضای متریک X به طوری که $\mathrm{T(x) = x}$ ، که در آن $\mathrm{T}: X \to X$ نگاشت غیرخطی می باشد. چنین عضوی را نقطه ثابت T می‌نامیم.

در سال ۲۰۰۹ سنسور و سگال [12] مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی[2] را به عنوان تعمیمی از مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه ای ارایه داده اند. فرض کنیم H و K فضاهای هیلبرت و برای $\mathrm{i} \in \{1, 2, \ldots,\mathrm{r}\}$ ، $A_i: H \to K$ عملگرهای خطی و کران دار باشند. اگر $T_i: H \to H$ و $S_i: K \to K$ نگاشت های غیرخطی باشند. مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{i=1}^{r} Fix(T_i)$ به طوری که

$$A_i(x^*) \in Fix(S_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots,\mathrm{r}\}.$$

تاکاهاشی در سال ۲۰۱۸ رده جدیدی از نگاشت ها را معرفی نمود: ([13] و [14])

اگر E یک فضای باناخ انعکاسی، اکید محدب و هموار باشد و η عدد حقیقی ناصفر باشد. آن‌گاه نگاشت $\mathrm{T}: E \to E$ با $Fix\,(T) \neq \emptyset$ را η- نیم متریک[3] تعمیم یافته گوییم هرگاه برای هر $x \in E$ و $p \in Fix(T)$ داشته باشیم:

$$\eta\langle x - p,\ J(x - Tx) \rangle \geq \left||x - Tx|\right|^2$$

که در آن J نگاشت دوگانی می‌باشد که در بخش ۲ تعریف آن ذکرشده است. در حالتی که $\eta > 0$ این نگاشت نیم

[1] Multiple-sets split feasibility problem
[2] Split common fixed point problem
[3] Demimetric

متریک نامیده می‌شود، اخیرا، تاکاهاشی ($[13]$ و $[14]$) مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای و مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی را در فضاهای باناخ مورد مطالعه قرار داده است.

در این مقاله قصد داریم الگوریتمی جدید برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی برای یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده ای از نگاشت‌های نیم متریک تعمیم یافته در فضای هیلبرت به طوری‌که تصویر آن تحت دو عملگر خطی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده های دیگر از نگاشت‌های نیم متریک تعمیم یافته در فضاهای باناخ هموار و به طور یکنواخت محدب قرار می‌گیرد، ارایه دهیم. سپس همگرایی قوی دنباله تولید شده توسط این الگوریتم به جوابی از مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی که هم‌چنین جوابی از یک مساله نامساوی تغییراتی نیز می‌باشد، را اثبات می‌نماییم. در پایان به بیان نتایج و همچنین کاربردهای نتایج اصلی مقاله در حل مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی و مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای می‌پردازیم.

۲. تعاریف و پیش نیازهای مقدماتی

در این بخش به یادآوری برخی مفاهیم و لم های مقدماتی که در نتایج اصلی این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌پردازیم.

اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در فضای باناخ E و $x \in E$ باشد. همگرایی ضعیف $\{x_n\}$ به x را با $x_n \rightharpoonup x$ و همگرایی قوی $\{x_n\}$ به x را با $x_n \to x$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. نگاشت $\mathrm{T}: E \to E$ را غیرانبساطی گوییم هر گاه برای هر $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in E$ داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| .$$

تعریف ۲.۲. نگاشت $\mathrm{T}: E \to E$ را اکید شبه انقباضی گوییم هرگاه ثابتی مانند $\eta \in [0,1)$ موجود باشد به طوری که برای $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in E$ داشته باشیم:

$$||Tx - Ty||^2 \leq \left||x - y|\right|^2 + \eta \left||(x - Tx) - (y - Ty)|\right|^2.$$

در این صورت T را η - اکید شبه انقباضی گوییم.

مثال ۳.۲. فضای $E = \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\mathrm{T}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $Tx = 3x - 1$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $p = \frac{1}{2}$ تنها نقطه ثابت نگاشت T می باشد. نگاشت T، (-2) - نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد. در واقع برای $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ داریم

$$\eta \langle x - \tfrac{1}{2},\ (x - Tx) \rangle = (-2) \langle x - \tfrac{1}{2},\ 1 - 2x \rangle = (1 - 2x)^2 = \left||x - Tx|\right|^2.$$

هم‌چنین با قرار دادن $x = 1 , y = \frac{1}{2}$ داریم که نگاشت T اکید شبه انقباضی و غیرانبساطی نیست.

تعریف ۲. ۴ . اگر E یک فضای باناخ و $T: E\to E$ نگاشت دلخواه باشد آن‌گاه $I-T$ را نیم بسته در صفر گوییم هر گاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ در E با شرایط $x_n \rightharpoonup x$ و $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - x_n|| = 0$ داشته باشیم $x = Tx$.

لم ۲,۵ . ([15]). اگر H یک فضای هیلبرت و $T: H\to H$ نگاشتی η - اکید شبه انقباضی باشد. آنگاه $I-T$ در صفر نیم بسته است.

تعریف ۲. ۶ . فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T: X\to X$ را یک نگاشت انقباض گوییم هرگاه ثابتی مانند $k\in[0,1)$ موجود باشد به طوری که برای $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty)\le kd(x,y).$$

قضیه ۲. ۷ .(اصل انقباض باناخ). اگر (X,d) یک فضای متریک کامل و $T: X\to X$ یک نگاشت انقباض باشد، آن‌گاه T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد می باشد.

فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H و $x\in H$ باشد. دراین صورت عضو یکتایی مانند $y\in C$ موجود است به طوری که برای هر $z\in C$، $||y-x||\le ||z-x||$. y را تصویر متریک از X به C می نامیم و با $P_C x$ نشان می‌دهیم. برای هر $x\in H$ تصویر متریک $y = P_C x$ اگر و تنها اگر

$$\langle x-y, y-z\rangle \le 0, \qquad \forall z \in H.$$

داریم $P_C: H\to C$ نگاشتی غیرانبساطی می‌باشد و $Fix(P_C)=C$ (برای جزییات مرجع [16] را ببینید).

فرض کنیم E یک فضای باناخ و E^* فضای دوگان آن باشد. مقدار $y^*\in E^*$ در $x\in E$ را با $\langle x,y^*\rangle$ نشان می‌دهیم. نگاشت دوگانی J از E به 2^{E^*} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(x) = \left\{x^* \in E^* : \langle x,x^*\rangle = ||x||^2 = || x^* ||^2\right\}.$$

اگر $U = \{x \in E: \|x\| = 1\}$. آن‌گاه نرم E را مشتق پذیر گاتو گوییم هرگاه برای هر $x,y\in U$ حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}.$$

دراین حالت E را هموار گوییم.

فضای باناخ E را اکید محدب گوییم هرگاه برای هر $x,y\in E$ که $x\neq y$ از $\|x\|=\|y\|=1$ نتیجه شود

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

فضای باناخ E را به طوریکنواخت محدب گوییم هرگاه به ازای هر $2\ge\varepsilon>0$ عدد $1>\delta>0$ یافت شود به طوری

که برای هر $x, y \in E$ با شرایط $\|x-y\| \geq \varepsilon$ و $\|x\| = \|y\| = 1$ نتیجه شود

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

توجه داریم هر فضای به طور یکنواخت محدب، اکید محدب می‌باشد. هم‌چنین داریم فضاهای هیلبرت به طور یکنواخت محدب می‌باشند.

اثبات شده است که فضای باناخ E هموار است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانی J، نگاشتی تک مقداری از E به E^* باشد. هم چنین می دانیم فضای باناخ E انعکاسی است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانی J، پوشا باشد. فضای باناخ E اکید محدب است اگر و تنها اگر نگاشت دوگانی J یک به یک باشد. برای جزییات به منابع [16] و [17] رجوع کنید.

لم ۲ .۸ . ([13]) . فرض کنیم E یک فضای باناخ انعکاسی، اکید محدب و هموار باشد و $\eta \neq 0$. اگر $T: E \to E$ نگاشت η- نیم متریک تعمیم یافته باشد، آن‌گاه $Fix(T)$ مجموعه‌ای محدب و بسته می باشد.

لم ۹.۲. *([18])* . اگر $\{s_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{N}$، زیردنباله‌ای مانند $\{n_i\}$ از $\{n\}$ موجود باشد که $s_{n_i} < s_{n_i+1}$. آن‌گاه زیر دنباله نانزولی مانند $\{\tau(n)\} \subset \mathbb{N}$ موجود است به طوری‌که $\tau(n) \to \infty$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ (و به اندازه کافی بزرگ)

$$s_{\tau(n)} \leq s_{\tau(n)+1} \quad \text{و} \quad s_n \leq s_{\tau(n)+1}$$

درحقیقت $\tau(n) = max\{k \leq n : s_k < s_{k+1}\}$.

لم ۱۰,۲. *([19])* . فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشد به طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \leq (1 - \eta_n)\, a_n + \eta_n \delta_n$$

که در آن $\{\eta_n\}$ یک دنباله در $(0,1)$ و $\{\delta_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ می باشد که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \infty$

(ب) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n \leq 0$.

دراین صورت $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$.

۳. الگوریتم و آنالیز همگرایی

در این جا قضیه اصلی این مقاله را بیان می نماییم.

قضیه ۳-۱: فرض کنیم H یک فضای هیلبرت، E و F فضاهای باناخ هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشند. اگر برای هر $i \in \{1,2,\dots,m\}$ داشته باشیم $\zeta_i, \rho_i, k_i \neq 0$، $T_i: H \to H$ خانواده‌ای از نگاشت‌های ζ_i- نیم متریک تعمیم یافته، $S_i: F \to F$ خانواده ای از نگاشت‌های k_i- نیم متریک تعمیم‌یافته و $U_i: E \to E$ خانواده‌ای از نگاشت‌های ρ_i- نیم متریک تعمیم یافته باشند به‌طوری‌که $I - T_i$، $I - S_i$ و $I - U_i$ در صفر نیم بسته می‌باشند. فرض کنیم $A: H \to E$, $B: H \to F$ عملگرهای خطی و کران دار و $f: H \to H$ نگاشت انقباض باشد. فرض کنیم

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} Fix(T_i) \bigcap A^{-1}\ (Fix(U_i)) \bigcap B^{-1}\ (Fix\ (S_i)) \neq \emptyset.$$

اگر $\{x_n\}$ دنباله تولید شده با الگوریتم

$$\begin{cases} x_0 \in H \\ z_n = x_n - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)}\, \lambda_i\, l_i\ A^* J_E\ (A\, x_n - U_i\ A\, x_n) \\ u_n = z_n - \sum_{i=1}^{m} \beta_{(n,i)}\ \theta_i\ s_i\ B^* J_F\ (B\, z_n - S_i\ B\, z_n) \\ y_n = u_n + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)}\, \mu_i\ r_i\ (T_i\, u_n - u_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n\, f(y_n) + (1 - \sigma_n) y_n\ , \quad n \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

باشد که در آن $s_i = \frac{k_i}{|k_i|}$, $r_i = \frac{\zeta_i}{|\zeta_i|}$, $l_i = \frac{\rho_i}{|\rho_i|}$ و دنباله‌های اسکالر $\{\alpha_{(n,i)}\}$، $\{\beta_{(n,i)}\}$، $\{\gamma_{(n,i)}\}$، $\{\lambda_i\}$، $\{\theta_i\}$ و $\{\sigma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $\{\beta_{(n,i)}\}, \{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1)$ و $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{(n,i)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} = 1$

ب $\liminf_n \alpha_{(n,i)} > 0$ و $\liminf_n \beta_{(n,i)} > 0$ و $\liminf_n \gamma_{(n,i)} > 0$

ج) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty$

د) $0 < \lambda_i < \frac{2\, l_i}{\|A\|^2\, \rho_i}$ و $0 < \theta_i < \frac{2 s_i}{\|B\|^2\, k_i}$, $0 < \mu_i < \frac{2\, r_i}{\zeta_i}$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به عضوی مانند $x^* \in \Omega$ است که هم‌چنین جوابی از مساله نامساوی تغییراتی زیر می‌باشد:

$$\langle\, x^* - f\,(x^*)\,, x - x^*\ \rangle \geq 0 \ \ \forall\, x \in \Omega.$$

برهان: توجه داریم $P_\Omega f: H \to H$ یک نگاشت انقباض می‌باشد. بنابراصل انقباض باناخ $P_\Omega f$ دارای نقطه ثابت منحصر به‌فردی مانند x^* می‌باشد. با توجه به تحدب $\|.\|^2$ و با توجه به این‌که U_i نگاشت‌های ρ_i- نیم متریک تعمیم‌یافته می‌باشند، داریم

$$\|z_n - x^*\|^2 = \| (x_n - x^* - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)}\, \lambda_i\, l_i\, A^* J_E\, (A\, x_n - U_i\, A\, x_n))\|^2$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} \| (x_n - x^* - \lambda_i\, l_i\, A^* J_E\, (A\, x_n - U_i\, A\, x_n))\|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} (\| x_n - x^*\|^2 - 2\langle x_n - x^*, \lambda_i\, l_i\, A^* J_E\, (A\, x_n - U_i\, A\, x_n) \rangle$$
$$+ \| \lambda_i\, l_i\, A^* J_E\, (A\, x_n - U_i\, A\, x_n)\|^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} (\| x_n - x^*\|^2 - 2\, \lambda_i\, l_i\, \langle Ax_n - Ax^*, J_E\, (A\, x_n - U_i\, A\, x_n) \rangle$$
$$+\lambda_i^{\,2}\|A\|^2 \| J_E\, (A\, x_n - U_i\, A\, x_n)\|^2)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} (\| x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_i\, l_i\, \frac{1}{\rho_i} \| A\, x_n - U_i\, A\, x_n \|^2 +$$
$$\lambda_i^{\,2}\|A\|^2 \| A\, x_n - U_i\, A\, x_n \|^2)$$
$$= \| x_n - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)}\, \lambda_i \left(\lambda_i\|A\|^2 - \frac{2\, l_i}{\rho_i} \right) \| A\, x_n - U_i\, A\, x_n \|^2.$$

از آنجا که $\frac{2\, l_i}{\|A\|^2\, \rho_i} > \lambda_i > 0$ داریم

$$\|z_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|.$$

به طور مشابه داریم

$$\|u_n - x^*\|^2 \leq \|z_n - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \beta_{(n,i)}\, \theta_i \left(\theta_i\, \|B\|^2 - \frac{2\, s_i}{k_i} \right) \| Bz_n - S_i\, Bz_n \|.$$

با توجه به تحدب $\|.\|^2$ داریم

$$\|y_n - x^*\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} \| u_n - x^* + \mu_i\, r_i\, (T_i\, u_n - u_n)\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} (\|u_n - x^*\|^2 + (\mu_i\, r_i)^2\|T_i\, u_n - u_n\|^2$$

$$+ 2\, \langle u_n - x^*, \mu_i\, r_i\, (T_i\, u_n - u_n)\rangle)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} (\|u_n - x^*\|^2 + (\mu_i)^2\|T_i\, u_n - u_n\|^2 - 2\, (\mu_i\, r_i) \left(\frac{1}{\zeta_i} \right) \|T_i\, u_n - u_n\|^2$$

$$\leq \|u_n - x^*\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)}\, \mu_i \left(\frac{2\, r_i}{\zeta_i} - \mu_i \right) \|T_i\, u_n - u_n\|^2 .$$

این ایجاب می‌کند که

$$\|x_{n+1}-x^*\| = \|\sigma_n f(y_n) + (1-\sigma_n)\ y_n - x^*\|$$
$$\leq \sigma_n \|f(y_n) - x^*\| + (1-\sigma_n)\ \|y_n - x^*\|$$
$$\leq \sigma_n \|f(y_n) - f(x^*)\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\| + (1-\sigma_n)\ \|y_n - x^*\|$$
$$\leq \sigma_n k \|y_n - x^*\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\| + (1-\sigma_n)\ \|y_n - x^*\|$$
$$\leq \big(1-\sigma_n(1-k)\big)\|y_n - x^*\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\|$$
$$\leq \big(1-\sigma_n(1-k)\big)\|x_n - x^*\| + \sigma_n \|f(x^*) - x^*\|.$$

با استفاده از استقرا ریاضی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leq \max\ \{\ \|x_0 - x^*\|, \tfrac{1}{1-k}\|f(x^*) - x^*\|\}.$$

بنابراین $\{x_n\}$ کران دار است. علاوه براین داریم $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ و $\{f(y_n)\}$ نیز کراندار می‌باشند. با توجه به روابط فوق داریم

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leq \sigma_n{}^2\ \|f(y_n) - x^*\|^2 + (1-\sigma_n)^2\ \|y_n - x^*\|^2$$
$$+\sigma_n(1-\sigma_n)\|y_n - x^*\|\|f(y_n) - x^*\|$$
$$\leq \sigma_n{}^2\ \|f(y_n) - x^*\|^2 + \sigma_n(1-\sigma_n)\|y_n - x^*\|\|f(y_n) - x^*\|$$
$$+ (1-\sigma_n)^2 - (1-\sigma_n)^2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)}\lambda_i\left(\frac{2\,l_i}{\rho_i} - \lambda_i\|A\|^2\right)\|A x_n - U_i A x_n\|^2$$
$$- (1-\sigma_n)^2 \sum_{i=1}^{m} \beta_{(n,i)}\theta_i \left(\frac{2\,s_i}{k_i} - \theta_i\|B\|^2\right)\|Bz_n - S_i Bz_n\|$$
$$- (1-\sigma_n)^2 \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)}\mu_i\left(\frac{2\,r_i}{\zeta_i} - \mu_i\right)\|T_i u_n - u_n\|^2. \quad \textbf{(2)}$$

بنابراین برای هر $i \in \{1,2,...m\}$ داریم:

$$(1-\sigma_n)^2 \gamma_{(n,i)}\mu_i\left(\frac{2\,r_i}{\zeta_i} - \mu_i\right)\|T_i u_n - u_n\|^2$$
$$\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1}-x^*\|^2 + \sigma_n{}^2\ \|f(y_n) - x^*\|^2$$
$$+\sigma_n(1-\sigma_n)\|y_n - x^*\|\|f(y_n) - x^*\|. \quad \textbf{(3)}$$

حال نشان می‌دهیم $x_n \to x^*$. برای اثبات این منظور دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنیم $\{\|x_n - x^*\|\}$ دنباله یکنوا باشد. چون $\{\|x_n - x^*\|\}$ کران دار است بنابراین همگراست. از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$ و با توجه به کران دار بودن $\{f(y_n)\}$, $\{x_n\}$ از نامساوی (3) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\|T_i u_n - u_n\| = 0,\ \ i = 1,2,\dots,m. \qquad \textbf{(4)}$$

با استفاده از بحث مشابه، از نامساوی (2) برای هر $i \in \{1,2,...m\}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \| A\, x_n - U_i\, A\, x_n \| = 0, \qquad \textbf{(5)}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \| Bz_n - S_i\, Bz_n \| = 0. \quad \textbf{(6)}$$

با توجه به الگوریتم (۱) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n - u_n\| = 0.$$

هم چنین

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - u_n\| = 0.$$

بنابراین با توجه به الگوریتم (۱) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0.$$

حال نشان می‌دهیم:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_n \rangle \le 0.$$

برای اثبات این منظور، زیردنباله $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\lim_{i\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_{n_i} \rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_n \rangle.$$

چون $\{x_{n_i}\}$ کران دار است، زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_{i_j}}\}$ از $\{x_{n_i}\}$ موجود است که همگرای ضعیف به $\hat{x}$ می‌باشد. بدون این که به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $\{x_{n_i}\}$ همگرای ضعیف به $\hat{x}$ است. با توجه به این که $\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0$ داریم $\{u_{n_i}\}$ همگرای ضعیف به $\hat{x}$ می‌باشد. از رابطه (4) و با توجه به نیم بسته بودن $T_i - I$ داریم $\hat{x} \epsilon \bigcap_{i=1}^{m} Fix\,(T_i)$ به‌طور مشابه با استفاده از رابطه‌های (5) و (6) و با توجه به نیم بسته بودن $S_i - I$ و $U_i - I$ داریم:

$$A\hat{x} \epsilon \bigcap_{i=1}^{m} Fix\,(U_i) \text{ و } B\hat{x} \epsilon \bigcap_{i=1}^{m} Fix\,(S_i)$$

بنابراین $\hat{x} \epsilon \Omega$. از آن‌جا که $\hat{x} \in \Omega$ و $x^* = P_\Omega(f)x^*$ داریم

$$\limsup_{n\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_n \rangle = \lim_{i\to\infty} \langle (I-f)x^*, x^* - x_{n_i} \rangle = \langle (I-f)x^*, x^* - \hat{x} \rangle \le 0.$$

با استفاده از رابطه $||x + y||^2 \le ||x||^2 + 2\langle y, x + y \rangle$ داریم:

$$||x_{n+1} - x^*||^2 \le ||(1-\sigma_n)(y_n - x^*)||^2 + 2\sigma_n \langle f(y_n) - x^*,\ x_{n+1} - x^* \rangle$$
$$\le (1-\sigma_n)^2 ||(y_n - x^*)||^2 + 2\sigma_n \langle f(y_n) - f(x^*),\ x_{n+1} - x^* \rangle$$
$$+ 2\sigma_n \langle f(x^*) - x^*,\ x_{n+1} - x^* \rangle$$
$$\le (1-\sigma_n)^2 ||(y_n - x^*)||^2 + 2k\,\sigma_n\, \|x_n - x^*\| \|x_{n+1} - x^*\|$$

$$+ 2\sigma_n\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle$$
$$+k\ \sigma_n\ (||\ \ x_n - x^*\ \ ||^2 + ||\ \ x_{n+1} - x^*||\ ^2)$$
$$\leq\ (1-\sigma_n)^2||(y_n - x^*)||^2 +\ 2\sigma_n\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle$$
$$\leq ((1-\sigma_n)^2 + k\sigma_n)\ ||(x_n - x^*)||^2 + k\ \sigma_n\ (||\ \ x_{n+1} - x^*||\ ^2)$$
$$+ 2\sigma_n\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle$$

این ایجاب می‌کند

$$||x_{n+1} - x^*||^2 \leq \frac{1-2\sigma_n + (\sigma_n)^2 + k\sigma_n}{1-k\sigma_n}||x_n - x^*||^2$$
$$+\frac{2\sigma_n}{1-k\sigma_n}\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle$$
$$= \left(1 - \frac{2(1-k)\sigma_n}{1-k\sigma_n}\right)||x_n - x^*||^2 + \frac{(\sigma_n)^2}{1-k\sigma_n}||x_n - x^*||^2$$
$$+\frac{2\sigma_n}{1-\ k\sigma_n}\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle$$
$$\leq \left(1 - \frac{2(1-k)\sigma_n}{1-k\sigma_n}\right)||x_n - x^*||^2$$
$$+(\frac{2(1-k)\sigma_n}{1-k\sigma_n})(\frac{(\sigma_n)M}{2(1-k)}+(\frac{1}{1-k}\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle))$$
$$= (1-\xi_n)||x_n - x^*||^2 + \eta_n\xi_n$$

که در آن $M = \underset{n\geq 0}{Sup}\,||x_n - x^*||^2$ و $\xi_n = \frac{2(1-k)\sigma_n}{1-k\sigma_n}$ و

$$\eta_n = \frac{(\sigma_n)M}{2(1-k)} + (\frac{1}{1-k}\langle f(x^*) - x^*,\ \ x_{n+1} - x^*\rangle).$$

مشاهده می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n = \infty$ و $\xi_n \to 0$. حال بنابر لم ۱۰،۲ نتیجه می‌شود که دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به x^* است.

حالت ۲: فرض کنیم $\{||x_n - x^*||\}$ دنباله یکنوا نباشد. دنباله $\{\tau(\mathrm{n})\}$ از اعداد صحیح را برای هر $\mathrm{n}\geq\mathrm{n}_0$ (برای یک n_0 به اندازه کافی بزرگ) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau(\mathrm{n}) = \max\{\mathrm{k} \in \mathbb{N}; \mathrm{k} \leq n: \|x_k -\ x^*\| < \|x_{k+1} -\ x^*\|\}.$$

توجه داریم $\{\tau(\mathrm{n})\}$ دنباله نانزولی و $\tau(\mathrm{n}) \to \infty$ هنگامی که $\mathrm{n} \to \infty$. برای هر $\mathrm{n}\geq n_0$ داریم

$$||x_{\tau(\mathrm{n})}\ -\ x^*||\ < ||x_{\tau(\mathrm{n})+1}\ -\ x^*||\,.$$

حال از رابطه (۲) داریم

$\|x_{n+1}-x^*\|^2 - \|x_n-x^*\|^2$
$\leq (\sigma_n)^2 \ \|f(y_n)-x^*\|^2 + ((\sigma_n)^2-2\sigma_n)\|x_n-x^*\|^2$
$+2\sigma_n(1-\sigma_n)\|f(y_n)-x^*\|\|x_n-x^*\|$.

از آنجا که $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$ و با توجه به کرانداری $\{f(y_n)\}$ و $\{x_n\}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}(\|x_{\tau(n)+1}-x^*\|^2 - \|x_{\tau(n)}-x^*\|^2) = 0$$

با بحث مشابه آنچه در حالت ۱ بیان شد داریم

$$\|x_{\tau(n)+1}-x^*\|^2 - (1-\xi_{\tau(n)})\|x_{\tau(n)}-x^*\|^2 \leq \eta_{\tau(n)}\xi_{\tau(n)}$$

که در آن $\limsup_{n\to\infty} \eta_{\tau(n)} \leq 0$. از آنجا که $\|x_{\tau(n)}-x^*\| < \|x_{\tau(n)+1}-x^*\|$ داریم

$$\xi_{\tau(n)} \ \|x_{\tau(n)}-x^*\|^2 \leq \xi_{\tau(n)} \ \eta_{\tau(n)}.$$

با توجه به این که $\xi_{\tau(n)} > 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$\|x_{\tau(n)}-x^*\|^2 \leq \eta_{\tau(n)}.$$

از $\limsup_{n\to\infty} \eta_{\tau(n)} \leq 0$ داریم $\lim_{n\to\infty}\|x_{\tau(n)}-x^*\| = 0$. حال با استفاده از لم ۹،۲ داریم

$$0 \leq \|x_n - x^*\| \leq \max\{\|x_{\tau(n)}-x^*\|, \|x_n-x^*\|\} \leq \|x_{\tau(n)+1}-x^*\|.$$

بنابراین $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* = P_\Omega(f)x^*$ می باشد.

4. نتایج و کاربردها

در این بخش، نتایج و کاربردهایی از قضیه اصلی را بیان می نماییم.
در ابتدا کاربردی از قضیه اصلی برای حل مساله امکان پذیری شکافتنی چند مجموعه‌ای ارایه می‌دهیم.

قضیه۴-۱: فرض کنیم H و E فضاهای هیلبرت و $A: H \to E$ عملگرهای خطی و کران‌دار باشند. اگر $\{C_i\}_{i=1}^m$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای H و $\{Q_i\}_{i=1}^m$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و ناتهی از فضای E باشند به‌طوری‌که $\Omega = \bigcap_{i=1}^m (C_i \cap A^{-1}(Q_i)) \neq \emptyset$. فرض کنیم $f: H \to H$ نگا شت انقباض باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله تولید شده با $x_0 \in H$ و الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)}\, \lambda_i \; A^* \; \left(A\, x_n - P_{Q_i} A\, x_n \right) \\ y_n = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} \quad \left(P_{C_i} \;\; z_n \right) \\ x_{n+1} = \sigma_n\, f(y_n) + (1-\sigma_n)\, y_n \;, \qquad n\geq 0 \end{cases}$$

باشد که در آن دنباله‌های $\{\alpha_{(n,i)}\}$، $\{\gamma_{(n,i)}\}$، $\{\lambda_i\}$ و $\{\sigma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $\{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1)$ و $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} = 1$.

ب) $\liminf_{n} \;\alpha_{(n,i)} > 0$ و $\liminf_{n} \;\gamma_{(n,i)} > 0$.

ج) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0,\; \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty$.

د) $0 < \lambda_i \leq \frac{2}{\|A\|^2}$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x_0 \in \Omega$ می‌باشد.

برهان: توجه داریم نگاشت های تصویر P_{C_i} و P_{Q_i} نگاشت های (1)- نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد. هم‌چنین می‌دانیم $I - P_{C_i}$ و $I - P_{Q_i}$ در صفر نیم بسته می‌باشند. حال با قراردادن $\mu_i = 1,\; F = H,\; S_i = I, B = I$ در قضیه ۱،۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

حال با استفاده از قضیه اصلی، الگوریتم زیر را برای حل مساله نقطه ثابت مشترک شکافتنی برای نگاشت‌های اکید شبه انقباضی در فضاهای هیلبرت ارایه می‌دهیم.

قضیه۴-۲ : فرض کنیم H و E فضاهای هیلبرت و $A: H \to E$ عملگر خطی و کران‌دار باشد. اگر $T_i: H \to H$ برای $i \in \{1,2,\dots,m\}$ ، خانواده‌ای از نگاشت‌های ζ_i- اکید شبه انقباضی و $U_i: E \to E$ خانواده ای از نگاشت های ρ_i- اکید شبه انقباضی باشند. فرض کنیم $f: H \to H$ نگاشت انقباض باشد و داشته باشیم

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} (Fix(T_i)) \; \bigcap A^{-1} \; (Fix(U_i)) \neq \emptyset.$$

اگر $\{x_n\}$ دنباله تولید شده با $x_0 \in H$ و الگوریتم

$$\begin{cases} u_n = x_n - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)}\, \lambda_i \; A^* \; \left(A\, x_n - U_i\; A\, x_n \right) \\ y_n = u_n + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)}\, \mu_i \quad (T_i\, u_n - u_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n\, f(y_n) + (1-\sigma_n)\, y_n \;, \qquad n\geq 0 \end{cases}$$

باشد که در آن دنباله‌های $\{\alpha_{(n,i)}\}$، $\{\gamma_{(n,i)}\}$، $\{\lambda_i\}$ و $\{\sigma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $\{\gamma_{(n,i)}\}, \{\alpha_{(n,i)}\} \subset (0,1)$ و $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} = 1$

ب) $\liminf_{n} \alpha_{(n,i)} > 0$ و $\liminf_{n} \gamma_{(n,i)} > 0$

ج) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \ \ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty$

د) $0 < \lambda_i \leq \frac{1-\rho_i}{||A||^2}$ و $0 < \mu_i < 1 - \zeta_i$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x_0 \in \Omega$ می‌باشد.

برهان: توجه داریم هر نگاشت η- اکید شبه انقباضی، نگاشتی $\frac{2}{1-\eta}$ - نیم متریک تعمیم یافته است. با توجه به لم ۴،۲ داریم $I - T_i$ و $I - U_i$ در صفر نیم بسته می باشند. هم‌چنین می‌دانیم در یک فضای هیلبرت، نگاشت دوگانی برابر تابع همانی می باشد. حال با قرار دادن $\mu_i = 1, \ F = H, S_i = I, B = I$ در قضیه ۱،۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

فرض کنیم E یک فضای باناخ و A نگاشتی از E به 2^{E^*} باشد. دامنه موثر A را با $dom(A)$ نشان داده و عبارت است از نگاشت $dom(A) = \{x \in E: Ax \neq \emptyset\}$. چند مقداری A روی E را یکنوا گوییم هرگاه

$$\langle x - y, u - v\rangle \geq 0$$

برای هر $x, y \in dom(A)$ و هر $u \in Ax, \ v \in Ay$.

عملگر یکنوای A را ماکزیمال روی E گوییم هر گاه گراف آن به طور محض در گراف عملگر یکنوای دیگری روی E قرار نگیرد. اگر E یک فضای باناخ به طوریکنواخت محدب با نرم مشتق پذیر گاتو و A عملگر یکنوای ماکزیمال از E به 2^{E^*} باشد. برای هر $x \in E$ و $r > 0$ معادله زیر را درنظر می‌گیریم:

$$0 \in J(x_r - x) + rAx_r$$

این معادله دارای جواب منحصر به فرد x_r می باشد. تعریف می‌کنیم $x_r = J_r x$. نگاشت J_r را حلال متریک A گوییم. مجموعه نقاط صفر A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^{-1}(0) = \{ z \in E: 0 \in Az\}.$$

داریم $A^{-1}(0)$ مجموعه ای محدب و بسته می باشد ([16]). هم‌چنین حلال متریک J_r نگاشتی (1)- نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد ([14]).

در سال ۲۰۰۹ بیرنه و همکارانش *[20]* مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی [1] را معرفی نمودند:

فرض کنیم H و K فضاهای هیلبرت و برای $i \in \{1, 2, ..., r\}$ ، $A_i: H \to K$ عملگرهای خطی و کران دار باشند. اگر $T_i: H \to 2^H$ و $S_i: K \to 2^K$ عملگرهای یکنوای ماکزیمال باشند. مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی عبارت است از یافتن x^* با این ویژگی که $x^* \in \bigcap_{i=1}^{r} T_i^{-1}(0)$ به‌طوری‌که برای هر $i \in \{1, 2, ..., r\}$ داشته باشیم $A_i(x^*) \in S_i^{-1}(0)$.

در اینجا کاربردی از قضیه اصلی برای حل مساله نقطه صفر مشترک شکافتنی ارایه می‌دهیم.

قضیه۴-۳: فرض کنیم H و E فضاهای هیلبرت و $A: H \to E$ عملگر خطی و کران دار باشد. اگر برای $i \in \{1,2, \dots, m\}$

[1] Split common null point problem

$\mathrm{F}_i: H \to 2^H$ و $G_i: E \to 2^E$ خانواده‌ای از عملگرهای یکنوای ماکزیمال باشند به طوری که

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} F_i^{-1} 0 \ \cap A^{-1} \ (G_i^{-1} 0) \neq \emptyset.$$

فرض کنیم برای $\mu_i > 0$ و $\delta_i > 0$، $J_{\mu_i}^{F_i}$ و $J_{\delta_i}^{G_i}$ به ترتیب حلال F_i و G_i باشند. فرض کنیم $f: H \to H$ نگاشت انقباض باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله تولید شده با $x_0 \in H$ و الگوریتم

$$\begin{cases} z_n = x_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} \lambda_i \ A^* \ \left(A\, x_n - J_{\delta_i}^{G_i} A\, x_n \right) \\ y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} \ \ (J_{\mu_i}^{F_i} \ z_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1-\sigma_n) y_n \ , \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

باشد که در آن دنباله‌های $\{\alpha_{(n,i)}\}$، $\{\gamma_{(n,i)}\}$، $\{\lambda_i\}$ و $\{\sigma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $\{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1)$ و $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} = 1$

ب) $\liminf_{n} \ \alpha_{(n,i)} > 0$ و $\liminf_{n} \ \gamma_{(n,i)} > 0$

ج) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty$

د) $0 < \lambda_i \leq \frac{2}{||A||^2}$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x_0 \in \Omega$ می‌باشد.

برهان: توجه داریم عملگرهای حلال $J_{\mu_i}^{F_i}$ و $J_{\delta_i}^{G_i}$ نگاشت های (1)- نیم متریک تعمیم یافته می‌باشد. هم‌چنین می‌دانیم $I - J_{\mu_i}^{F_i}$ و $I - J_{\delta_i}^{G_i}$ در صفر نیم بسته می‌باشند. حال با قراردادن $\mu_i = 1, F = H, S_i = I, B = I$ در قضیه ۱،۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

در پایان، به عنوان نتیجه‌ای از قضیه اصلی، الگوریتمی برای یافتن عضوی در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت های اکید شبه انقباضی و نقاط صفر مشترک خانواده ای از عملگرهای یکنوای ماکزیمال ارایه می‌دهیم.

قضیه۴-۴ : فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. اگر برای $i \in \{1,2,\dots,m\}$ داشته باشیم $\{k_i\} \subset [0,1)$، $T_i: H \to H$ نگاشت‌های k_i- اکید شبه انقباضی و $\mathrm{F}_i: H \to 2^H$ عملگرهای یکنوای ماکزیمال باشند به طوری‌که $\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} ((Fix(T_i) \ \cap F_i^{-1} \ (0)) \neq \emptyset$. فرض کنیم برای $\mu_i > 0$ ، $J_{\mu_i}^{F_i}$ حلال F_i باشد. اگر $f: H \to H$ نگاشت انقباض باشد و $\{x_n\}$ دنباله تولید شده با الگوریتم

$$\begin{cases} u_n = x_n - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} \lambda_i \quad (x_n - T_i \ x_n) \\ y_n = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} \quad (J_{\mu_i}^{F_i} u_n) \\ x_{n+1} = \sigma_n f(y_n) + (1-\sigma_n) y_n \ , \qquad n\geq 0 \end{cases}$$

باشد که در آن دنباله‌های $\{\alpha_{(n,i)}\}$، $\{\gamma_{(n,i)}\}$، $\{\lambda_i\}$ ، $\{\sigma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند

الف) $\{\alpha_{(n,i)}\}, \{\gamma_{(n,i)}\} \subset (0,1)$ و $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{(n,i)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{(n,i)} = 1$

ب) $\liminf_n \ \alpha_{(n,i)} > 0$ و $\liminf_n \ \gamma_{(n,i)} > 0$

ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \infty$ ، $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0,$

د) $0 < \lambda_i \leq 1 - k_i$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای قوی به $x^* \in \Omega$ می‌باشد.

برهان: با قراردادن $A = B = I$، و $S_i = I \ E = F = H$ در قضیه ۱,۳ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

قدردانی: این طرح تحقیقاتی با استفاده از اعتبارات ویژه پژوهشی دانشگاه علم و فناوری مازندران به شماره ۱۹۲۹۰۸۷۷ مورخ ۱۴۰۱/۰۴/۰۴ انجام شده است.

References

[1] Y. Censor, T. Elfving, N. Kopf, T. Bortfeld, The multiple-sets split feasibility problem and its applications., Inverse Problems. **21** (2005) 2071-2084.

[2] Y. Censor, T. Elfving, A multiprojection algorithms using Bragman projection in a product space., Numer. Algorithm, **8** (1994), 221-239.

[3] C. Byrne, A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction. Inverse Problems., **20** (2004), 103-120.

[4] Y. Censor, T. Bortfeld, B. Martin and A. Trofimov, A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy. Phys. Med. Biol., **51** (2006), 2353- 2365.

[5] A. Moudafi, The split common fixed-point problem for demicontractive mappings. Inverse Problem., **26** 055007 (2010).

[6] W. Takahashi, H.K. Xu, J.C. Yao, Iterative methods for generalized split feasibility problems in Hilbert spaces, Set-Valued Var. Anal., **23** (2015) 205-221.

[7] M. Eslamian, General algorithms for split common fixed point problem of demicontractive mappings. Optimization **65** (2016), 443–465.

[8] M. Eslamian, Split common fixed point and common null point problem, Math. Meth. Appl Sci., **40** (2017), 7410-7424.

[9] M. Eslamian, G.Z. Eskandani, M. Raeisi, Split Common Null Point and Common Fixed Point

Problems Between Banach Spaces and Hilbert Spaces, Mediterranean Journal of Mathematics, **14** (3), 119 (2017).

[10] H. He,, H.K. Xu, Splitting methods for split feasibility problems with application to Dantzig selectors, Inverse Problems, **33** (2017) 055003.

[11] J. Deepho, P. Thounthong, P. Kumam and S. Phiangsungnoeng, A new general iterative scheme for split variational inclusion and fixed point problems of k-strict pseudo-contraction mappings with convergence analysis. J. Comput. Appl. Math., **318** (2017), 293-306.

[12] Y. Censor, A. Segal, The split common fixed point problem for directed operators, J.Convex Ana., **16** (2009), 587-600.

[13] T. Kawasaki, W. Takahashi, A strong convergence theorem for countable families of nonlinear nonself mappings in Hilbert spaces and applications, J Nonlinear Convex Anal. **19** (2018), 543-560.

[14] W.Takahashi, Weak and strong convergence theorems for new demimetric mappings and the split common fixed point problem in Banach spaces, Numerical Functional Analysis and ptimization, **39** (2018), 1011-1033.

[15] G. Marino and H. K. Xu, Weak and strong convergence theorems for strictly pseudo-contractions in Hilbert spaces. J. Math. Anal. Appl., **329** (2007), 336-349.

[16] W.Takahashi, Introduction to Nonlinear and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, (2009).

[17] W. Takahashi, Convex Analysis and Approximation of Fixed points, Yokohama Publishers, Yokohama, (2000) (Japanese).

[18] P. E. Mainge, Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization, Set-Valued Analysis. **16** (2008), 899-912.

[19] H. K. Xu, Iterative algorithms for nonlinear operators, J. Lond. Math. Soc., **66** (2002), 240-256.

[20] C. Byrne, Y. Censor, A. Gibali and S. Reich, The split common null point problem, J. Nonlinear Convex Anal., **13** (2012), 759-775.