Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Quasi-Semiprime Comultiplication Modules over Pullback

F. Farzalipour[1], P. **Ghiasvand**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: f_farzalipour@pnu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: p_ghiasvand@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 5 August 2022
Received in revised form: 11 July 2023
Accepted: 10 August 2023
Published online: 10 July 2024

Keywords:
Dedekind domain,
Pullback ring,
Separated module,
Separated module.

ABSTRACT

Introduction

The idea of investigating a mathematical structure via its representations in simpler structures is commonly used and often successful. One of the aims of the modern representation theory is to solve classification problems for subcategories of modules over a unitary ring R.

Let $v_1: R_1 \longrightarrow \bar{R}$ and $v_2: R_2 \longrightarrow \bar{R}$ be a homomorphism of two local Dedekind domains R_i, $i = 1,2$, onto a common field $\bar{R}$. Denote the pullback $R = \{(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2 : v_1(r_1) = v_2(r_2)\}$ by $(R_1 \xrightarrow{v_1} \bar{R} \xleftarrow{v_2} R_2)$. Then R is a ring under coordinate-wise multiplication. Denote the kernel of v_i, $i = 1,2$, by P_i. Then $Ker(R \longrightarrow \bar{R}) = P = P_1 \times P_2$, $R/P \cong \bar{R} \cong R_1/P_1 \cong R_2/P_2$, and $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ (so R is not a domain). Furthermore, for $i \neq j$, $0 \longrightarrow P_i \longrightarrow R \longrightarrow R_j \longrightarrow 0$ is a exact sequence of R-modules. In the present article, we introduce a new class of R-modules, called quasi-semiprime comultiplication modules, and we study it in details from the classification problem point of view. We are mainly interested in case either R is a Dedekind domain or R is a pullback of two local Dedekind domains. First, we give a complete description of the quasi-semiprime comultiplication modules over a local Dedekind domain. Let R be a pullback of two local Dedekind domains over a common factor field. Next, the main purpose of this paper is to give a complete description of the indecomposable quasi-semiprime comultiplication R-modules with finite-dimensional top over $R/rad(R)$ (for any module M we define its top as $M/rad(R)M$).

Material and Methods

The classification is divided into two stages: the description of all indecomposable separated quasi-semiprime comultiplication R-modules and then, using this list of separated quasi-semiprime comultiplication modules, we show that non-separated indecomposable quasi-semiprime comultiplication R-modules with finite-dimensional top are factor modules of finite direct sums of separated indecomposable quasi-semiprime comultiplication R -modules. Then we use the classification of separated indecomposable quasi-semiprime comultiplication modules with results of Levy on the possibilities for amalgamating finitely generated separated modules, to classify the non-separated indecomposable quasi-semiprime comultiplication modules M with finite-dimensional top.

Results and discussion

We collect basic properties concerning quasi-semiprime comultiplication modules. Then we classify quasi-semiprime comultiplication modules over a local Dedekind domain. Finally, we descript all indecomposable separated quasi-semiprime comultiplication R-modules and we find the indecomposable non-separated quasi-semiprime comultiplication modules with finite-dimensional top.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The class of quasi-semiprime comultiplication modules contains the class of semiprime comultiplication modules, and the class semiprime comultiplication modules contains the class weak comultiplication modules.
- The non-separated indecomposable quasi-semiprime comultiplication R-modules with finite-dimensional top are factor modules of finite direct sums of separated indecomposable quasi-semiprime comultiplication R-modules.

How to cite: Farzalipour, Farkhondeh & Ghiasvand, Peyman. (2024). Quasi-semiprime Comultiplication Modules over Pullback. *Mathematical Researches*, **10** (2), 99 – 115.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول به‌روی حلقه‌های پولبک

فرخنده فرضعلی پور[1]✉، پیمان غیاثوند[2]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: f_farzalipour@pnu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران رایانامه: p_ghiasvand@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۵/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۴/۲۰

چکیده

هدف اصلی این مقاله دسته‌بندی همه مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول به‌روی حلقه‌های پولبک از دو دامنه ددکیند و بیان ارتباط بین مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول و مدول‌های انژکتیو محض روی چنین حلقه‌هایی است. ابتدا، مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول را معرفی و آنها را روی دامنه‌های ددکیند موضعی دسته‌بندی می‌کنیم. سپس، همه مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر جداپذیر را به‌دست‌می‌آوریم و با استفاده از آنها مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر جداناپذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:
دامنه ددکیند،
حلقه پولبک،
مدول جداپذیر،
مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول.

استناد: فرضعلی پور، فرخنده و غیاثوند، پیمان (۱۴۰۳). مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول به‌روی حلقه‌های پولبک. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۲)، ۹۹ – ۱۱۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

یکی از اهداف نظریه نمایش مدرن حل مسائل دسته‌بندی زیر رسته C از مدول‌ها روی حلقه‌های یکدار است که در دو مرحله انجام‌پذیر است: مرحله اول، دسته‌بندی همه مدول‌های تجزیه‌ناپذیر در C و مرحله دوم، کاهش دسته‌بندی مدول‌ها C به مرحله اول است. متاسفانه، در اکثریت قریب به اتفاق حلقه‌ها، دسته‌بندی مدول‌های دلخواه غیرممکن است. به‌عنوان مثال، دسته‌بندی مدول‌های انژکتیو محض تجزیه‌ناپذیر با تاپ متناهی‌البعد روی $R/rad(R)$ (برای هر مدول M روی یک حلقه R، تاپ آن را $M/rad(R)M$ تعریف می‌کنیم) روی حلقه پولبک تشکیل شده از دو دامنه ددکیند R_1 و R_2 روی یک میدان $\bar{R}$ به‌سختی انجام می‌شود. مدول‌های انژکتیو محض از نظر تئوری، مدل هستند. به‌عنوان مثال، دسته‌بندی نظریه‌های کامل R-مدول‌ها به مدول‌های انژکتیو محض کاهش می‌یابد. همچنین، برای برخی حلقه‌ها، مدول‌های کوچک (با بعد متناهی، باмولد متناهی، ...) دسته‌بندی می‌شوند و در بسیاری موارد، این دسته‌بندی می‌تواند به دسته‌بندی مدول‌های انژکتیو محض توسیع داده شود. در واقع، یک ارتباط قوی بین مدول‌های انژکتیو محض با مولد متناهی و خانواده‌های مدول‌های بامولد متناهی است. بنابراین مطالعه مدول های انژکتیو محض اهمیت زیادی دارد ([۱۳]، [۱۸] و [۱۹]). یک بخش از این مقاله، معرفی یک زیردسته از مدول‌های انژکتیو محض است.

فرض کنید $v_1: R_1 \longrightarrow \bar{R}$ و $v_2: R_2 \longrightarrow \bar{R}$ یک همریختی از دو دامنه ددکیند موضعی R_i به ازای $i = 1,2$ به‌روی یک میدان مشترک $\bar{R}$ باشد. حلقه پولبک $R = \{(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2 : v_1(r_1) = v_2(r_2)\}$ را با $(R_1 \xrightarrow{v_1} \bar{R} \xleftarrow{v_2} R_2)$ نشان می‌دهیم. برای $i = 1,2$ هسته v_i را با P_i نمایش می دهیم. لذا

$$Ker(R \longrightarrow \bar{R}) = P = P_1 \times P_2, R/P \cong \bar{R} \cong R_1/P_1 \cong R_2/P_2$$

و $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ (بنابراین R یک دامنه نیست). بعلاوه، برای $i \neq j$، $0 \longrightarrow P_i \longrightarrow R \longrightarrow R_j \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق از R-مدول‌ها است ([۱۴]). در این مقاله، کلاس جدیدی از مدول‌ها که مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول خوانده می‌شود را معرفی می‌کنیم (تعریف ۵،۲)، و آن را از نکته نظر دسته‌بندی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید R یک حلقه پولبک از دو دامنه ددکیند روی یک میدان مشترک باشد. هدف اصلی این مقاله، شرح کاملی از R-مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر است. دسته‌بندی به دو مرحله تقسیم می‌شود: همه R-مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداپذیر تجزیه‌ناپذیر را بیان می‌کنیم و سپس با استفاده از این مدول‌ها، نشان می‌دهیم که مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیرجداناپذیر با تاپ متناهی‌البعد جمع مستقیم تعداد متناهی از مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیرجداپذیر هستند.

حال تعاریف و نمادهای مورد استفاده در سراسر این مقاله را بیان می‌کنیم. در این مقاله همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها یکانی هستند. فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در ابتدای مقدمه باشد. یک R-مدول S جداپذیر گفته می‌شود هرگاه R_i-مدول‌های S_i به ازای $i = 1,2$ موجود باشند به‌طوری‌که S یک زیرمدول $S_1 \oplus S_2$ باشد. به‌عبارتی، S جداپذیر است اگر آن یک پولبک از R_1-مدول و یک R_2-مدول باشد به‌عبارتی، با استفاده از نماد یکسان برای حلقه‌های پولبک خواهیم داشت $S = (S/P_2S \longrightarrow S/PS \longleftarrow S/P_1S)$ [۱۴] و $S \subseteq (S/P_2S) \oplus (S/P_1S)$. همچنین، S

جداپذیر است اگر و تنها اگر $P_1S \cap P_2S = 0$ [۱۴]. اگر R یک حلقه پولبک باشد، آنگاه هر R-مدول یک تصویر همریخت یک R-مدول جداپذیر است، لذا هر R-مدول یک نمایش مینیمال دارد: یک نمایش جداپذیر از یک R-مدول M یک همریختی $\varphi = (S \xrightarrow{f} S' \longrightarrow M)$ از R-مدول‌ها است که S جداپذیر است و اگر φ یک تجزیه $\varphi: S \xrightarrow{f} S' \longrightarrow M$ با S' جداپذیر داشته باشد، آنگاه f یک به یک است. مدول $K = Ker(\varphi)$ یک $\bar{R}$-مدول است، چون $\bar{R} = R/P$ و $PK = 0$ [۱۳]. یک دنباله دقیق $0 \longrightarrow K \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0$ از R-مدول‌ها با S جداپذیر و K یک $\bar{R}$-مدول، یک نمایش جداپذیر از M است اگر و تنها اگر برای هر i، $P_iS \cap K = 0$ و $K \subseteq PS$ (گزاره ۳,۲ از [۱۴])، هر مدول M یک نمایش جداپذیر دارد، که در حد یکریختی یکتا است (قضیه ۸,۲ از [۱۴]). بعلاوه، R-همریختی‌ها با نمایش جداپذیر، حافظ برویختی‌ها و تکریختی‌ها هستند. (قضیه ۶,۲ از [۱۶]).

تعریف ۱,۱ (الف) فرض کنید R یک حلقه و N یک زیرمدول R-مدول M باشد. ایده‌آل $\{r \in R: rM \subseteq N\}$ را با $(N: M)$ نمایش می‌دهیم و $(0: M)$ را پوچساز M گوییم.

(ب) یک زیرمدول سره N از یک R-مدول M را اولیه (به‌ترتیب، اول) گوییم، هرگاه برای هر $m \in M$ و $r \in R$ که $rm \in N$، آنگاه $m \in N$ یا $r^n \in (N: M)$ ($m \in N$ یا $r \in (N: M)$). بنابراین $Rad(N: M) = P$ ($(N: M) = P'$) یک ایده‌آل اول R است و N یک زیرمدول P-اولیه (به‌ترتیب،P'-اول) گفته می‌شود. مجموعه همه زیرمدول‌های اولیه (به‌ترتیب، اول) M با $pSpec(M)$ (به‌ترتیب، $Spec(M)$) نمایش داده می‌شود [۱۷].

(پ) ایده‌آل سره I از یک حلقه جابجایی R را نیم‌اول گوییم، هرگاه برای هر $a \in R$ و هر عدد صحیح مثبت k که $a^k \in I$، آنگاه داشته باشیم $a \in I$ [۸].

(ت) زیرمدول سره N از یک R-مدول M را نیم‌اول گوییم، هرگاه برای $m \in M$ $a \in R$ ،و $k \in \mathbb{N}$ که $a^k m \in N$، آنگاه $am \in N$. مجموعه تمام زیرمدول‌های نیم‌اول M را با نماد $seSpec(M)$ نمایش می‌دهیم [۸].

(ث) یک R-مدول M را هم‌ضربی گوییم، هرگاه به ازای هر زیرمدول N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به‌قسمی‌که $N = (0:_M I)$. در این حالت، داریم $N = (0:_M ann(N))$ [۱].

(ج) یک R-مدول M را هم‌ضربی ضعیف گوییم، هرگاه $Spec(M) = \emptyset$ یا به ازای هر زیرمدول اول N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به‌قسمی‌که $N = (0:_M I)$ [۹].

(چ) R-مدول M را هم‌ضربی اولیه گوییم، هرگاه $pSpec(M) = \emptyset$ یا به ازای هر زیرمدول اولیه N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به‌قسمی‌که $N = (0:_M I)$ [۱۰].

(ح) R-مدول M را هم‌ضربی نیم‌اول گوییم، هرگاه $seSpec(M) = \emptyset$ یا به ازای هر زیرمدول نیم‌اول N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به‌قسمی‌که $N = (0:_M I)$ [۸].

(خ) زیرمدول N از یک R-مدول M را یک زیرمدول محض گوییم، هرگاه هر سیستم متناهی از معادله‌ها روی N که حل‌پذیر روی M باشد، روی N نیز حل‌پذیر است. زیرمدول N از یک R-مدول M را یک زیرمدول نسبتاً تقسیم‌پذیر (یا RD-زیرمدول) گوییم، هرگاه برای هر $r \in R$، $rN = N \cap rM$ [۱۸, ۱۹].

(د) R-مدول M را انژکتیو محض نامیده می‌شود، هرگاه خاصیت انژکتیو را روی همه دنباله‌های دقیق محض خود داشته باشد [۱۸, ۱۹].

نتیجه ۱٫۲ (الف) فرض کنید R یک دامنه ددکیند، M یک R-مدول و N یک زیرمدول M باشد. دراین‌صورت N در M محض است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل I از R، $IN = N \cap IM$ [۱۹].

(ب) فرض کنید N یک R-زیرمدول M باشد. واضح است که N یک RD-زیرمدول M است اگر و تنها اگر برای هر $m \in M$ و $r \in R$، $rm \in N$ نتیجه می‌گیریم $rm = rn$ که در آن $n \in N$. بعلاوه، اگر M یک مدول بدون تاب باشد، آنگاه N یک RD-زیرمدول است اگر و تنها اگر برای هر $m \in M$ و هر $r \in R$ ، $rm \in N$، آنگاه $m \in N$. در این حالت، N یک RD-زیرمدول است اگر و تنها اگر N یک زیرمدول اول باشد [۱۹].

۲. مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول به‌روی یک دامنه ددکیند موضعی

هدف اصلی این بخش دسته‌بندی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول به‌روی یک دامنه ددکیند موضعی است. ابتدا، خاصیت های اساسی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲٫۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R-مدول باشد. یک زیرمدول سره N از M، شبه‌نیم‌اول گفته می‌شود، هرگاه $(N:M)$ یک ایده‌آل نیم‌اول R باشد. مجموعه همه زیرمدول‌های شبه‌نیم‌اول R-مدول M را با نماد $qsSpec(M)$ نشان می‌دهیم.

یک R-مدول M را شبه‌نیم‌اول گوییم، هرگاه زیرمدول صفر آن یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول باشد. واضح است که هر زیرمدول اول یک زیرمدول نیم‌اول است و هر زیرمدول نیم‌اول یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول است. ولی عکس آن‌ها برقرار نیست. مثال‌های زیر این نتایج را تایید می‌کنند:

مثال ۲٫۲ $\mathbb{Z}$-مدول $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و زیرمدول $\mathrm{N} =< (۴,0) >$ از M را در نظر بگیرید. در این‌صورت $(N:M) = 0$ یک ایده‌آل نیم‌اول $\mathbb{Z}$ است و لذا N یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول است. اما N یک زیرمدول نیم‌اول نیست، زیرا $۲^۲(۱,0) \in \mathrm{N}$ ولی $۲(۱,0) \notin \mathrm{N}$.

مثال ۳٫۲ $\mathbb{Z}$-مدول $M = \mathbb{Z}_{30}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $N =< 6 >$ یک زیرمدول M باشد. در این‌صورت N یک زیرمدول نیم‌اول M است، اما N یک زیرمدول اول M نیست.

گزاره ۴,۲ فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این‌صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

(۱) فرض کنید $K \subset N$ زیرمدول‌های M باشند. در این‌صورت N یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است اگر و تنها اگر N/K یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M/K باشد.

(۲) اگر N یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M باشد، آنگاه M/N یک R-مدول شبه‌نیم‌اول است.

اثبات: واضح است.

تعریف ۵,۲ فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. R-مدول M را یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول گوییم، هرگاه $qsSpec(M) = \emptyset$ یا برای هر زیرمدول شبه‌نیم‌اول N از M، یک ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = (0:_M I)$.
به آسانی دیده می‌شود که اگر M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشد، آنگاه برای هر زیرمدول شبه‌نیم‌اول N خواهیم داشت $N = (0:_M ann(N))$.

لم ۶,۲ فرض کنید M یک R-مدول، N یک زیرمدول سره M و I یک ایده‌آل R به قسمی باشد که $I \subset (0:M)$. در این‌صورت:

(۱) فرض کنید $I \subseteq J$. در این‌صورت J یک ایده‌آل نیم‌اول R است اگر و تنها اگر J/I یک ایده‌آل نیم‌اول R/I باشد.

(۲) N یک R-زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است اگر و تنها اگر N یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول R/I-مدول M باشد.

(۳) M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است اگر و تنها اگر M یک R/I-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشد.

اثبات: (۱) بدیهی است.

(۲) واضح است که $(N:_R M)/I = (N:_{R/I} M)$. لذا حکم از قسمت (۱) برقرار است.

(۳) چون $(0:N)/I = (0:_{R/I} N)$، لذا حکم برقرار است.

لم ۷,۲ فرض کنید M یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول روی یک حلقه جابجایی R باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر N یک زیرمدول محض M باشد، آنگاه M/N یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

(۲) هر جمعوند مستقیم M، یک R-مدول شبه‌نیم‌اول هم‌ضربی است.

اثبات: (۱) فرض کنید K/N یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M/N باشد. لذا با توجه به گزاره ۴,۲، K یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است، بنابراین یک ایده‌آل I از R موجود است به‌طوری‌که $K = (0:_M I)$. نشان می‌دهیم $K/N = (0:_{M/N} I)$. فرض کنید $x + N \in K/N$. بنابراین $xI = 0$، لذا داریم $I(x + N) = 0$، درنتیجه $x + N \in (0:_{M/N} I)$. حال فرض کنید $y + N \in (0:_{M/N} I)$. در این‌صورت $Iy \subseteq N \cap IM = IN \subseteq IK = 0$. بنابراین $y \in K$، و در نتیجه $K/N = (0:_{M/N} I)$.

(۲) چون هر جمعوند مستقیم M یک زیرمدول محض است، لذا حکم بنا به (۱) برقرار است.

لم ۸،۲ فرض کنید R و R' حلقه‌های جابجایی، $f: R \to R'$ یک همریختی پوشا و M یک R'-مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر M یک R-مدول شبه‌نیم‌اول باشد، آنگاه M یک R'-مدول شبه‌نیم‌اول است.

(۲) اگر N یک R-زیرمدول شبه‌نیم‌اول M باشد، آنگاه N یک R'-زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است.

(۳) اگر M یک R'-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشد، آنگاه M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

اثبات: (۱) واضح است.

(۲) چون M/N یک R-مدول شبه‌نیم‌اول است، پس بنا به (۱)، M/N یک R'-مدول شبه‌نیم‌اول است. بنابراین N یک R'-زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است.

(۳) فرض کنید N یک R-زیرمدول شبه‌نیم‌اول M باشد. در این‌صورت بنا به (۲)، N یک R-زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است. لذا ایده‌آل I' از R' موجود است به‌طوری‌که $N = (0:_M I')$. قرار دهید $I = f^{-1}(I')$. بنابراین I یک ایده‌آل R است و $f(I) = f(f^{-1}(I')) = I'$؛ پس $N = (0:_M I') = (0:_M f(I)) = (0:_M I)$. درنتیجه M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

مثال ۹،۲ (۱) فرض کنید R یک دامنه ددکیند موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $P = Rp$ باشد. همچنین $M = R$ را به‌عنوان R-مدول در نظر بگیرید. برای یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول P از R خواهیم داشت $(0:_R (0:_R P)) = R$. بنابراین $M = R$ یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول نیست.

(۲) فرض کنید R یک دامنه ددکیند موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $P = Rp$ باشد. بنا به لم ۶،۲ از [۳]، هر زیرمدول غیرصفر L از $E = E(R/P)$، انژکتیو هال R/P، به فرم $L = A_n = (0:_E P^n)$ $(n \geq 1)$ است و $L = A_n = Ra_n$ و $PA_{n+1} = A_n$. بنابراین $E(R/P)$ یک R-مدول هم‌ضربی است و لذا یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول می‌باشد.

(۳) فرض کنید R یک دامنه ددکیند با ایده‌آل ماکسیمال $P = Rp$ باشد. R-مدول $Q(R)$ (میدان خارج قسمتی R) را در نظر بگیرید. بنا به لم ۶،۲ از [۳]، برای هر زیرمدول ناصفر L از $Q(R)$، $(L: Q(R)) = 0$ یک ایده‌آل نیم‌اول (اول) R است. لذا هر زیرمدول ناصفر $Q(R)$، شبه‌نیم‌اول است. اگر $Q(R)$ یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشد، آنگاه برای هر زیرمدول ناصفر شبه‌نیم‌اول N داریم $N = (0:_{Q(R)} ann(N))$. به آسانی دیده می‌شود که $ann(N) = 0$. بنابراین $N = Q(R)$ که این تناقض است. پس $Q(R)$ یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول نیست. چون $seSpec(Q(R)) = \{0\}$، پس $Q(R)$ یک مدول هم‌ضربی نیم‌اول است. لذا یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول لزوماً یک مدول هم‌ضربی نیم‌اول نیست.

بنابراین کلاس مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول شامل کلاس مدول‌های هم‌ضربی نیم‌اول و کلاس مدول‌های هم‌ضربی نیم‌اول شامل کلاس مدول‌های هم‌ضربی ضعیف است.

تذکر ۱۰،۲ اگر R یک دامنه ددکیند با ایده‌آل ماکسیمال P باشد و $p \in P \backslash P^2$، آنگاه ایده‌آل تولید شده توسط p برابر P است. لذا برای هر n، $P^n = p^n R$. به‌علاوه، هر عنصر ناصفر R به شکل up^m است که در آن u یک عنصر یکه است.

همچنین، اگر u یک عنصر یکه در R باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $P^n = uP^n$. درنتیجه $\{0, P, P^2, \dots\}$ مجموعه‌ی همه ایده‌آل‌های سره R است.

لم ۱۱٫۲ فرض کنید R یک دامنه ددکیند با ایده‌آل ماکسیمال $P = Rp$ باشد. در این‌صورت اگر I یک ایده‌آل نیم‌اول R باشد، آنگاه $I = 0$ یا $I = P$.

اثبات: ایده‌آل‌های 0 و P نیم‌اول (اول) هستند. اگر $I = P^n$ با $n \geq 2$، آنگاه $p^n \in I$ اما $p \notin I$. لذا برای هر $n \geq 2$، P^n یک ایده‌آل نیم‌اول نیست.

قضیه ۱۲٫۲ فرض کنید R یک دامنه ددکیند با ایده‌آل ماکسیمال $P = Rp$ باشد. در این‌صورت مدول‌های زیر، تنها مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر هستند.

(۱) $R/P^n\ (n \geq 1)$؛

(۲) $E(R/P)$، انژکتیو هال R/P.

اثبات: ابتدا توجه کنید که هر یک از این مدول‌ها باتوجه به گزاره ۳٫۱ از [۲]، تجزیه‌ناپذیر هستند. چون برای $1 \leq i \leq n$، $P^i/P^n = (0:_{R/P^n} P^{n-i})$ پس $R/P^n\ (n \geq 1)$ یک مدول هم‌ضربی است ([۷])، بنابراین یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. با توجه به مثال ۹٫۲، $E(R/P)$ یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. حال نشان می‌دهیم که این‌ها تنها R-مدل‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول هستند. فرض کنید M یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر باشد و $a \in M$ یک عنصر ناصفر دلخواه باشد. ارتفاع a را به‌صورت $h(a) = sup\{n | a \in P^n M\}$ تعریف می‌کنیم. لذا $h(a)$ یک عدد صحیح ناصفر است یا برابر با بی‌نهایت است. به‌علاوه، $(0:a) = \{r \in R | ra = 0\}$ یک ایده‌آل به فرم P^n یا 0 است. اگر $(0:a) = P^{n+1} = p^{n+1}R$ با $n + 1 \geq 2$، آنگاه $(0:p^n a) = P$ و $p^n a \neq 0$، لذا می‌توان a را طوری انتخاب کرد که $(0:a) = P$ یا $(0:a) = 0$. اکنون حالت‌های مختلفی برای $h(a)$ و $(0:a)$ در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $qsSpec(M) = \emptyset$ آنگاه $Spec(M) \subseteq qsSpec(M)$ بنابراین M یک R-مدول تاب‌دار تقسیم‌پذیر با $PM = M$ است و بنا به لم ۳٫۱ و گزاره ۴٫۱ از [۱۷]، M با مولد متناهی نیست. پس می‌توان فرض کرد $(0:a) = P$. با توجه به حالت دوم گزاره ۷٫۲ از [۳]، $M \cong E(R/P)$. حال می‌توان فرض کرد $qsSpec(M) \neq \emptyset$.

حالت دوم: اگر $h(a) = n$، آنگاه $(0:a) = P$. (فرض خلف) فرض کنید $(0:a) = 0$. فرض کنید $a = p^n b$. در این‌صورت $rb = 0$ نتیجه می‌دهد $ra = 0$ و پس $r = 0$. لذا $Rb \cong R$. بنا به حالت اول قضیه ۱۲٫۲ از [۵]، Rb یک زیرمدول محض M است. بنا به قضیه ۱۰ از [۱۲]، M یک R-مدول بدون‌تاب است، پس با توجه به نتیجه ۱٫۲، Rb یک زیرمدول اول (شبه‌نیم‌اول) است. لذا $Rb \cong R/P^{n+1}$. چون Rb یک زیرمدول محض M است، پس بنا به قضیه ۵ از [۱۲]، Rb یک جمعوند M می‌باشد، در نتیجه $M \cong Rb \cong R/P^{n+1}$.

حالت سوم: $h(a) = \infty$ و $(0:a) = P$. مشابه حالت چهارم قضیه ۱۲٫۲ از [۳]، به دست می‌آوریم $M \cong E(R/P)$.

لذا بنا به مثال ۹،۲، $qsSpec(M) = \emptyset$ که این یک تناقض است.

حالت چهارم: $h(a) = \infty$ و $(0:a) = 0$. در این‌صورت مشابه حالت سوم قضیه ۱۲،۲ از [۳]، داریم $M \cong Q(R)$ و این با مثال ۹،۲ تناقض دارد.

۳. مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداپذیر

در این بخش، همه R-مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول را تعیین می‌کنیم به‌طوری که

$$R = (R_1 \xrightarrow{v_1} \bar{R} \xleftarrow{v_2} R_2) \qquad (*)$$

یک حلقه پولبک با دو دامنه ددکیند موضعی R_2, R_1 به‌ترتیب با ایده‌آل‌های ماکسیمال P_2, P_1 که با p_2, p_1 تولید می‌شوند است و $P_1 \oplus P_2$ را با P نمایش می‌دهیم و همچنین $R_1/P_1 \cong R_2/P_2 \cong R/P \cong \bar{R}$ یک میدان است. در این‌صورت R یک حلقه جابجایی نوتری موضعی با ایده‌آل ماکسیمال P است. به آسانی دیده می‌شود که $P_1 \oplus 0$ و $0 \oplus P_2$ ایده‌آل های اول دیگر R هستند.

فرض کنید $r = (a,b) \in R$ با این شرط که $a \neq 0$ و $b \neq 0$. لذا اعداد صحیح مثبت m , n وجود دارند به‌طوری‌که $a = (p_1^n, p_2^m)$، پس $ann(a) = 0$، لذا $Ra \cong R$. اگر $a = (0, p_2^m)$ که در آن m یک عدد صحیح مثبت است، آنگاه $ann(a) = P_1 \oplus 0$ و بنابراین خواهیم داشت $R(0, p_2^m) \cong R/(P_1 \oplus 0) \cong R_2$. به‌علاوه، داریم $R(p_1^n, 0) \cong R/(0 \oplus P_2) \cong R_1$. ایده‌آل های دیگر R به فرم $I = P_1^n \oplus P_2^m = (< p_1^n >, < p_2^m >)$ هستند (صفحه ۴۰۴۵ از [۳]).

یادآوری ۱،۳ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (*) باشد. همچنین فرض کنید T یک R-زیرمدول، مدول جداپذیر $S = (S_1 \xrightarrow{f_1} \bar{S} \xleftarrow{f_2} S_2)$ با تابع های پوشا $\pi_i: S \to S_i$ باشد. قرار دهید

$$T_1 = \{t_1 \in S_1 : \exists t_2 \in S_2; (t_1,t_2) \in T\} \text{ و } T_2 = \{t_2 \in S_2 : \exists t_1 \in S_1; (t_1,t_2) \in T\}.$$

برای هر $i = 1,2$، T_i یک R_i-زیرمدول S_i و $T \leq T_1 \oplus T_2$. به‌علاوه، تابع $\pi'_1 = \pi_1|T: T \to T_1$ را با ضابطه $\pi'_1(t_1,t_2) = t_1$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$T_1 \cong T/(0 \oplus Ker(f_2)) \cap T \cong T/(T \cap P_2S) \cong (T + P_2S)/P_2S \subseteq S/P_2S.$$

لذا می‌توان T_1 را به عنوان زیرمدولی از S_1 فرض کرد. به طور مشابه، می‌توان T_2 را زیرمدولی از S_2 فرض کرد [۹]. توجه کنید که $Ker(f_1) = P_1S_1$ و $Ker(f_2) = P_2S_2$.

لم ۲،۳ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (*) باشد. در این‌صورت ایده‌آل‌های 0، $0 \oplus P_2$، $P_1 \oplus 0$ و $P_1 \oplus P_2$ نیم‌اول هستند.

اثبات: فرض کنید $(a,b)^n \in \{0\}$ که در آن $(a,b) \in R$ و $n \in \mathbb{N}$. لذا $a^n = 0$ و $b^n = 0$. بنابراین $a = 0$ و $b = 0$؛ زیرا 0 ایده‌آل نیم‌اول R_i، $i = 1,2$ است. پس 0 ایده‌آل نیم‌اول R است. از آنجایی که $P_1 \oplus 0$، $0 \oplus P_2$ و

$P_1 \oplus P_2$ ایده‌آل‌های اول هستند، پس نیم‌اول می باشند.

گزاره ۳،۳ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (※) باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر T یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول یک R-مدول ناصفر جداپذیر $S = (S/P_2S = S_1 \xrightarrow{f_1} \bar{S} \xleftarrow{f_2} S/P_1S = S_2)$ باشد، آنگاه T_1 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_1 و T_2 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_2 است.

(۲) اگر L_1 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_1 باشد، آنگاه یک زیرمدول جداپذیر T از S وجود دارد که $T + (0 \oplus P_2)S$ یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S است.

(۳) اگر L_2 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_2 باشد، آنگاه یک زیرمدول جداپذیر T' از S وجود دارد که $T' + (P_1 \oplus 0)S$ یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S است.

اثبات: (۱) فرض کنید $a_1^n \in (T_1 :_{R_1} S_1) \subseteq P_1$ که در آن $a_1 \in R_1$ و $n \in \mathbb{N}$. در این‌صورت $(a_1^n, 0) \in R$ زیرا $v_1(a_1^n) = 0 = v_2(0)$. فرض کنید $(s_1, s_2) \in S$. چون $a_1^n s_1 \in P_1S_1 \cap T_1$ و $0 \in P_2S_2 \cap T_2$ و همچنین $f_1(a_1^n s_1) = 0 = f_2(0)$ پس $(a_1^n, 0)(s_1, s_2) \in T$. بنابراین $(a_1, 0)^n \in (T :_R S)$ و لذا $(a_1, 0) \in (T :_R S)$ زیرا $(T :_R S)$ یک ایده‌آل نیم‌اول R است. در نتیجه $a_1 \in (T_1 :_{R_1} S_1)$. بنابراین T_1 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_1 است. به طور مشابه، T_2 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_2 است.

(۲) اگر L_1 یک زیرمدول ناصفر شبه‌نیم‌اول S_1 باشد، آنگاه یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول جداپذیر $T = (T_1 \longrightarrow \bar{T} \longleftarrow T_2)$ از S موجود است که $T_1 = L_1$. بنا به یادآوری ۱،۳، $T_1 \cong (T + (0 \oplus P_2)S)/(0 \oplus P_2)S \subseteq S/(0 \oplus P_2)S$. بنابراین $(T + (0 \oplus P_2)S)/(0 \oplus P_2)S$ زیرمدول شبه‌نیم‌اول $S/(0 \oplus P_2)S$ است. بنابراین با توجه به گزاره ۴،۲، $T + (0 \oplus P_2)S$ یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S است.

(۳) مشابه اثبات (۲) است.

گزاره ۴،۳ فرض کنید $S = (S/P_2S = S_1 \xrightarrow{f_1} \bar{S} = S/PS \xleftarrow{f_2} S_2 = S/P_1S)$ یک مدول جداپذیر روی حلقه پولبک بیان شده در (※) باشد. در این‌صورت $qsSpec(S) = \emptyset$ اگر وتنها اگر برای هر $i = 1,2$، $qsSpec(S_i) = \emptyset$.

اثبات: برای اثبات لزوم فرض کنید $qsSpec(S) = \emptyset$ و π تابع پوشا از R به R_i باشد. فرض کنید $qsSpec(S_1) \neq \emptyset$ و T_1 یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S_1 باشد، در نتیجه با توجه به گزاره ۴،۲، $T_1 \cong T/(0 \oplus P_2)S$ یک R-زیرمدول از $S/(0 \oplus P_2)S \cong S_1$ است، بنابراین $T \in qsSpec(S)$ و $qsSpec(S) \neq \emptyset$ که این تناقض است. به طور مشابه، $qsSpec(S_2) = \emptyset$. با توجه به گزاره ۳،۳ (۱)، اثبات کفایت برقراراست.

قضیه ۵،۳ فرض کنید $S = (S/P_2S = S_1 \xrightarrow{f_1} \bar{S} = S/PS \xleftarrow{f_2} S_2 = S/P_1S)$ یک مدول جداپذیر روی حلقه پولبک بیان شده در (※) باشد. در این‌صورت S یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است اگر و تنها اگر برای $i = 1,2$، S_i یک R_i-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

اثبات: بنابه گزاره ۴،۳، $qsSpec(S) = \emptyset$ اگر و تنها اگر برای $i = 1, 2$، $qsSpec(S_i) = \emptyset$. بنابراین می‌توان فرض کرد $qsSpec(S) \neq \emptyset$. فرض کنید S یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشد و فرض کنید L یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول ناصفر S_1 باشد. بنا به گزاره ۳،۳ (۲)، یک زیرمدول $T = (T_1 \to \bar{T} \leftarrow T_2)$ از S موجود است به قسمی که $L = T_1$ و همچنین $T' = T + (0 \oplus P_2)S$ یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S است. واضح است که

$$ann(T') = P_1^n \oplus 0 \text{ یا } ann(T') = ann(T) \cap ann((0 \oplus P_2)S) = 0$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. چون $S = (0:_S 0)$ و S یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است، به دست می‌آوریم $T' = (0:_S P_1^n \oplus 0)$. حال کافی است نشان دهیم $L = T_1 = (0:_{S_1} P_1^n)$. فرض کنید $t_1 \in T_1$. بنابراین $t_2 \in T_2$ موجود است به‌طوری‌که $(t_1, t_2) \in T \subseteq T'$؛ لذا $(P_1^n \oplus 0)(t_1, t_2) = 0$. در نتیجه $T_1 \subseteq (0:_{S_1} P_1^n)$. برای اثبات عکس رابطه شمول، فرض کنید $s_1 \in (0:_{S_1} P_1^n)$. لذا یک عنصر $s_2 \in S_2$ موجود است به‌طوری‌که $(s_1, s_2) \in S$ و همچنین $(P_1^n \oplus 0)(s_1, s_2) = 0$. لذا $(s_1, s_2) \in T'$ و $s_1 \in T_1$ در نتیجه $L = T_1 = (0:_{S_1} P_1^n)$. بنابراین S_1 یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. به طور مشابه، S_2 یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. برعکس، فرض کنید S_1, S_2 هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشند و T یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S باشد. بنابه گزاره ۳،۳، T_1 ، T_2 به ترتیب، زیرمدول‌های شبه‌نیم‌اول S_1 ، S_2 هستند. بنا به فرض، $T_1 = (0:_{S_1} P_1^n)$ و $T_2 = (0:_{S_2} P_2^m)$ که در آن n, m اعدادصحیح مثبت هستند. لذا به راحتی می‌توان نشان داد $T = (0:_S P_1^n \oplus P_2^m)$. در نتیجه S یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

لم ۶،۳ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (*) باشد. در این‌صورت R-مدول‌های جداپذیر زیر، مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر هستند.

(۱) $S = (E(R_1/P_1) \longrightarrow 0 \longleftarrow 0)$ و $S = (0 \longrightarrow 0 \longleftarrow E(R_2/P_2))$ که در آن $E(R_i/P_i)$ یک R_i-انژکتیو هال R_i/P_i است.

(۲) $S = (R_1/P_1^n \longrightarrow \bar{R} \longleftarrow R_2/P_2^m)$ به‌طوری‌که m, n اعداد صحیح مثبت هستند.

اثبات: با استفاده از لم ۸،۲ از [۲]، این مدول ها تجزیه‌ناپذیر هستند و با توجه به قضیه ۱۲،۲ و قضیه ۵،۳، هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول بودن این مدول‌ها نتیجه می‌شود.

قضیه ۷،۳ فرض کنید $S = (S/P_2S = S_1 \xrightarrow{f_1} \bar{S} = S/PS \xleftarrow{f_2} S_2 = S/P_1S)$ یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداپذیر تجزیه‌ناپذیر روی حلقه پولبک بیان شده در (*) باشد. در این‌صورت S با یکی از مدول‌های بیان شده در لم ۶،۳ یکریخت است.

اثبات: فرض کنید S یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداپذیر تجزیه‌ناپذیر باشد. ابتدا فرض کنید $S = PS$. در این‌صورت بنابه لم ۷،۲ از [۲]، $S = S_1$ یا $S = S_2$ و پس برای iای S_i یک R_i-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر است، چون $S = PS$ لذا از نوع (۱) است. لذا می‌توان فرض کرد $S \neq PS$. بنابه قضیه ۵،۳، برای هر $i = 1,2$، S_i یک R_i-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. با توجه به ساختار مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول روی یک دامنه ددکیند موضعی (قضیه ۱۲،۲)،

داریم $S_i = R_i/P_i^n(n \geq 1)$ یا $S_i = E(R_i/P_i)$. چون S تجزیه‌ناپذیر است و $S/PS \neq 0$ برای هر $i = 1\,,2$، S_i، R_i-مدول تاب‌دار تقسیم‌ناپذیر است. در این‌صورت اعداد صحیح مثبت $m\,,n$ و k وجود دارند به طوری‌که $P_1^m S_1 = 0$، $P_2^k S_2 = 0$ و $P^n S = 0$. فرض کنید $t \in S$ و $o(t)$ کوچکترین عدد صحیح مثبت l در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $P^l t = 0$. اکنون $t \in S_1 \cup S_2$ با $\bar{t} \neq 0$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $o(t)$ ماکسیمال است. یک $t = (t_1, t_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که $o(t) = n$، $o(t_1) = m$ و $o(t_2) = k$. در این‌صورت برای $i = 1,2$، $R_i t_i$ در S_i محض است (قضیه ۹,۲ از [۲]). بنابراین $R_1 t_1 \cong R_1/P_1^m$ $(R_2 t_2 \cong R_2/P_2^k)$ یک جمعوند مستقیم S_1 (S_2) است زیرا برای هر i، $R_i t_i$ انژکتیو محض است. چون S_1 تجزیه‌ناپذیر است، بنابراین $S_1 = R_1 t_1 \cong R_1/P_1^m$ و به‌طور مشابه خواهیم داشت $S_1 = R_2 t_2 \cong R_2/P_2^k$. حال فرض کنید $\bar{M}$، $\bar{R}$-زیرفضای تولید شده توسط $\bar{t}$ باشد. بنابراین $\bar{M} \cong \bar{R}$. فرض کنید $M = (R_1 t_1 = M_1 \longrightarrow \bar{M} \longleftarrow M_2 = R_2 t_2)$. در این‌صورت بنا به قضیه ۵,۳، M یک R-زیرمدول S است که هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است و لذا یک جمعوند مستقیم است؛ این نتیجه می دهد که $S = M$ و S از نوع مدول‌های بیان شده در (۲) است (قضیه ۹,۲ از [۲]).

نتیجه ۸,۳ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (⁕) باشد. در این‌صورت هر R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداپذیر، انژکتیو محض است.

اثبات: بنابه قضیه ۷,۳ و لم ۹,۲ از [۲] حکم برقرار است.

۴. مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر

حلقه پولبک بیان شده در این بخش همان حلقه پولبک بیان شده در بخش قبل است. در این بخش به بررسی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیر با تاپ متناهی‌البعد می‌پردازیم. هر یک از این مدول‌ها به وسیله آمیختن تعداد متناهی مدول‌های هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول تجزیه‌ناپذیر جداپذیر به‌دست می‌آید.

گزاره ۱,۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (⁕) باشد. در این‌صورت $E(R/P)$ یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر است.

اثبات: با توجه به گزاره ۴,۲ از [۷]، $E(R/P)$ یک مدول هم‌ضربی است. لذا بنا به صفحه ۴۰۵۳ از [۲]، $E(R/P)$ یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر است.

گزاره ۲,۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (⁕)، M یک R-مدول و $0 \longrightarrow K \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0$ یک نمایش جداپذیر از M باشد. در این‌صورت $qsSpec(S) = \emptyset$ اگر و تنها اگر $qsSpec(M) = \emptyset$.

اثبات: فرض کنید $qsSpec(S) = \emptyset$ و $qsSpec(M) \neq \emptyset$. بنابراین با توجه به گزاره ۴,۲، $M \cong S/K$ یک زیرمدول

شبه‌نیم‌اول مانند T/K دارد به‌طوری‌که T یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S است که این یک تناقض است. حال فرض کنید $qsSpec(M) = \emptyset$ و $qsSpec(S) \neq \emptyset$. فرض کنید T یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول از S باشد. لذا بنا به گزاره ۴،۳ از [۷]، $K \subseteq T$ و در نتیجه T/K یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است و این یک تناقض است.

لم ۳،۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (⁕)، M یک R-مدول و $0 \longrightarrow K \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0$ یک نمایش جداپذیر M باشد. در این‌صورت اگر $(0:_R S) \in \{P_1^m \oplus 0, 0 \oplus P_2^n, 0\}$، آنگاه M جداپذیر است.

اثبات: با توجه به لم ۴،۲ از [۵]، حکم برقرار است.

گزاره ۴،۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (⁕) و M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر باشد. فرض کنید $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ یک نمایش جداپذیر M باشد. اگر N یک R-زیرمدول ناصفر M باشد، آنگاه M/N یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

اثبات: فرض کنید L/N یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M/N باشد. در این‌صورت بنابه گزاره ۴،۲، L یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول M است، لذا $L = (0:_M ann(L))$. چون $ann(M) \subseteq ann(L) \neq 0$ و M یک R-مدول جداناپذیر است، با توجه به لم ۳،۴، اعداد صحیح مثبت m, n موجودند به‌طوری‌که $ann(L) = P_1^n \oplus P_2^m$ (و همچنین اگر $ann(M) = 0$ آنگاه $ann(S) \subseteq (K:_R S) = ann(M) = 0$). نشان می‌دهیم $L/N = (0:_{M/N} (P_1^n \oplus P_2^m))$. برای این منظور فرض کنید $x + N \in L/N$. از این که $(P_1^n \oplus P_2^m)x = 0$ لذا $(P_1^n \oplus P_2^m)(x + N) = 0$ و در نتیجه داریم $x + N \in (0:_{M/N} (P_1^n \oplus P_2^m))$. فرض کنید $y + N \in (0:_{M/N} (P_1^n \oplus P_2^m))$. بنابراین خواهیم داشت $(P_1^n \oplus P_2^m)y \subseteq N \subseteq L$. ادعا می‌کنیم $(P_1^n \oplus P_2^m)y = 0$. فرض کنید این طور نباشد، یعنی این رابطه داشته باشیم $0 \neq (P_1^n \oplus P_2^m)y \subseteq L$. در این‌صورت داریم $(P_1^{2n} \oplus P_2^{2m})y = 0$. فرض کنید t کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $P^t y = 0$ (پس $P^{t-1}y \neq 0$). لذا $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $y = \varphi(x)$ و $\varphi(P^t x) = 0$ پس $\varphi(P_1^t x) = \varphi(P_2^t x) = 0$. با توجه به گزاره ۳،۲ از [۱۵]، φ یک تابع یک‌به‌یک روی $P_i S$ است، در نتیجه خواهیم داشت $P_2^t x = P_1^t x = 0$ و $P^t x = 0$. قرار دهید $U = P^{t-1}y$. پس بنا به لم ۱،۳ از [۴]،

$$0 \to K \to \varphi^{-1}(U) = P^{t-1}x \to U \to 0$$

یک نمایش جداپذیر از U است که $K \subseteq P(P^{t-1}x) = 0$ و این یک تناقض است. لذا $(P_1^n \oplus P_2^m)y = 0$ و در نتیجه $L/N = (0:_{M/N} (P_1^n \oplus P_2^m))$.

قضیه ۵،۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (⁕) و M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر باشد. فرض کنید $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ یک نمایش جداپذیر M باشد. در این‌صورت S یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است اگر و تنها اگر M یک مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است.

اثبات: بنا به گزاره ۴،۲، می‌توان فرض کرد $qsSpec(S) \neq \emptyset$. فرض کنید M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول و T

یک زیرمدول شبه نیم‌اول ناصفر S باشد. بنا به گزاره ۴,۳ از [۷]، $K \subseteq T$، و بنابراین T/K یک زیرمدول شبه‌نیم‌اول S/K است. از طرفی چون $M \cong S/K$ هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است، بنابراین اعداد صحیح m,n موجود هستند به‌طوری‌که $T/K = (0:_{S/K} P_1^n \oplus P_2^m)$. با توجه به قضیه ۴,۴ از [۷] نتیجه می‌گیریم $T = (0:_S P_1^n \oplus P_2^m)$ و لذا S هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. برعکس، اگر S هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول باشد، آنگاه بنا به گزاره ۴,۴، $M \cong S/K$ هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است و اثبات کامل است.

گزاره ۶,۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (۱) و M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیر و M/PM با تاپ متناهی‌البعد روی $\bar{R}$ باشد. اگر $0 \longrightarrow K \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0$ یک نمایش جداپذیر M باشد، آنگاه S تاپ متناهی‌البعد دارد و انژکتیو محض است.

اثبات: بنا به گزاره ۶,۲ قسمت (i) از [۲]، $S/PS \cong M/PM$, پس S تاپ متناهی‌البعد دارد. لذا حکم از قضیه ۵,۴ و نتیجه ۸,۳ به‌دست می‌آید.

گزاره ۷,۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (*) و M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیر باشد و همچنین $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ یک نمایش جداپذیر از M باشد. در این‌صورت $\bar{S} = 0$.

اثبات: (فرض خلف) فرض کنید $\bar{S} \neq 0$. بنا به قضیه ۵,۴، S هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است، لذا S از نوع (۲) قضیه ۶,۳ است که تجزیه‌ناپذیر هستند. پس عدد صحیح mای موجود است به‌طوری‌که $P^m S = 0$ و بنابراین خواهیم داشت $P^m M = 0$. اگر $m = 1$، آنگاه $(P_1 \oplus 0)M \subseteq PM = 0$ و بنابراین $(P_1 \oplus 0)M \cap (0 \oplus P_2)M = 0$ که این یک تناقض است. لذا فرض کنید $m \geq 2$ و k کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $P^k M = 0$ (پس $P^{k-1}M \neq 0$). لذا برای هر $x \in S$، $\varphi(P^k x) = 0$. بنابراین $\varphi(P_1^k x) = \varphi(P_2^k x) = 0$. از طرفی بنا بر گزاره ۳,۲ از [۱۱]، φ یک به یک روی $P_i S$ است، لذا داریم $P_1^k x = P_2^k x = 0$. پس $P^k x = 0$ و بنابراین $P^k S = 0$. قرار دهید $N = P^{k-1}M$. در این‌صورت بنا به لم ۱,۳ از [۴]، $0 \longrightarrow K \longrightarrow \varphi^{-1}(N) = P^{k-1}S \longrightarrow N \longrightarrow 0$ نمایش جداپذیر روی N است. لذا $K \subseteq PP^{k-1}S = P^k S = 0$ و این تناقض دارد با این که M جداناپذیر است و در نتیجه $\bar{S} = 0$.

برای بیان قضیه زیر نیاز به مطالبی هست که در ادامه شرح می‌دهیم. فرض کنید M یک R-مدول و

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

یک نمایش جداپذیر M باشد. اگر M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر باشد، آنگاه بنابه قضیه ۴,۵، S هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول است. در این حالت خواهیم داشت $S = S_1 \oplus S_2$، که در آن S_i از نوع (۱) قضیه ۶,۳ است. در هر نمایش جداپذیر $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$، هسته تابع φ با P پوچ می‌شود، لذا مشمول در $soc(S)$ است. بنابراین M از آمیختن سوکول‌های جمعوندهای مستقیم S به‌دست می‌آیند. فرض کنید M یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیز باشد و فرض کنید φ یک نمایش جداپذیر M باشد. بنا به گزاره ۱,۴، مدول‌های با طول متناهی مابین جمعوندهای

S اتفاق نمی افتند، $S = S_1 \oplus S_2$ که در آن S_i از نوع (۱) قضیه ۶,۳ است. اگر دو مدول از نوع (۱) وجود داشته باشد، آنگاه مولدهای آن‌ها نمی‌توانند توسط P_i پوچ شوند. این تناقض دارد با وجود دو کپی از P_1-پروفر و دو کپی از P_2-پروفر، پس S_1، P_1-پروفر و S_2، P_2-پروفر است. واضح است که در حقیقت، مدول‌هایی که از این آمیختن به‌دست می‌آیند، $E(R/P)$انژکتیو هال R/P است که بنا به گزاره ۱,۴، یک R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیر است. در نتیجه قضیه زیر را داریم:

قضیه ۸,۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (*) باشد. در این‌صورت تنها R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیر $E(R/P)$ است.

نتیجه ۹,۴ فرض کنید R حلقه پولبک بیان شده در (*) باشد. در این‌صورت هر R-مدول هم‌ضربی شبه‌نیم‌اول جداناپذیر تجزیه‌ناپذیر، انژکتیو محض است.

اثبات: با توجه به قضیه ۵,۳ از [۲] و قضیه ۸,۴ حکم برقرار است.

References

1. H. Ansari-Toroghy and F. Farshadifar, The dual notion of multiplication modules, Taiwanese J. Math., **11(4)** (2007), 1189-1201.
2. S. Ebrahimi Atani , On pure-injective modules over pullback rings, Comm. Algebra, **28** (2000), 4037-4069.
3. S. Ebrahimi Atani, On secondary modules over Dedekind domains, Southeast Asian Bull. Math., **25(25)** (2001), 1-6.
4. S. Ebrahimi Atani, On secondary modules over pullback rings, Comm. Algebra, **30** (2002), 2675-2685.
5. S. Ebrahimi Atani, Indecomposable weak multiplication modules over Dedekind domains, Demonstratio Math., **41** (2008), 33-43.
6. S. Ebrahimi Atani, S. Dolati Pish Hesari, M. Khoramdel and M. Sedghi Shanbeh Bazari, Absorbing comultiplication modules over a pullback ring, Int. Electron. J. Algebra, **24** (2018), 31-49
7. R. Ebrahimi Atani and S. Ebrahimi Atani, Comultiplication modules over a pullback of Dedekind domains, Czechoslovak Math. J., **59** (2009), 1103-1114.
8. R. Ebrahimi Atani and S. Ebrahimi Atani, On semiprime comultiplication modules over pullback rings, Colloquium Math., **146(2)** (2016), 1-15.
9. R. Ebrahimi Atani and S. Ebrahimi Atani, Weak comultiplication modules over a pullback of commutative local Dedekind domains, Algebra and Discrete Mathematics, **1** (2009), 1-13.
10. S. Ebrahimi Atani and F. Esmaeili Khalil Saraei, Indecomposable primary comultiplication modules over a pullback of two Dedekind domains, Colloquium Math., **120** (2010), 23-42.
11. L. Klingler, Integral representation of groups of square-free order, J. Algebra, **129** (1990), 26-74.
12. L. Kaplansky, Modules over Dedekind rings and valuation rings, Trans. Amer. Math. Soc., (1952),

327-340.

13. R. Kielpiniki, On Γ-pure-injective modules, Bull. Acad. Sci. Math., **15** (1967), 127-131.
14. L. S. Levy, Modules over pullbacks and subdirect sums, J. Algebra, **71** (1981), 50-61.
15. L. S. Levy, Modules over Dedekind-like rings, J. Algebra, **93** (1985), 1-116.
16. L. S. Levy , Mixed modules over $\mathbb{Z}G$, G, cyclic of prime order, and over related Dedekind pullback, J. Algebra, **71** (1981), 62-114.
17. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, On the spectrum of a module over a commutative ring, Comm. Algebra, **25(1)** (1997), 79-103.
18. M. Prest, Model Theory and Modules, Cambridge: London Mathematical Society, Cambridge University Press, 1988.
19. R. B. Warfield, Purity and algebraic compactness for modules, Pacific J. Math., **28** (1969), 699-719.