Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Expected Bayesian Estimations of Premium and Their Comparisons Using Expected Posterior Mean Square Error

F. Sanei[1], **M. Naghizadeh Qomi** [2] ✉, **A. Kiapour** [3]

1. Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran. E-mail: farzanehsanei@yahoo.com

2. Corresponding Author, Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran. ✉ E-mail: m.naghizadeh@umz.ac.ir

3. Department of Statistics, Babol branch, Islamic Azad University, Babol, Iran. E-mail: azadeh_kiapour@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 14 October 2022
Received in revised form: 3 November 2023
Accepted: 2 July 2024
Published online: 10 November 2024

Keywords:
E-Bayesian estimation,
Premium,
EMSE,
Claim size.

ABSTRACT

Introduction
In recent years, the insurance industry in Iran has seen the emergence of private insurance companies, which has created competition to gain a higher position in the insurance market. It is clear that one of the basic issues in insurance science is determining premiums, because one of the most important sources of income for insurance companies is premiums that are collected through the issuance and sale of insurance policies in different fields such as fire, freight and cars.

Material and methods
In this paper, Bayesian and expected Bayesian (E-Bayesian) estimation of premium with exponential claim size is considered. After calculating the premium using the Heilmann principle, its Bayesian and E-Bayesian estimates are obtained under three priors of hyper-parameters. The formulas of expected mean square error (E-MSE) are provided. A Monte Carlo simulation is conducted for comparison of E-Bayesian estimators of premium. A real example is presented for illustration of the results.

Results and discussion
Through a simulation study, it was observed that an E-Bayesian estimator constructed with prior density function $\pi_1(\alpha,\beta)=2(c-\beta)/c^2$ has a lower E-MSE and as a result, it has a better performance compared to other estimators. The real data set of insurance claims payment in the field of accidents in 15 years was examined. The results show that there is a good agreement between the results obtained from the data and the simulation.

How to cite: Sanei, F., Naghizadeh Qomi, M., & Kiapour, A. (2024). Expected Bayesian estimations of premium and their comparisons using expected posterior mean square error. *Mathematical Researches*, **10** (3), 123 – 135.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۰۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۰۰۴-۲۰۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

برآوردهای بیزی مورد انتظار حق بیمه و مقایسه آنها به کمک معیار میانگین توان دوم خطای پسین مورد انتظار

فرزانه صانعی [۱]، مهران نقی زاده قمی [۲] ✉، آزاده کیاپور [۳]

۱. گروه آمار، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: farzanehsanei @yahoo.com
۲. گروه آمار، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. رایانامه: m.naghizadeh@umz.ac.ir
۳. گروه آمار، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران. رایانامه: azadeh_kiapour@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۲۲
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۸/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰

چکیده

در این مقاله، به برآوردیابی بیزی و بیزی مورد انتظار (E- بیزی) حق بیمه با اندازه‌های خسارت نمایی پرداخته می‌شود. پس از محاسبه حق بیمه با استفاده از اصل هیلمن، برآوردگرهای بیزی و E- بیزی آن تحت ۳ تابع چگالی برای ابرپارامترها محاسبه می‌شوند. سپس فرمول‌هایی برای میانگین توان دوم خطای پسین مورد انتظار (E-MSE) ارائه می‌شوند. یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه برآوردگرهای E- بیزی حق بیمه انجام می‌شود. در پایان، برای کاربست برآوردگرهای معرفی شده، یک مثال کاربردی ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی:
برآورد E- بیزی،
حق بیمه،
میانگین توان دوم خطای پسین مورد انتظار،
میزان خسارت.

استناد: صانعی، فرزانه؛ نقی‌زاده قمی، مهران؛ و کیاپور، آزاده (۱۴۰۳). برآوردهای بیزی مورد انتظار حق بیمه و مقایسه آنها به کمک معیار میانگین توان دوم خطای پسین مورد انتظار. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۳)، ۱۲۳ – ۱۳۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در سال‌های اخیر صنعت بیمه در ایران شاهد پیدایش شرکت‌های خصوصی بیمه بوده که این امر موجب ایجاد رقابت جهت کسب جایگاه بالاتر از سهم بازار بیمه شده است. از این رو شرکت‌های بیمه به دنبال یافتن بازارهای جدید، جذب بیمه گذاران کم خطر و ارائه خدمات به آن‌ها هستند. روشن است که یکی از مسائل اساسی در علوم بیمه، تعیین حق بیمه و پیش‌بینی مقدار خسارت محتمل مربوط به هر رشته می‌باشد، زیرا یکی از مهم‌ترین منابع درآمد شرکت‌های بیمه، حق بیمه‌هایی است که از طریق صدور و فروش بیمه نامه‌ها در رشته‌های مختلف از قبیل آتش‌سوزی، باربری و اتومبیل به دست می‌آورد.

محاسبه حق بیمه روش‌ها و اصول گوناگونی دارد. یکی از این روش‌ها، محاسبه حق بیمه با استفاده از مقدار خسارت مورد انتظار است. اصولاً در محاسبه حق بیمه به دنبال تابعی هستیم که یک مقدار حقیقی را به خسارت وارده اختصاص می‌دهد. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x|\theta)$ نشان‌دهنده اندازه خسارت ادعا شده یا مقدار زیان حاصل از هر قرارداد در یک بازه زمانی باشد. همچنین فرض می‌کنیم $L:R^2\rightarrow R$ یک تابع زیان است که به هر $(x,P)\epsilon R^2$ ضرر ناشی از اخذ تصمیم P و مواجهه با نتیجه x را نسبت می‌دهد. ریسک حق بیمه $P_R=P_R(\theta)$ را می‌توان از طریق مینیمم کردن زیان مورد انتظار، $E[L(X,P)]$ بر حسب θ بدست آورد. در این مقاله، برای محاسبه حق بیمه، فرض می‌کنیم X اندازه خسارت و دارای توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال (۱) باشد.

$$f(x|\theta)=\theta e^{-\theta x};x>0,\theta>0 \tag{۱}$$

ریسک حق بیمه یا حق بیمه P_R تحت تابع زیان توان دوم خطا $L(X,P)=(X-P)^2$ به صورت

$$P_R=\int_0^\infty xf\left(x|\theta\right)dx=E(X|\theta)=\frac{1}{\theta} \tag{۲}$$

به دست می‌آید.

در ادبیات بیمه، روش‌های مختلفی برای برآورد حق بیمه وجود دارد. یکی از شناخته شده‌ترین آن‌ها روش بیزی استاندارد است. تحلیل بیزی استاندارد در بسیاری از مطالعات علوم بیمه مورد استفاده قرار گرفته است، که از آن جمله می‌توان به [۲و۳] و از کارهای اخیر به [۴و۵] اشاره کرد. در استفاده از روش بیزی، انتخاب معقول توزیع‌های پیشین روی فضای پارامتر، نقش مهمی درکاهش خطای برآورد دارد.

روش بیزی استاندارد، متکی به انتخاب یک توزیع پیشین است و برآوردگر بیزی به انتخاب توزیع پیشین حساس است. برای رفع این مشکل، روش بیزی استوار معرفی شد. برای مطالعه بیشتر به [۱] و مراجع موجود در آن مراجعه کنید.

روش برآورد E- بیز یا بیز مورد انتظار توسط هان (۱۹۹۷) معرفی و توسعه داده شد [۶]. این روش بر اساس امیدریاضی برآوردگر بیز روی توزیع ابرپارامترهای توزیع پیشین بنا می‌شود. در سال های اخیر در زمینه برآوردیابی E- بیز مطالعات

زیادی صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به [۷-۱۱] اشاره کرد. در زمینه برآورد حق بیمه [۱۲و۱۳] به مطالعه برآوردگرهای E-بیزی پرداختند.

در مطالعات گذشته، به ارزیابی و مقایسه خطای برآوردگرهای E- بیزی حق بیمه به کمک میانگین توان دوم خطا (MSE) پرداخته می‌شد. [۱۴] معیار E-MSE را برای مقایسه خطای برآوردگرهای E- بیزی ارائه داد. بر اساس اطلاعات نویسندگان، تاکنون محاسبه E-MSE و مقایسه برآوردگرهای E- بیزی حق بیمه به کمک آنها صورت نگرفته است. در این مقاله به برآوردیابی E- بیزی و مقایسه آنها با استفاده از معیار E-MSE در توزیع نمایی تحت تابع زیان

$$L(P_R, P) = (P - P_R)^2 \tag{۳}$$

خواهیم پرداخت. در بخش دوم برآورد حق بیمه به روش بیزی ارائه می‌شود. برآوردگرهای E- بیزی حق بیمه با استفاده از سه توزیع پیشین برای ابرپارامتر در بخش سوم به دست می‌آیند. معیار E-MSE در بخش چهارم، معرفی و برای مقایسه برآوردگرهای E- بیزی ارائه شده، محاسبه می‌شود. در بخش پنجم، یک مطالعه شبیه سازی برای مقایسه عملکرد برآوردگرهای E- بیزی ارائه شده است. تحلیل داده‌های خسارت در صنعت بیمه، در بخش ششم انجام می‌شود و در نهایت، مقاله با بحث و نتیجه گیری به پایان می‌رسد.

۱. برآورد بیزی حق بیمه

فرض کنید X_i مقدار خسارت سال iام، $i = ۱,۲,...$ و $X_۱, X_۲,...$ دنباله‌ای از مقدار خسارت‌های تصادفی و $\mathbf{X} = (X_1,..., X_n)$ باشد، برای برآورد حق بیمه $P_R=P_R(\theta)$ تحت تابع زیان (۳) با استفاده از روش بیزی، پیشین گاما به عنوان پیشین مزدوج با تابع چگالی به فرم (۴) را برای θ در نظر می‌گیریم.

$$\pi(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \ \alpha > 0, \beta > 0, \tag{۴}$$

با ترکیب توزیع پیشین (۴) و تابع درستنمایی به صورت

$$L(\theta \mid \mathbf{x}) = \theta^n e^{-\theta T},$$

تابع چگالی پسین به صورت

$$\pi(\theta \mid \mathbf{x}) = \frac{(T+\beta)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(T+\beta)\theta}$$

به دست می‌آید که در آن $\mathbf{x} = (x_1,..., x_n)$ و $T = \sum_{i=1}^n x_i$. مخاطره پسین مورد انتظار P به عنوان برآوردگر P_R برابر است با

$$\rho(\pi,P)=E[(P-P_R)^2\mid\mathbf{x}]=P^2-2PE(P_R\mid\mathbf{x})+E(P_R^2\mid\mathbf{x})$$

در نتیجه، برآورد بیزی حق بیمه که از مینیمم کردن مخاطره پسین به دست می‌آید، برابر است با

$$P^B(\mathbf{x})=E(P_R\mid\mathbf{x})=E(\theta^{-1}\mid\mathbf{x})=\frac{(T+\beta)\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(n+\alpha)}=\frac{T+\beta}{n+\alpha-1}.$$

۲. برآورد E-بیزی حق بیمه

بر اساس پژوهش هان (۱۹۹۷)، ابرپارامترهای α و β در رابطه (۴) باید به نحوی انتخاب شوند که تضمین شود $\pi_{\alpha,\beta}(\theta)$ یک تابع نزولی بر حسب θ باشد [۶]. برای تحقق این مسئله لازم است مشتق $\pi(\theta\mid\alpha,\beta)$ نسبت به θ منفی شود. مشتق $\pi(\theta\mid\alpha,\beta)$ نسبت به θ برابر است با

$$\frac{d\pi(\theta\mid\alpha,\beta)}{d\theta}=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[(\alpha-1)\theta^{\alpha-2}e^{-\beta\theta}-\beta\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\right]$$

$$=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-2}e^{-\beta\theta}(\alpha-\beta\theta-1).$$

توجه شود که $\alpha>0$، $\beta>0$ و $\theta>0$. اگر $0<\alpha<1$ و $0<\beta$، آنگاه $d\pi(\theta|\alpha,\beta)/d\theta<0$ و در نتیجه، بر اساس [۱۵]، از آنجا که توزیع پیشین با دنباله کوتاه‌تر، استواری برآوردگر بیز را کاهش می‌دهد، β نباید خیلی بزرگ باشد و برای آن یک کران بالا در نظر می‌گیریم. بنابراین ابرپارامترهای α و β با در نظر گرفتن محدودیت‌های $0<\alpha<1$ و $0<\beta<c$ انتخاب می‌شوند، که در آن c>0.

تعریف ۱. برآورد E- بیزی حق بیمه، امید ریاضی برآورد بیزی حق بیمه روی ابرپارامترهای توزیع پیشین است که به صورت

$$P^{EB}(\mathbf{x})=\iint_D P^B(\mathbf{x})\pi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta \qquad (۵)$$

تعریف می‌شود و در آن D دامنه α و β، $P^B(\mathbf{x})$ حق بیمه بیزی و $\pi(\alpha,\beta)$ تابع چگالی توأم α و β روی D است.

بنا بر [۸]، فرض کنید α و β مستقل بوده و دارای تابع چگالی دو متغیره $\pi(\alpha,\beta)=\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)$ باشند. برای برآورد E-بیزی حق بیمه سه تابع چگالی به صورت زیر برای α و β در نظر گرفته می‌شود. که این توابع چگالی برای بررسی تأثیر توزیع‌های پیشین مختلف برای برآورد E-بیزی استفاده می‌شوند.

$$\pi_1(\alpha,\beta)=\frac{2(c-\beta)}{c^2};\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<c\,, \qquad (۶)$$

$$\pi_2(\alpha,\beta)=\frac{1}{c};\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<c\,, \tag{۷}$$

$$\pi_3(\alpha,\beta)=\frac{2\beta}{c^2};\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<c\,. \tag{۸}$$

قضیه ۱. فرض کنید $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ نمونه مشاهده شده از توزیع نمایی با تابع چگالی (۱) باشد. در این صورت برآورد E- بیزی حق بیمه متناظر با توابع چگالی پیشین (۶)، (۷) و (۸) به ترتیب عبارتند از:

$$P^{EB_1}(\mathbf{x})=\left(T+\frac{c}{3}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

$$P^{EB_2}(\mathbf{x})=\left(T+\frac{c}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

$$P^{EB_3}(\mathbf{x})=\left(T+\frac{2c}{3}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

برهان: اگر تابع چگالی توأم α و β به فرم رابطه (۶) باشد، با استفاده از تعریف ۱ برآورد E- بیزی حق بیمه برابر است با

$$P^{EB_1}(\mathbf{x})=\iint_D P^B(\mathbf{x})\pi_1(\alpha,\beta)d\alpha d\beta\,,$$

$$=\int_0^c\int_0^1\frac{T+\beta}{n+\alpha-1}\times\frac{2(c-\beta)}{c^2}d\alpha d\beta\,,$$

$$=\frac{2}{c^2}\int_0^c(c-\beta)(T+\beta)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)d\beta\,,$$

$$=\left(c-T+2T-\frac{2c}{3}\right)\ln(\frac{n}{n-1})=\left(T+\frac{c}{3}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

تحت تابع چگالی (۷)، برآورد E- بیزی حق بیمه برابر است با

$$P^{EB_2}(\underline{x})=\iint_D P^B(\underline{x})\pi_2(\alpha,\beta)d\alpha d\beta\,,$$

$$=\int_0^c\int_0^1\frac{T+\beta}{n+\alpha-1}\times\frac{1}{c}d\alpha d\beta\,,$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^c(T+\beta)\ln(n+\alpha-1)\big|_0^1\,d\beta\,,$$

$$=\frac{1}{c}\left(Tc+\frac{1}{2}c^2\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=\left(T+\frac{c}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

به طور مشابه تحت تابع چگالی (۸) برآورد E- بیزی حق بیمه برابر است با

$$P^{EB_3}(\underline{x})=\iint_D P^B(\underline{x})\pi_1(\alpha,\beta)d\alpha d\beta,$$

$$=\int_0^c\int_0^1\frac{T+\beta}{n+\alpha-1}\times\frac{2\beta}{c^2}\,d\alpha d\beta,$$

$$=\frac{2}{c^2}\int_0^c\beta(T+\beta)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)d\beta,$$

$$=\frac{2}{c^2}\left(\frac{1}{2}Tc^2+\frac{c^3}{3}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=\left(T+\frac{2c}{3}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

۳. محاسبه E-MSE برآورد E- بیزی

هان (۲۰۲۰) E-MSE را به عنوان معیاری برای ارزیابی خطای برآورد E- بیز معرفی کرد، که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴].

تعریف ۲. E-MSE برآورد E- بیز، امیدریاضی MSE پسین برآورد بیز است و به صورت

$$E-MSE\left(P^{EB}(\mathbf{x})\right)=\iint_D MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)\pi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=E\left(MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)\right),$$

تعریف می‌شود، که در آن D دامنه α و β، $MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)$، میانگین توان دوم خطای پسین حق بیمه بیزی با ابرپارامترهای α و β و $\pi(\alpha,\beta)$ تابع چگالی توأم α و β روی D است.

قضیه ۲. فرض کنید $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ نمونه مشاهده شده از توزیع نمایی با تابع چگالی (۱) باشد. در این صورت، داریم

الف- MSE پسین حق بیمه بیزی برابر است با

$$MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)=\frac{(T+\beta)^2}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}.$$

ب- E-MSE برآورد E-بیزی حق بیمه تحت توابع چگالی توأم $\pi(\alpha,\beta)$ داده شده در روابط (۶)، (۷) و (۸)، به ترتیب عبارتند از

$$E-MSE\left(P^{EB_1}(\mathbf{x})\right)=\frac{6T^2+4cT+c^2}{6}\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right],$$

$$E-MSE\left(P^{EB_2}(\mathbf{x})\right)=\frac{3T^2+3cT+c^2}{3}\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right],$$

$$E-MSE\left(P^{EB_3}(\mathbf{x})\right)=\frac{6T^2+8cT+3c^2}{6}\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right].$$

برهان: الف) MSE پسین حق بیمه بیزی برابر است با

$$\begin{aligned}MSE(P^B(\mathbf{x}))&=E\left[(P^B(\mathbf{x})-P(\theta))^2\mid\mathbf{x}\right],\\&=E\left[\left[P(\theta)-E(P(\theta)\mid\mathbf{x})\right]^2\mid\mathbf{x}\right]=Var\left[P(\theta)\mid\mathbf{x}\right],\\&=E\left(\frac{1}{\theta^2}\mid\mathbf{x}\right)-E^2\left(\frac{1}{\theta}\mid\mathbf{x}\right),\\&=\frac{(T+\beta)^2\Gamma(n+\alpha-2)}{\Gamma(n+\alpha)}-\left(\frac{T+\beta}{n+\alpha-1}\right)^2,\\&=\frac{(T+\beta)^2}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}.\end{aligned}$$

ب) اگر تابع چگالی توأم به فرم رابطه (۶) باشد، با استفاده از تعریف ۲، محاسبه E-MSE برآورد E-بیزی حق بیمه برابر است با

$$\begin{aligned}E-MSE\left(P^{EB_1}(\mathbf{x})\right)&=\iint_D MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)\pi_1(\alpha,\beta)d\alpha d\beta\\&=\int_0^c\int_0^1\frac{2(c-\beta)}{c^2}\left[\frac{(T+\beta)^2}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}\right]d\alpha d\beta\\&=\frac{2}{c^2}\int_0^c(c-\beta)(T+\beta)^2\int_0^1\frac{1}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}d\alpha d\beta\\&=\frac{2}{c^2}\int_0^c(c-\beta)(T+\beta)^2\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right]d\beta\\&=\frac{6T^2+4cT+c^2}{6}\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right].\end{aligned}$$

همچنین تحت تابع چگالی توأم (۷) داریم

$$E-MSE\left(P^{EB_2}(\mathbf{x})\right)=\iint_D MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)\pi_2(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$

$$=\int_0^c\int_0^1\frac{1}{c}\left[\frac{(T+\beta)^2}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}\right]d\alpha d\beta$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^c(T+\beta)^2\int_0^1\frac{1}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}d\alpha d\beta$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^c(T+\beta)^2\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right]d\beta$$

$$=\frac{3T^2+3cT+c^2}{3}\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right].$$

به طور مشابه تحت تابع چگالی توأم (۸)، E-MSE برآورد E-بیزی حق بیمه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E-MSE\left(P^{EB_3}(\mathbf{x})\right)=\iint_D MSE\left(P^B(\mathbf{x})\right)\pi_3(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$

$$=\int_0^c\int_0^1\frac{2\beta}{c^2}\left[\frac{(T+\beta)^2}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}\right]d\alpha d\beta$$

$$=\frac{2}{c^2}\int_0^c\beta(T+\beta)^2\int_0^1\frac{1}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}d\alpha d\beta$$

$$=\frac{2}{c^2}\int_0^c\beta(T+\beta)^2\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right]d\beta$$

$$=\frac{6T^2+8cT+3c^2}{6}\left[\ln\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-1)}\right].$$

۴. نتایج شبیه سازی

در این بخش، یک شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه برآوردگرهای معرفی شده E- بیزی حق بیمه ارائه می‌شود. برای این منظور، نمونه‌هایی به حجم ۸۰، ۵۰، ۳۰، ۱۰=n، از توزیع نمایی با پارامتر ۵=θ تولید می‌شود. در این صورت ریسک حق بیمه برابر P_R=۰/۲ است. مقادیر P^{EB} و E-MSE آن‌ها بر اساس روابط ارائه شده با در نظر گرفتن M=۱۰۰۰۰ تکرار به ازای ۱۰، ۵، ۱، ۰/۱=c، محاسبه و نتایج در جدول ۱ خلاصه شده است. نتایج ملاحظه شده از این جدول عبارتند از:

۱- برآوردهای E- بیزی به ازای مقادیر کوچکتر c به مقدار واقعی نزدیک هستند و رابطه (۹) بین آنها برقرار است.

$$P^{EB_1}<P^{EB_2}<P^{EB_3}. \qquad (۹)$$

۲- رابطه زیر بین E-MSE برآوردهای E- بیزی برقرار است.

$$E-MSE\left(P^{EB_1}\right)<E-MSE\left(P^{EB_2}\right)<E-MSE\left(P^{EB_3}\right). \qquad (۱۰)$$

از رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود که با استفاده از معیار E-MSE، برآورد P^{EB_1} بهتر از P^{EB_2} و برآورد P^{EB_2} بهتر از P^{EB_3} است.

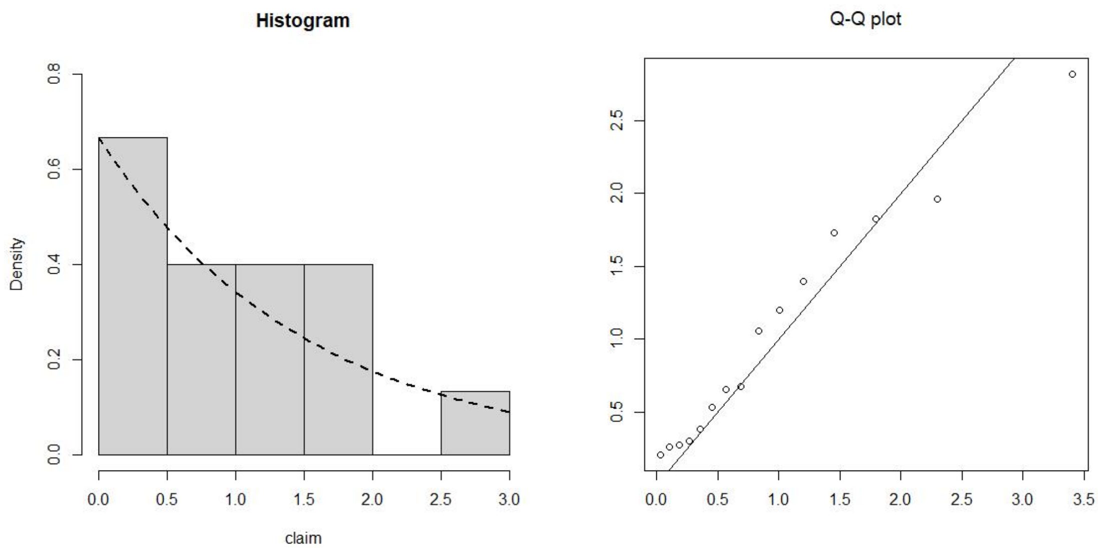
۳- به ازای مقدار ثابت c، با افزایش n، برآوردهای E- بیزی بهبود می‌یابند. همچنین با افزایش n، از مقدار برآوردهای E- بیزی و E-MSE آنها کاسته می‌شود.

۴- به ازای مقدار ثابت n، با افزایش c مقدار E-MSE برآوردها افزایش می‌یابد. در نتیجه برآوردها به ازای مقادیر کوچکتر c مطلوب‌تر هستند.

جدول ۱: مقایر برآورد E- بیزی حق بیمه و E-MSE آنها

n	c	P^{EB}_1	P^{EB}_2	P^{EB}_3	$E\text{-}MSE(P^{EB}_1)$	$E\text{-}MSE(P^{EB}_2)$	$E\text{-}MSE(P^{EB}_3)$
۱۰	۰/۱	۰/۲۱۳۶۱۳۶	۰/۲۱۵۳۶۹۷	۰/۲۱۷۱۲۵۷	۰/۰۰۵۹۱۳۵۱۳	۰/۰۰۶۰۰۲۸۶۹	۰/۰۰۶۰۹۲۲۲۵
	۱	۰/۲۴۵۸۷۴۳	۰/۲۶۳۴۳۴۳	۰/۲۸۰۹۹۴۴	۰/۰۰۷۷۲۱۲۴۸	۰/۰۰۸۸۱۴۲۲۶	۰/۰۰۹۹۰۷۲۰۴
	۵	۰/۳۸۶۰۹۵۴	۰/۴۷۳۸۹۵۸	۰/۵۶۱۶۹۶۳	۰/۰۱۹۹۵۴۵۲۱	۰/۰۲۹۷۸۵۳۸۹	۰/۰۳۹۶۱۶۲۵۷
	۱۰	۰/۵۶۲۴۹۷۷	۰/۷۳۸۰۹۸۵	۰/۹۱۳۶۹۹۴	۰/۰۴۵۱۸۳۴۷۲	۰/۰۷۵۸۰۶۸۶۶	۰/۱۰۶۴۳۰۲۶۱
۳۰	۰/۱	۰/۲۰۴۵۷۱۸	۰/۲۰۵۱۳۶۸	۰/۲۰۵۷۰۱۹	۰/۰۰۱۵۱۷۰۲۵	۰/۰۰۱۵۲۵۱۶۳	۰/۰۰۱۵۳۳۳۰۰
	۱	۰/۲۱۴۹۰۹۵	۰/۲۲۰۵۵۹۸	۰/۲۲۶۲۱۰۰	۰/۰۰۱۶۷۰۵۵۴	۰/۰۰۱۷۵۸۰۴۳	۰/۰۰۱۸۴۵۵۳۱
	۵	۰/۲۶۰۴۶۳۶	۰/۲۸۸۷۱۴۹	۰/۳۱۶۹۶۶۲	۰/۰۰۲۴۸۶۵۴۳	۰/۰۰۳۰۵۹۱۶۱	۰/۰۰۳۶۳۱۷۷۹
	۱۰	۰/۳۱۶۳۷۴۱	۰/۳۷۲۸۷۶۷	۰/۴۲۹۳۷۹۳	۰/۰۰۳۷۸۶۸۱۹	۰/۰۰۵۲۶۵۸۹۶	۰/۰۰۶۷۴۴۹۷۴
۵۰	۰/۱	۰/۲۰۲۷۴۴۳	۰/۲۰۳۰۸۱۰	۰/۲۰۳۴۱۷۷	۰/۰۰۰۸۶۴۸۳۴۲	۰/۰۰۰۸۶۷۶۵۴۴	۰/۰۰۰۸۷۰۴۷۴۶
	۱	۰/۲۰۷۹۶۷۲	۰/۲۱۱۳۳۴۳	۰/۲۱۴۷۰۱۴	۰/۰۰۰۹۰۹۳۳۴۹	۰/۰۰۰۹۳۸۶۸۲۸	۰/۰۰۰۹۶۸۰۳۰۷
	۵	۰/۲۳۵۳۵۳۸	۰/۲۵۲۱۸۹۴	۰/۲۶۹۰۲۵۰	۰/۰۰۱۱۷۰۵۵۵۷	۰/۰۰۱۳۴۵۶۶۲۸	۰/۰۰۱۵۲۰۷۶۹۹
	۱۰	۰/۲۶۹۵۸۰۵	۰/۳۰۳۲۵۱۷	۰/۳۳۶۹۲۲۹	۰/۰۰۱۵۶۲۰۹۸۰	۰/۰۰۱۹۸۳۲۲۲۲	۰/۰۰۲۴۰۴۳۴۶۴
۸۰	۰/۱	۰/۲۰۱۹۸۰۱	۰/۲۰۲۱۸۹۷	۰/۲۰۲۳۹۹۴	۰/۰۰۰۵۲۶۱۷۱۵	۰/۰۰۰۵۲۷۲۵۱۵	۰/۰۰۰۵۲۸۳۳۱۵
	۱	۰/۲۰۵۴۱۳۹	۰/۲۰۷۵۱۰۴	۰/۲۰۹۶۰۶۹	۰/۰۰۰۵۴۴۱۳۲۲	۰/۰۰۰۵۵۵۲۱۶۶	۰/۰۰۰۵۶۶۳۰۰۹
	۵	۰/۲۲۱۹۷۰۳	۰/۲۳۲۴۵۲۶	۰/۲۴۲۹۳۴۹	۰/۰۰۰۶۳۷۰۳۸۵	۰/۰۰۰۶۹۹۱۲۱۹	۰/۰۰۰۷۶۱۲۰۵۲
	۱۰	۰/۲۴۳۳۱۲۰	۰/۲۶۴۲۷۶۶	۰/۲۸۵۲۴۱۳	۰/۰۰۰۷۷۱۸۱۰۹	۰/۰۰۰۹۱۲۹۷۶۸	۰/۰۰۱۰۵۴۱۴۲۶

شکل ۱. نمودارهای هیستوگرام، تابع چگالی و چندک-چندک داده‌ها



۵. مثال کاربردی

جدول ۲ میزان خسارت پرداختی صنعت بیمه کشور در رشته حوادث را در فاصله بین سال‌های ۱۳۸۶ تا ۱۴۰۰ نشان می‌دهد. برای برازش توزیع نمایی به داده‌ها، از آزمون کولموگروف - اسمیرنوف استفاده شد. مقدار آماره آزمون برابر ۰/۱۸۲۶۱ و مقدار معنی داری ۰/۶۳۴۶ نشان می دهد که توزیع نمایی با میانگین ۱۰۱/۹۶ =$1/\theta$ را می‌توان به این مجموعه از داده‌ها به خوبی برازش داد. شکل ۱ نمودارهای هیستوگرام، تابع چگالی و چندک-چندک داده‌ها را نشان می‌دهد. برآوردهای E-بیزی و E-MSE آنها در جدول ۳ به ازای مقادیر مختلف c نمایش داده شده است.

جدول ۲: میزان خسارت پرداختی صنعت بیمه کشور در رشته حوادث (به ده میلیارد ریال)

سال	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳
میزان خسارت	۲۰/۵۶	۲۷/۲۷	۲۶/۴۷	۳۰/۰۲	۳۸/۱۱	۵۳/۵۳	۶۵/۶۶	۶۷/۸۰
سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	
میزان خسارت	۱۰۵/۷۳	۱۱۹/۹۲	۱۴۰/۰۰	۱۷۳/۱۷	۱۸۲/۷۵	۱۹۶/۳۹	۲۸۲/۰۸	

از این جدول ملاحظه می‌شود که برآوردها به هم نزدیک بوده، و با توجه به اینکه E-MSE برآورد P^{EB_1} کمتر است، در نتیجه برآورد بهتری نسبت به سایر برآوردهاست. همچنین، سازگاری بین نتایج عددی داده ها و شبیه‌سازی صورت گرفته در بخش قبل وجود دارد.

جدول ۳: مقایر برآورد E- بیزی حق بیمه و E-MSE آنها

c	P^{EB}_1	P^{EB}_2	P^{EB}_3	E-MSE(P^{EB}_1)	E-MSE(P^{EB}_2)	E-MSE(P^{EB}_3)
۰/۵	۱۰۵/۵۳۲۶	۱۰۵/۵۳۸۴	۱۰۵/۵۴۴۱	۸۲۶/۳۸۲۱	۸۲۶/۴۷۲۱	۸۲۶/۵۶۲۱
۱	۱۰۵/۵۴۴۱	۱۰۵/۵۵۵۶	۱۰۵/۵۶۷۱	۸۲۶/۵۶۲۲	۸۲۶/۷۴۲۳	۸۲۶/۹۲۲۴
۳	۱۰۵/۵۹۰۱	۱۰۵/۶۲۴۶	۱۰۵/۶۵۹۱	۸۲۷/۲۸۲۹	۸۲۷/۸۲۳۶	۸۲۸/۳۶۴۳
۵	۱۰۵/۶۳۶۱	۱۰۵/۶۹۳۶	۱۰۵/۷۵۱۱	۸۲۸/۰۰۴۱	۸۲۸/۹۰۵۹	۸۲۹/۸۰۷۷
۱۰	۱۰۵/۷۵۱۱	۱۰۵/۸۶۶۱	۱۰۵/۹۸۱۱	۸۲۹/۸۰۹۲	۸۳۱/۶۱۵۷	۸۳۳/۴۲۲۲

۶. بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، برآوردگرهای E- بیزی حق بیمه و E-MSE آنها با توجه به ۳ تابع چگالی برای ابرپارامترهای توزیع پیشین، تحت تابع زیان توان دوم خطا و در حالتی که خسارت ها دارای توزیع نمایی هستند، مورد مطالعه قرار گرفت. برآوردهای E-بیزی و فرمول‌های E-MSE آن‌ها ارائه شد. به کمک یک مطالعه شبیه‌سازی، ملاحظه شد که برآورد P^{EB_1} دارای E-MSE کمتر بوده و در نتیجه نسبت به سایر برآوردها دارای عملکرد بهتری است. داده‌های خسارت پرداختی صنعت بیمه کشور در رشته حوادث در ۱۵ سال مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که سازگاری خوبی بین نتایج حاصل از داده‌ها و شبیه‌سازی وجود دارد.

References

۱. ن. نعمت الهی، ا. کیاپور، تحلیل بیزی استوار و کاربرد آن در برآورد حق بیمه، نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، ۱۳، ۸۶۰-۸۴۳. (۱۳۹۲)

2. W.Heilmann, Decision theoretic foundations of credibility theory, Insurance: Mathematics and Economics, **8**(1) (1989), 77-95.

3. S. A. Klugman, Bayesian statistics in actuarial science: with emphasis on credibility, Kluwer, Boston. (1992)

4. E.GómezDéniz, F.VázquezPolo, Exact credibility reference Bayesian premiums, Insurance: Mathematics and Economics, **105** (2022), 128-143.

5. E. O.Calderin, E.GomezDeniz, and F.VazquezPolo, Conditional Tail Expectation and Premium Calculation under Asymmetric Loss, Axioms, https://doi.org/10.3390/axioms12050496. (2023)

6. M.Han, The structure of hierarchical prior distribution and its applications, Chinese Operations Research and Management Science, **6** (1997), 31-40.

7. M.Han, E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure probability, Communications in Statistics Theory and Methods, **40** (2011), 3303-3314.

8. Z. F.Jaheen, and H. M. Okasha, E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on typeII censoring, Applied Mathematical Modeling, 35 (2011), 4730-4737.

9. H. M.Okasha, and J.Wang, E-Bayesian estimation for the geometric model based on record statistics. Applied Mathematical Modelling, **40**(1) (2016), 658 –670

10. A.Kiapour, bayesian estimation of the expected queue length of a system m/m/1 with certain and uncertain priors, Communications in Statistics Theory and Methods, **51**(15) (2022), 5310-5317.

11. A.Alhamaidah, M.Naghizadeh Qomi, and A.Kiapour, Comparison of E-Bayesian estimators in Burr XII model using EPMSE based on record values. Statistics, Optimization and Information Computing, **11** (2023), 709–718.

12. A.Kiapour, Bayes, E-Bayes and robust Bayes premium estimation and prediction under the squared log error loss function. Journal of the Iranian Statistical Society, **17**(1) (2018), 33-47.

13. M.Naghizadeh Qomi, , and A.Kiapour, E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimation of risk premium, 15th Iranian Statistics Conference, Yazd (2020).

14. M.Han, E-Bayesian estimations of parameter and its evaluation standard: EMSE (expected mean square error) under different loss functions, Communications in Statistics Simulation and Computation, **50**(1) (2019), 118

15. J. O. Berger, In Robustness of Bayesian Analysis, The robust Bayesian viewpoint (with discussion), North Holland, Amsterdam. (1985)