Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

An Accurate Numerical Method for Solving the Variable-Order Fractional Diffusion Problem

F. Kheirkhah [1], **M. Hajipour** [2] ✉

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran. E-mail: f_kheirkhah98@sut.ac.ir

2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran. ✉ E-mail: hajipour@sut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 20 November 2022
Received in revised form: 19 August 2022
Accepted: 9 October 2022
Published online: 9 June 2024

Keywords:
Variable-order fractional derivative,
Fractional diffusion equation,
Numerical method.

ABSTRACT

Introduction

Fractional calculus plays a worthy role in different disciplines of science and engineering such as in modeling of many physical phenomena. It is concerned with integrals and derivatives of arbitrary orders. The variable-order (VO) fractional derivatives are an extension of the constant fractional-order derivativeswhich simultaneously possesses memory it is a powerful tool in modeling complex dynamical systems related to non-locality and memory effect. Due to the high complexity of the VO fractional diffusion equations, their analytical solution is extremely difficult, and even in most cases is impossible. In the past decade, one of the main challenges has been to develop some approximate methods for the solution of the VO time-fractional diffusion equations in form (1). This equation contains a variable-order fractional time-derivative and a second-order spatial-derivative. To solve problem (1), we develop a high-order numerical method based on the compact finite difference and weighted shifted Grunwald-Letnikov operators.

Material and Methods

In this paper, first we define the VO Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives. Then, by using the shifted Grunwald-Letnikov operators, we derive a second-order approximate formula for discretizing the VO time-fractional derivative of order $\alpha(x,t)$. Using a compact finite difference method, the second-order spatial derivative is discretized. Therefore, the problem (1) is converted to a system of algebraic equations.

Results and discussion

We show that the proposed method is of fourth- and second-order of convergence accuracy in spatial and time directions, respectively. Also, the solvability, stability and convergence of the present method are established. To verify the efficiency and high accuracy of this method, some numerical examples and comparative results are presented.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- A high-order numerical method is designed and implemented to solve a boundary value problem governed by the VO fractional diffusion equation.

- The proposed method is solvable, unconditionally stable and convergent.
- The derived numerical results are not sensitive to roundoff error when the number of temporal/spatial cells increases.
- The presented results coincided with the theoretical analysis very well.

How to cite: Kheirkhah, F., Hajipour, M. (2024). An accurate numerical method for solving the variable-order fractional diffusion problem. *Mathematical Researches*, **10** (1), 51 – 69.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰٤٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

یک روش عددی دقیق برای حل مسأله نفوذ کسری مرتبه متغیر

فرناز خیرخواه [۱]، **مجتبی حاجی‌پور** [۲] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه مهندسی، دانشگاه صنعتی سهند تبریز ، ایران. رایانامه: f_kheirkhah98@sut.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه مهندسی، دانشگاه صنعتی سهند تبریز ، ایران. رایانامه: hajipour@sut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۲۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۵/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰

واژه‌های کلیدی:
مشتق کسری مرتبه-متغیر،
معادله نفوذ کسری
روش عددی.

در این مقاله برای حل یک مسأله مقدار مرزی برگرفته از معادله نفوذ کسری مرتبه-متغیر یک روش عددی با مرتبه دقت بالا طراحی و پیاده‌سازی شده است. این معادله حاوی یک مشتق کسری با مرتبه متغیر نسبت به زمان و یک مشتق صحیح مرتبه دوم نسبت به مکان است. برای ساختن این روش جدید، از یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده برای گسسته‌سازی مکانی و از یک فرمول گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار برای گسسته سازی زمانی استفاده شده است. نشان داده شده است که این روش نسبت به مکان و زمان به ترتیب دارای نرخ همگرایی چهار و دو است. همچنین حل‌پذیری، پایداری و همگرایی روش ساخته شده بررسی شده است. به منظور نشان دادن کارایی و نرخ همگرایی بالای این روش، چند مثال عددی و برخی نتایج مقایسه‌ای ارائه شده است.

استناد: خیرخواه، فرناز و حاجی پور، مجتبی؛ (۱۴۰۳). یک روش عددی دقیق برای حل مسأله نفوذ کسری مرتبه متغیر. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۱)، ۵۱ – ۶۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

حسابان کسری حوزه‌ای در آنالیز ریاضی است که به بررسی و کاربرد انتگرال‌ها و مشتق‌هایی از مرتبه گویا، گنگ و یا حتی مختلط می‌پردازد. تعمیم مفهوم مرتبه مشتق به مقادیر غیر صحیح موجب شروع قضیه حساب دیفرانسیل کسری می‌شود. محققان نشان داده‌اند که ویژگی‌های مسائلی که به صورت غیرموضعی بیان می‌شوند را نمی‌توان به‌درستی با کمک مشتقات از مرتبه صحیح توصیف نمود. به‌علاوه در مقایسه با معادلات حاوی مشتقات یا انتگرال‌های مرتبه صحیح، بسیاری از پدیده‌های دنیای واقعی که رفتاری نامنظم و غیرموضعی دارند را با استفاده از عملگرهای کسری می‌توان بهتر توصیف کرد [۱]. مشتقات مرتبه کسری ویژگی حفظ تاریخچه و ذخیره حافظه را دارند، لذا به عنوان یک ابزار قدرتمند برای توصیف پدیده‌های غیرموضعی که حافظ تاریخچه هستند مورد توجه قرار گرفته است. با این حال نشان داده شده است که حافظه و غیرموضعی بودن رفتار یک سیستم ممکن است تحت تاثیر شرایط زمانی و مکانی تغییر نماید، لذا از مشتقات و انتگرالهای کسری مرتبه-متغیر برای توصیف چنین پدیده‌هایی استفاده شده است. در مشتقات کسری مرتبه-متغیر، در هر لحظه از زمان و در هر نقطه از مکان دینامیک متفاوتی از سایر نقاط داریم و در عین حال این نقطه به نقاط قبلی خود نیز وابسته‌اند اما در مشتقات کسری مرتبه ثابت، مشتق در هر نقطه فقط به زمان‌های قبل وابسته است و دینامیک همه نقاط باهم برابر است. مشتقات کسری مرتبه-متغیر، یک توسعه از مشتقات کسری مرتبه-ثابت می‌باشند [۲]. مفهوم انتگرال و دیفرانسیل کسری مرتبه-متغیر برای اولین بار توسط سامکو و راس در [۳] معرفی شد. به‌علاوه برخی از عملگرهای مشتقات کسری مرتبه-متغیر و مطالعات تئوری آن‌ها توسط لنزو و هارتلی در [۴] بررسی شده است. ویژگی غیرموضعی‌بودن عملگرهای کسری مرتبه-متغیر هزینه محاسباتی را کاهش می‌دهد و دقت محاسباتی را نیز بهبود می‌بخشد. لذا توسعه روش‌های کارآمد برای حل سیستم‌های غیرخطی حاوی مشتقات کسری مرتبه-متغیر از قبیل مسأله نفوذ (انتشار)، مسأله کنترل بهینه و معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی مطلوب است. مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر به‌طور گسترده کاربردهای فراوانی در مدل سازی پدیده‌های متغیر در فیزیک، شیمی و علوم زیست پزشکی دارند [۶،۵]. در مدل بندی پدیده‌های نامنظم مانند نفوذ، به دلیل این که پدیده نفوذ در هر لحظه دارای سرعت یکنواختی نیست یا به‌عبارت بهتر دینامیک در هر لحظه از زمان با سایر زمان‌ها متفاوت است لذا مشتقات کسری مرتبه متغیر چنین پدیده‌هایی را بهتر توصیف می‌کنند. در [۶]، نشان داده شده است که جواب یک مسأله نفوذ کسری با مرتبه-متغیر، در مقایسه با مدل کسری مرتبه-ثابت و مرتبه صحیح متناظرش، تطابق بیشتری با نتایج حاصل از داده‌های آزمایشگاهی دارد؛ و بیانگر این مهم است که پدیده فیزیکی ارائه شده با استفاده از مشتقات کسری مرتبه-متغیر بطور دقیق‌تری توصیف می‌شود. حل تحلیلی معادلات نفوذ کسری مرتبه-متغیر به دلیل پیچیدگی بسیار دشوار و حتی در برخی موارد غیرممکن می‌باشد. تا حدی که در دهه‌های گذشته یکی از دغدغه‌های اساسی دانشمندان، توسعه برخی روش‌های تقریبی برای حل این نوع از معادلات بوده است [۷]. در [۸]، برخی روش‌های تفاضل متناهی برای حل مسأله نفوذ کسری از مرتبه $\alpha(x,t)$ معرفی شده است. در [۱۰،۹]، یک روش عددی کارا برای حل معادلات زیر انتشار غیرعادی مرتبه-متغیر ارائه شده است. همچنین در [۱۱] برخی از روش‌ها از مرتبه $\mathcal{O}(\tau^{2}+h^{4})$ برای حل معادله واکنش-زیرانتشار غیرخطی مرتبه-متغیر به‌دست آمده است که در آن τ گام زمانی و h گام مکانی می‌باشند. در [۱۲] یک روش عددی کارا و از مرتبه $\mathcal{O}(\tau^{3}+h^{4})$ برای حل مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر

ارائه شده است که برای رسیدن به مرتبه دقت سه نسبت به زمان، باید تابع جواب و همچنین مشتقات مرتبه اول، دوم و سوم آن در نقطه شروع مقدار صفر را داشته باشند. در [۱۷] و [۱۸] با استفاده از موجک‌ها برخی روش‌های کارا برای حل مسأله موردنظر نیز ارائه شده است. اخیراً در [۱۹] یک روش عددی با کمک روش‌های بدون شبکه برای حل یک مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر سه‌بعدی ارائه شده است.

هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش عددی کارا بر اساس عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار و یک عملگر تفاضل متناهی فشرده برای حل مسأله مقدار مرزی مبتنی بر معادله نفوذ کسری-زمانی از مرتبه $\alpha(x,t)$ زیر می‌باشد

$$\begin{cases} {}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)=\sigma u_{xx}(x,t)+F(u(x,t),x,t), & t>0,\ x\in(0,L),\\ u(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,t)=\psi_0(t),\quad u(L,t)=\psi_L(t), & t\geqslant 0, \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن $0<\alpha(x,t)<1$، σ ضریب نفوذ و تابع F جمله واکنش می‌باشند. همچنین عبارت ${}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)$ نشان‌دهنده‌ی مشتق کسری کاپوتوی از مرتبه-متغیر $\alpha(x,t)$ برای تابع $u(x,t)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x,t))}\int_0^t (t-\eta)^{-\alpha(x,t)}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}d\eta. \tag{۲}$$

برای این منظور ابتدا یک فرمول تقریبی مبتنی بر عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار را برای گسسته‌سازی زمانی مسأله نفوذ کسری معرفی می‌کنیم. سپس نشان داده می‌شود که فرمول تقریبی حاصل دارای نرخ همگرایی دو برای گسسته‌سازی مشتق کسری مرتبه-متغیر (۲) است. سپس برای گسسته‌سازی مکانی مسأله داده شده از یک فرمول تفاضل متناهی فشرده مرتبه چهارم بهره می‌بریم. همچنین پایداری و آنالیز همگرایی روش پیشنهادی را برای همه مقادیر $0<\alpha(x,t)<1$ بررسی می‌کنیم. به‌علاوه نشان می‌دهیم که این روش دارای نرخ همگرایی $\mathcal{O}(\tau^2+h^4)$ برای حل عددی مسأله نفوذ کسری می‌باشد. در نهایت برای تأیید نرخ همگرایی و کارایی روش پیشنهادی، برخی مثال‌های عددی ارائه شده و با سایر روش‌ها نیز مقایسه شده است.

۱. یک فرمول تقریبی مبتنی بر عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار

در این بخش، ابتدا تعاریف مشتقات کسری مرتبه-متغیر ریمان-لیوویل و کاپوتو را بیان می‌کنیم [۱۳].

تعریف ۱. فرض کنید $0<\alpha(x,t)<1$، در این‌صورت مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha(x,t)$ تابع $u(x,t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t):=\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x,\xi))}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\xi}\frac{u(x,\eta)}{(\xi-\eta)^{\alpha(x,t)}}d\eta\right]_{\xi=t}, \tag{۳}$$

که در آن $\Gamma(.)$ نشان دهنده تابع گاما، $\bar{\alpha} := \sup_{x\in\Omega, t\geqslant 0}\{\alpha(x,t)\}$ و $\underline{\alpha} := \inf_{x\in\Omega, t\geqslant 0}\{\alpha(x,t)\}$.

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، برای بین مشتق کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل مرتبه $\alpha(x,t)$ داریم [۱۳]

$$ {}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}(u(x,t)-u(x,0)) = {}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t). \tag{۴}$$

تعریف ۲. متناظر با مشتق کسری مرتبه متغیر ریمان-لیوویل مرتبه $\alpha(x,t)$، عملگر دیفرانسیلی گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۹]

$$\Lambda_{\tau,p}^{\alpha(x,t)}u(x,t) := \Big[\tau^{-\alpha(x,\xi)}\sum_{k=0}^{[\frac{\xi}{\tau}]+p} w_k^{(\alpha(x,t))}u(x,\xi-(k-p)\tau)\Big]_{\xi=t}, \tag{۵}$$

که در آن p یک عدد صحیح، $w_k^{(\alpha(x,t))} := (-1)^k \binom{\alpha(x,t)}{k}$ و τ طول گام زمانی می‌باشد. به‌راحتی دیده می‌شود که ضرایب $w_k^{(\alpha(x,t))}$، ضرایب سری توانی $(1-z)^{(\alpha(x,t))} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(\alpha(x,t))}z^k$ می‌باشند و با کمک فرمول بازگشتی زیر نیز محاسبه می‌شوند

$$w_k^{(\alpha(x,t))} = (1-\frac{\alpha(x,t)+1}{k})w_{k-1}^{(\alpha(x,t))}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{۶}$$

که در آن $w_0^{(\alpha(x,t))} = 1$.

نشان داده می‌شود که اگر $0 < \alpha(x,t) < 1$، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برای ضرایب $w_k^{(\alpha(x,t))}$ برقرار است [۱۴]

$$(1)\quad w_1^{(\alpha(x,t))} = -\alpha(x,t),\ \ w_k^{(\alpha(x,t))} < 0, \quad k\geq 2, \qquad (2)\ \ \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(\alpha(x,t))} = 0,$$

$$(3)\quad \left|w_{k+1}^{(\alpha(x,t))}\right| < \left|w_k^{(\alpha(x,t))}\right| < \bar{\alpha},\ k\geq 1, \qquad (4)\ -\sum_{k=1}^{n} w_k^{(\alpha(x,t))} < 1,\ \ \forall n\geq 1.$$

در ادامه یک عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار که برای تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه متغیر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳. عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار متناظر با مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه $0 < \alpha(x,t) < 1$ را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\Delta_\tau^{\alpha(x,t)}u(x,t) := (1+\frac{\alpha(x,t)}{2})\Lambda_{\tau,0}^{\alpha(x,t)}u(x,t) - \frac{\alpha(x,t)}{2}\Lambda_{\tau,-1}^{\alpha(x,t)}u(x,t), \tag{۷}$$

در این صورت می‌توان نوشت

$$\Delta_{\tau}^{\alpha(x,t)}u(x,t)=\tau^{-\alpha(x,t)}\Big[(1+\frac{\alpha(x,t)}{2})\sum_{k=0}^{[\frac{t}{\tau}]}w_k^{(\alpha(x,t))}u(x,t-k\tau)$$
$$-\frac{\alpha(x,t)}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{t}{\tau}]-1}w_k^{(\alpha(x,t))}u(x,t-(k+1)\tau)\Big]$$
$$=\tau^{-\alpha(x,t)}\sum_{k=0}^{[\frac{t}{\tau}]}g_k^{(\alpha(x,t))}u(x,t-k\tau), \qquad (8)$$

که در آن ضرایب $g_k^{(\alpha(x,t))}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{cases} g_0^{(\alpha(x,t))}=(1+\frac{\alpha(x,t)}{2})w_0^{(\alpha(x,t))}, \\ g_k^{(\alpha(x,t))}=(1+\frac{\alpha(x,t)}{2})w_0^{(\alpha(x,t))}-\frac{\alpha(x,t)}{2}w_{k-1}^{(\alpha(x,t))}, \quad k=1,2,\dots, \end{cases} \qquad (9)$$

با کمک ویژگی‌های $w_k^{(\alpha(x,t))}$ و لم ۴-۲ در [۶]، می‌توان ویژگی‌های زیر را برای ضرایب $g_k^{(\alpha(x,t))}$ به‌دست آورد.

لم۲-۱. *اگر $0<\alpha(x,t)<1$، آن‌گاه ضرایب $\{g_k^{(\alpha(x,t))}\}$ دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند*

$$(1)\quad g_0^{(\alpha(x,t))}=1+\frac{\alpha(x,t)}{2}>0,\ g_k<0,\ k\geq 1,$$

$$(2)\quad \sum_{k=0}^{\infty}g_k^{(\alpha(x,t))}=0,$$

$$(3)\quad \left|g_k^{(\alpha(x,t))}\right|\leq\frac{\alpha(x,t)}{2}\left|w_{k-1}^{(\alpha(x,t))}\right|+(1+\frac{\alpha(x,t)}{2})\left|w_k^{(\alpha(x,t))}\right|<2,\quad k\geq 1,$$

$$(4)\quad -\sum_{k=1}^{n}g_k^{(\alpha(x,t))}<g_0^{(\alpha(x,t))}=1+\frac{\alpha(x,t)}{2},$$

برهان. با کمک بسط دوجمله‌ای اثبات به‌سادگی انجام می‌شود. □

یک شبکه از نقاط روی $[0,L]\times[0,T]$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathcal{M}:=\{(x_i=ih,\ t_n=n\tau)\,\big|\,n=0,\cdots,N+1,\ i=0,\cdots,M+1\}, \qquad (10)$$

که در آن $h=L/(M+1)$ و $\tau=T/(N+1)$ به ترتیب گام‌های مکانی و زمانی هستند. بنابراین متناظر با عملگر گرانوالد-لتنیکوف وزن‌دار انتقال‌یافته (۸)، می‌توان یک فرمول تقریبی برای گسسته‌سازی مشتق کسری مرتبه-متغیر (۳) به‌صورت زیر ارائه نمود

$$\Delta_{\tau}^{\alpha_i^n} u(x_i,t_n) := \frac{1}{\tau^{\alpha_i^n}} \sum_{k=0}^{n} g_k^{(\alpha_i^n)} u(x_i, t_n - k\tau), \qquad (۱۱)$$

که در آن $\alpha_i^n = \alpha(x_i,t_n)$. در ادامه نشان داده می‌شود که اگر $u(x,۰)=۰$ آنگاه فرمول تقریبی (۱۱) از مرتبه دقت دو برای مشتق کسری مرتبه متغیر (۲) است.

لم ۲-۲. *فرض کنید* $۰<\alpha(x,t)<۱$، $\mathbf{i}^۲=-۱$ و

$$\sigma_۲(z) = ۱-\left(\frac{۱-e^{-z}}{z}\right)^{\alpha}\left(۱+\frac{\alpha}{۲}-\frac{\alpha}{۲}e^{-z}\right) = (\frac{۵}{۲۴}\alpha+\frac{۱}{۸}\alpha^۲)\, z^۲ + \mathcal{O}(z^۳).$$

در این‌صورت عدد ثابت $C_۲$ *موجود است به‌طوری که برای هر* $z\in\mathbb{R}$ *داریم*

$$\left|\sigma_۲(\mathbf{i}z)\right| \le C_۲ |z|^۲.$$

برهان. فرض کنید $R>۰$ شعاع همگرایی مطلق سری توانی $\sigma_۲(z)=\sum_{l=۰}^{\infty} a_l z^l$ باشد، یعنی این سری توانی به ازای هر $|z|\leqslant R$ به‌طور مطق همگراست. به راحتی دیده می‌شود که $a_۰=a_۱=۰$ در این صورت به ازای هر $|z|\leqslant R$ داریم

$$|\sigma_۲(\mathbf{i}z)| = |\sum_{l=۰}^{\infty} a_l (\mathbf{i}z)^l| = |z^۲|\,|\sum_{l=۲}^{\infty} a_l(\mathbf{i}z)^l| \leqslant |z^۲|\,\frac{۱}{R^۲}\sum_{l=۰}^{\infty} a_l R^l.$$

به‌علاوه اگر $|z|>R$، آن‌گاه $\left|\frac{۱}{z}\right| < \frac{۱}{R}$. همچنین چون برای هر $z\in\mathbb{R}$ همواره رابطه $|e^{-\mathbf{i}z}|\leqslant ۱$ برقرار است خواهیم داشت

$$|\sigma_۲(\mathbf{i}z)| = |۱-\left(\frac{۱-e^{-\mathbf{i}z}}{\mathbf{i}z}\right)^{\alpha}\left(۱+\frac{\alpha}{۲}-\frac{\alpha}{۲}e^{-\mathbf{i}z}\right)| \leqslant \left(۱+(۱+\alpha)(\frac{۲}{R})^{\alpha}\right)\frac{|z^۲|}{|z^۲|}$$
$$\leqslant \left(۱+(۱+\alpha)(\frac{۲}{R})^{\alpha}\right)\frac{۱}{R^۲}|z^۲|.$$

در این صورت اگر قرار دهیم

$$C_۲ = \max\left\{\frac{۱}{R^۲}(۱+(\frac{۲}{R})^{\alpha}(۱+\alpha)), \frac{۱}{R^۲}\sum_{l=۰}^{\infty} a_l R^l\right\},$$

آن‌گاه حکم برقرار است. □

لم ۲-۳. *فرض کنید* $u(x,t)$، $^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)+2}u(x,t)$ *و* $\mathcal{F}[^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)+2}u(x,t)]$ *متعلق به فضای* $\mathrm{L}_1(\mathbb{C})$ *باشند. در این‌صورت برای* $0<\alpha(x,t)<1$ *و* $t>0$ *داریم*

$$\Delta_\tau^{\alpha_i^n}u(x_i,t_n)={}^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_t^{\alpha_i^n}u(x_i,t_n)+\mathcal{O}(\tau^2),\quad \tau\to 0. \tag{۱۲}$$

برهان. بدون این‌که خللی به کلیت مسئله وارد شود، فرض کنید برای هر $t<0$ داریم $u(x,t)\equiv 0$. در این‌صورت داریم $^{\mathrm{RL}}_{-\infty}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)={}^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)$. همچنین برای هر $\xi\le t_n$ و هر عدد صحیح $0\le k\le n$ داریم

$$\mathcal{F}[u(x_i,t-k\tau)](\omega)=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}k\omega\tau}\hat{u}(x_i,w),$$

و

$$\mathcal{F}[^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_\xi^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,\xi)](\omega)=(\mathbf{i}\omega)^{\alpha(x_i,t_n)}\hat{u}(x_i,w).$$

با استفاده از تبدیل فوریه $\mathcal{F}$ برای معادله (۷) داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\Delta_\tau^{\alpha_i^n}u(x_i,\xi)\big](\omega)&=\tau^{-\alpha_i^n}(1-e^{\mathbf{i}\omega\tau})^{\alpha_i^n}\Big((1+\frac{\alpha_i^n}{2})-\frac{\alpha_i^n}{2}e^{-\mathbf{i}\omega\tau}\Big)\hat{u}(x_i,w)\\&=\sigma_2(\mathbf{i}\omega\tau)(\mathbf{i}\omega)^{\alpha_i^n}\hat{u}(x_i,w),\end{aligned}$$

که در آن

$$\sigma_2(z)=\Big(\frac{1-e^{-z}}{z}\Big)^{\alpha_i^n}\Big((1+\frac{\alpha_i^n}{2})-\frac{\alpha_i^n}{2}e^{-z}\Big)=1-\Big(\frac{5}{24}\alpha_i^n+\frac{1}{8}(\alpha_i^n)^2\Big)z^2+\mathcal{O}(z^3).$$

طبق لم ۲-۲ ثابت مثبت C_2 وجود دارد به‌طوری که $|1-\sigma_2(-iz)|\leqslant C_2|z|^2$. با استفاده از فرض قضیه و این‌که $\mathcal{F}[^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)+2}u(x,t)]$ موضعاً انتگرال‌پذیر است و همچنین با استفاده از تبدیل فوریه معکوس داریم

$$\begin{aligned}G(x_i,\xi)&=\big|{}^{\mathrm{RL}}_{-\infty}\mathcal{D}_\xi^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,\xi)-\Delta_\tau^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,\xi)\big|\\&=\Big|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t}\big(\mathcal{F}[^{\mathrm{RL}}_{\circ}\mathcal{D}_\xi^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,\xi)-\Delta_\tau^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,\xi)](\omega)\big)d\omega\Big|\\&=\Big|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t}(1-\sigma_2(\mathbf{i}\omega\tau))(\mathbf{i}\omega)^{\alpha(x_i,t_n)}\hat{u}(x_i,w)d\omega\Big|\\&\leqslant|\tau|^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^{\alpha(x_i,t_n)+2}|\hat{u}(x_i,w)|d\omega\\&\leqslant C_2|\tau|^2\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\omega|)^{\bar{\alpha}+2}|\hat{u}(x_i,w)|d\omega\Big)\leqslant\tilde{C}|\tau|^2,\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{C}=\frac{C_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\omega|)^{\bar{\alpha}+2}|\hat{u}(x_i,w)|d\omega$. از آن‌جایی که عبارت $\tilde{C}\,|\tau|^2$ وابسته به ξ نیست، می‌توانیم داشته باشیم $\max_{\xi\leq t_n} G(x_i,\xi)\leq \tilde{C}\,|\tau|^2$. به ویژه برای $\xi=t_n$ نتیجه می‌گیریم که

$$G(x_i,t_n)=\left|{}_{-\infty}^{RL}D_t^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,t_n)-\Delta_\tau^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,t_n)\right|\leq \tilde{C}\,|\tau|^2.$$

نامساوی فوق منجر به نتیجه زیر می‌شود

$$\forall t\geq 0,\qquad \left|{}_{-\infty}^{RL}D_t^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,t_n)-\Delta_\tau^{\alpha(x_i,t_n)}u(x_i,t)\right|\leq \tilde{C}\,|\tau|^2.$$

و لذا اثبات تمام است. $\square$

ملاحظه۲-۴. با فرض برقرار مفروضات لم ۲-۳، اگر تابع u در شرایط $\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\big|_{t=0}=0$ که $0\leq k\leq 2$ صدق کند. آن‌گاه

$$\Delta_\tau^{\alpha_i^n}u(x_i,t_n)={}_0^C\mathcal{D}_t^{\alpha_i^n}u(x_i,t_n)+\mathcal{O}(\tau^2).$$

توجه شود که در سال‌های اخیر تعاریف متفاوتی از مشتق کسری مرتبه-متغیر در مفهوم ریمان-لیوویل و کاپوتو ارائه شده است که ممکن است شیوه گسسته‌سازی ارائه شده در فوق برای آن‌ها سازگار نباشد [۲]. همچنین حل مسائلی حاوی مشتق کسری مرتبه-متغیر از نوع مشتق داده شده در رابطه (۳) مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است و آن‌ها سازگاری این مشتق را از نقطه نظر فیزیکی با حل برخی مسائل واقعی همراه با داده‌های آزمایشگاهی تأیید نموده‌اند [۶].

۲. گسسته‌سازی مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر

در این بخش یک روش عددی دقیق را برای حل مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر زیر فرمول‌بندی می‌کنیم

$$\begin{cases}{}_0^C\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)=\kappa_1 u_{xx}(x,t)+\kappa_2 u(x,t)+f(x,t), & (x,t)\in(0,L)\times(0,T],\\ u(x,0)=0, \quad x\in(0,L), & \\ u(0,t)=\psi_0(t),\quad u(L,t)=\psi_L(t), & \mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}],\end{cases}\qquad (۱۳)$$

که در آن $0<\alpha(x,t)<1$ و κ_1، κ_2 مقادیر ثابت می‌باشند. توابع $f(x,t)$، $\psi_0(t)$ و $\psi_L(t)$ به اندازه کافی هموار هستند به‌گونه‌ای که $\psi_0(0)=0$ و $\psi_L(0)=0$. توجه داشته باشید که برای شرایط اولیه ناهمگن $u(x,0)\equiv\varphi_0(x)$، متغیر جدید $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\varphi_0(x)$ را برای ارائه روش پیشنهادی اعمال می‌کنیم.

یک شبکه یکنواخت از نقاط را به صورت (۱۰) روی دامنه $[0,L]\times[0,T]$ در نظر بگیرید. به‌علاوه فرض کنید U_i^n نشان‌دهنده مقدار تقریبی $u_i^n := u(x_i,t_n)$ باشد. حال برای تقریب مشتق مرتبه دوم مکانی $u_{xx}(x,t)$، از فرمول تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهارم زیر استفاده می‌کنیم [۱۴]

$$u_{xx}(x_i,t_n)=\frac{\delta_x^2}{h^2(1+\frac{1}{12}\delta_x^2)}u(x_i,t_n)+\frac{h^4}{240}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i,t_n)+\mathcal{O}(h^6), \qquad (۱۴)$$

که در آن $\delta_x u(x_i,t_n):=u(x_i+\frac{h}{2},t_n)-u(x_i-\frac{h}{2},t_n)$. همچنین با به کارگیری عملگر $\mathcal{H}_x := 1+\frac{1}{12}\delta_x^2$ در گسسته سازی مکانی و با استفاده از لم ۳ در [۷] می‌توان دقت مرتبه چهارم را به‌دست آورد. در این صورت با کمک فرمول (۱۴) برای گسسته‌سازی مکانی و همچنین عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار مرتبه دوم $\Delta_\tau^{\alpha_i^n}$ داده شده در (۱۱) جهت گسسته‌سازی زمانی می‌توان فرم گسسته معادله نفوذ کسری-زمانی مرتبه-متغیر (۱۳) را به صورت زیر فرمول‌بندی نمود

$$\mathcal{H}_x(\Delta_\tau^{\alpha_i^n}u_i^n)=\frac{\kappa_1}{h^2}\delta_x^2u_i^n+\mathcal{H}_x(\kappa_2u_i^n+f_i^n)+R_i^n,\quad 1\leqslant n\leqslant N+1,\ 1\leqslant i\leqslant M, \qquad (۱۵)$$

که در آن $f_i^n := f(x_i,t_n)$. در نتیجه با استفاده از (۱۴) و لم۲-۳ خطای برشی موضعی در (x_i,t_n) از مرتبه $\mathcal{O}(\tau^2+h^4)$ به‌دست می‌آید، یعنی $|R_i^n|\leq C_0(\tau^2+h^4)$. در نهایت یک روش عددی برای حل مسأله مقدار مرزی-اولیه کسری مرتبه-متغیر (۱۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}\mathcal{H}_x\left(\tau^{-\alpha_i^n}\sum_{k=0}^{n}g_k^{(\alpha_i^n)}U_i^{n-k}\right)=\kappa_1\frac{\delta_x^2}{h^2}U_i^n+\mathcal{H}_x(\kappa_2U_i^n+f_i^n),\ 1\leqslant n\leqslant N+1, 1\leqslant i\leqslant M,\\ U_i^0=0,\quad i=0,1,\ldots,M+1,\\ U_0^n=\psi_0^n,\quad U_{M+1}^n=\psi_L^n,\quad n=0,1,\ldots,N+1,\end{cases} \qquad (۱۶)$$

که در آن $\Psi_0^n := \psi_0(t_n)$ و $\Psi_L^n := \psi_L(t_n)$. بنابراین سیستم معادلات گسسته سازی شده (۱۶) یک روش تفاضلاتی ضمنی برای حل عددی مسأله (۱۳) ارائه می‌کند. فرض کنید فرم ماتریسی توابع شبکه‌ای به‌صورت $\mathbf{U}^n := [U_1^n,U_2^n,\ldots,U_M^n]^T$ و $\mathbf{F}^n := [f_1^n,f_2^n,\ldots,f_M^n]^T$ باشد. در این‌صورت فرم ماتریسی روش ارائه شده برای مسئله (۱۳) به‌صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases}\mathbf{U}^0=[0,0,\ldots,0]^T,\\ \mathbf{A}_\tau^n\ \mathbf{U}^n=-\mathbf{J}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\mathbf{U}^{n-k}+\mathbf{B}^n,\quad n=1,\ldots,N+1,\end{cases} \qquad (۱۷)$$

که در آن $\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)} = [\tau^{-\alpha_1^n} g_k^{(\alpha_1^n)}, \tau^{-\alpha_2^n} g_k^{(\alpha_2^n)}, \ldots, \tau^{-\alpha_M^n} g_k^{(\alpha_M^n)}]^T$ ،

$$\mathbf{A}_\tau^n = (\mathbf{J}\ \mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,0}^{(\alpha^n)} - \kappa_2) - \frac{\kappa_1}{h^2}\mathbf{J}_0), \qquad (18)$$

و ماتریس‌های $\mathbf{J} := \mathrm{tridiag}(\frac{1}{12}, \frac{10}{12}, \frac{1}{12})$ و $\mathbf{J}_0 := \mathrm{tridiag}(1, -2, 1)$ سه‌قطری هستند. همچنین

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^n := \mathbf{J}\mathbf{F}^n &+ \Big((\frac{\kappa_1}{h^2} + \frac{\kappa_2}{12})\psi_0^n + \frac{1}{12}(f_0^n - \Delta_\tau^{\alpha_0^n}\psi_0^n) \Big)\mathbf{I}_1 \\ &+ \Big((\frac{\kappa_1}{h^2} + \frac{\kappa_2}{12})\psi_L^n + \frac{1}{12}(f_{M+1}^n - \Delta_\tau^{\alpha_{M+1}^n}\psi_L^n) \Big)\mathbf{I}_M \ .\end{aligned} \qquad (19)$$

به‌علاوه $\mathbf{I}_i$ نشان دهنده یک بردار با M سطر می‌باشد که درایه i ام آن یک و بقیه درایه‌ها صفر می‌باشند. ضریب $\mathbf{A}_\tau^n$ یک ماتریس سه قطری و غالب قطری اکید می‌باشد. آنگاه برای هر n ، سیستم جبری (۱۷) یک سیستم جبری سه قطری می‌باشد در نتیجه این سیستم جبری به ازای هر $n \geq 1$ دارای جواب منحصر بفرد می‌باشد. آنالیز پایداری و همگرایی روش پیشنهادی (۱۷) برای مسأله کسری مرتبه-متغیر (۱۳) در ادامه بررسی خواهد شد. فرض کنید $\| \mathbf{A} \|$ مشخص کننده نرم L_2 ماتریس $\mathbf{A}$ باشد. با استفاده روش ارائه شده در صفحه ۱۵۴ در [۱۵] ، مقادیر ویژه $\mathbf{J}_0$ و $\mathbf{J}$ به‌ترتیب به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{cases} \lambda_s^{\mathbf{J}_0} := -4\sin^2(\dfrac{s\pi}{2(M+1)}), & s = 1, 2, \ldots, M \ , \\ \lambda_s^{\mathbf{J}} := 1 - \dfrac{1}{3}\sin^2(\dfrac{s\pi}{2(M+1)}), & s = 1, 2, \ldots, M \ . \end{cases} \qquad (20)$$

قضیه۳-۱. (پایداری نامشروط) *روش عددی (۱۷) برای حل مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر (۱۳) پایدار نامشروط است هرگاه* $\kappa_2 \leq \dfrac{6\kappa_1}{h^2}$.

برهان. فرض کنید $\widetilde{\mathbf{U}}^n$ جواب دستگاه معادلات زیر باشد

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}^0 = \Phi^0, \\ \mathbf{A}_\tau^n \widetilde{\mathbf{U}}^n = -\mathbf{J}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\widetilde{\mathbf{U}}^{n-k} + \mathbf{B}^n, \quad n = 1, \ldots, N+1, \end{cases} \qquad (21)$$

که در آن $\Phi^0 := [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_M]^T$. از آن‌جایی که $\mathbf{A}_\tau^n$ یک ماتریس سه قطری و غالب قطری است لذا معکوس‌پذیر می‌باشد. قرار می‌دهیم $\mathbf{E}^n := \widetilde{\mathbf{U}}^n - \mathbf{U}^n - \Phi^0$. لذا با استفاده از روابط (۱۷) و (۲۱) می‌توانیم دستگاه معادلات خطای حاصل از روش عددی (۱۷) را به صورت زیر به‌دست آوریم

$$\mathbf{E}^n = -(\mathbf{A}_\tau^n)^{-1}\mathbf{J}(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\mathbf{E}^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\Phi^0) - \Phi^0,\ \ n = 1,\dots,N+1 \qquad (22)$$

که در آن $\mathbf{E}^0 := [0,\dots,0]^T$. فرض کنید λ_s^n نشان‌دهنده s-امین مقدار ویژه ماتریس سه قطری $\mathbf{A}_\tau^n$ باشد، لذا با استفاده از قضیه دایره‌های گریشگورین ۱-۲-۷ در [۱۶] داریم

$$\begin{cases}\lambda_s^n \geqslant \Big(\frac{10}{12}((1+\frac{\alpha_s^n}{2})\tau^{-\alpha_s^n} - \kappa_2) + 2\frac{\kappa_1}{h^2} - 2\Big|\frac{1}{12}((1+\frac{\alpha_s^n}{2})\tau^{-\alpha_s^n} - \kappa_2) - \frac{\kappa_1}{h^2}\Big|\Big),\\ \lambda_s^n \leqslant \Big(\frac{10}{12}((1+\frac{\alpha_s^n}{2})\tau^{-\alpha_s^n} - \kappa_2) + 2\frac{\kappa_1}{h^2} + 2\Big|\frac{1}{12}((1+\frac{\alpha_s^n}{2})\tau^{-\alpha_s^n} - \kappa_2) - \frac{\kappa_1}{h^2}\Big|\Big),\end{cases} \qquad (23)$$

که $s = 1,\dots,M$. با توجه به این‌که $1 \leqslant \max\{1+\frac{\alpha(x,t)}{2} : \forall x,t\} \leqslant \frac{3}{2}$، اگر $\kappa_2 \leq \frac{6\kappa_1}{h^2}$ آن‌گاه داریم

$$|\lambda_s^n| \geqslant \frac{2}{3}\tau^{-\alpha_s^n}, \qquad s = 1,2,\dots,M. \qquad (24)$$

در این صورت طبق (۲۴) و با استفاده از رابطه (۲۰) داریم

$$\|(\mathbf{A}_\tau^n)^{-1}\mathbf{J}\| \leq \frac{3}{2}\tau^{\alpha_s^n}, \qquad s = 1,2,\dots,M, \qquad (25)$$

که در آن $0 < \alpha_s^n < 1$. همچنین با استفاده از لم ۲-۱ داریم

$$\sum_{k=0}^{n}|g_k^{(\alpha_i^n)}| = g_0^{(\alpha_i^n)} - \sum_{k=1}^{n} g_k^{(\alpha_i^n)} < g_0^{(\alpha_i^n)} + g_0^{(\alpha_i^n)} = \alpha_i^n + 2 \leq 3,$$

که در آن $i = 1,2,\dots,M$ و $n = 1,2,\dots,N$ فرض کنید s یک عدد صحیح باشد به‌طوری‌که

$$\|\mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\| \leqslant \tau^{-\alpha_s^n}|g_k^{(\alpha_s^n)}|. \qquad (26)$$

با به کار بردن معادلات (۲۵) و (۲۶) در معادله (۲۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|\mathbf{E}^n\| &\leq \|(\mathbf{A}_\tau^n)^{-1}\mathbf{J}\|(\sum_{k=1}^{n}\|\mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\|\|\mathbf{E}^{n-k}\| + \|\Phi^0\|\sum_{k=0}^{n}\|\mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\|) + \|\Phi^0\|\\ &\leq \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}|g_k^{(\alpha_s^n)}|\|\mathbf{E}^{n-k}\| + \frac{3}{2}\|\Phi^0\|\sum_{k=0}^{n}|g_k^{(\alpha_s^n)}| + \|\Phi^0\|\\ &\leq \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}|g_k^{(\alpha_s^n)}|\|\mathbf{E}^{n-k}\| + \frac{11}{2}\|\Phi^0\| \leq \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n-1}|g_{n-k}^{(\alpha_s^n)}|\|\mathbf{E}^k\| + \frac{11}{2}\|\Phi^0\|.\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۲-۱ برای هر $0 \leq k \leq n-1$ داریم $|g_{n-k}^{(\alpha_s^n)}| < 2$. لذا داریم

$$\| \mathbf{E}^n \| \leq 3\sum_{k=0}^{n-1} \| \mathbf{E}^k \| + \frac{11}{2} \| \Phi^0 \| .$$

با استفاده از نامساوی گرانوال داده شده در لم ۵-۱-۱۳ در [۱۴]، ثابت مثبت $\tilde{C}$ مستقل از h و τ موجود است به‌طوری که

$$\| \mathbf{E}^n \| \leq \tilde{c} \| \Phi^0 \|, \qquad n = 1,\dots N+1. \tag{۲۸}$$

در نتیجه روش گسسته سازی شده (۱۷) پایدار نامشروط می‌باشد. □

قضیه۳-۲. **(نرخ همگرایی)** *فرض کنید $u(x,t) \in \mathcal{C}^{6,3}_{x,t}([0,L]\times[0,T])$ جواب مسأله (۱۳) باشد و برای $k=0,1,2$ در شرط $\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = 0$ صدق کند. آن‌گاه جواب سیستم معادلات گسسته (۱۷) به $u(x,t)$ همگراست هرگاه $\tau, h \to 0$. به‌علاوه مرتبه همگرایی روش $\mathcal{O}(\tau^2+h^4)$ می‌باشد.*

برهان. قرار دهید $e_i^n := U_i^n - u_i^n$. با استفاده از معادلات (۱۳) و (۱۷)، معادله خطای روش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\overline{\mathbf{E}}^n = -(\mathbf{A}_\tau)^{-1}\mathbf{J}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{diag}(\mathbf{g}_{\tau,k}^{(\alpha^n)})\overline{\mathbf{E}}^{n-k} + (\mathbf{A}_\tau)^{-1}\mathbf{R}^n, \tag{۲۹}$$

که در آن $\overline{\mathbf{E}}^0 := [0,0,\dots,0]^T$، $\overline{\mathbf{E}}^n := [e_1^n,\dots,e_M^n]^T$ و $\mathbf{R}^n := [R_1^n,\dots,R_M^n]^T$. با استفاده از رابطه (۱۵) داریم $R_i^n = \mathcal{O}(\tau^2+h^4)$، آنگاه ثابت C_1 وجود دارد به‌طوری که $\| \mathbf{R}^n \| \leqslant C_1(\tau^2+h^4)$. با استفاده از معادلات (۲۴)-(۲۶)، لم ۲-۱ و نامساوی گرانوال برای (۲۹) داریم

$$\| \overline{\mathbf{E}}^n \| \leq C_1 \max\{\tau^{\overline{\alpha}}, \tau^{\underline{\alpha}}\}\exp(5\overline{\alpha}n)(\tau^2+h^4) \leq \tilde{C}_1 \max\{\tau^{\overline{\alpha}}, \tau^{\underline{\alpha}}\}(\tau^2+h^4).$$

که در آن $n=1,\dots,N+1$ و $\tilde{C}_1$ عددی مثبت است. لذا اثبات تمام است. □

۳. مثال‌های عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی برای حل عددی مسأله نفوذ کسری-زمانی مرتبه-متغیر ارائه شده است. همچنین نتایج عددی حاصل از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در [۱۷] و [۱۸] مقایسه شده است.

مثال ۱. مسأله نفوذ کسری مرتبه-متغیر همراه با شرایط اولیه، مرزی و جواب دقیق $u(x,t)=t^{\beta}\sin(\lambda x)$ و $\beta>0$ زیر را روی $(x,t)\in[0,1]\times[0,T]$ در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)}u(x,t)=u_{xx}(x,t)+\lambda^2 u(x,t)+\dfrac{\Gamma(\beta+1)t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\sin(\lambda x), \\ u(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant L, \\ u(0,t)=0, \quad u(L,t)=t^{\beta}\sin(\lambda L), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{۳۰}$$

برای مقادیر مختلف از طول گام‌های τ و h، نتایج عددی روش (۱۷) شامل ماکزیمم خطا، نرخ همگرایی روش و زمان اجرای برنامه (بر حسب ثانیه) حل مسأله نفوذ-کسری (۳۰) در شکل ۱ و جدول‌های ۱-۴ در زمان $T=1$ گزارش شده‌اند.

جدول ۱. به ازای تعداد نقاط مختلف N در جهت t ، ماکزیمم خطا، نرخ همگرایی زمانی و زمان اجرای برنامه (ثانیه) حاصل از روش پیشنهادی با $h=\frac{1}{400}$ برای حل مثال ۱ وقتی‌که جواب واقعی $u(x,t)=t^2\sqrt{t}\sin(2\pi x)$ می‌باشد.

$N=1/\tau$	$\alpha(x,t)=\frac{exp(-xt)}{300}$ خطا	نرخ همگرایی	$\alpha(x,t)=\frac{20-(xt)^2}{500}$ خطا	نرخ همگرایی	$\alpha(x,t)=\frac{1+sin^2(100xt)}{200}$ خطا	نرخ همگرایی	زمان (ثانیه)
۴	۹/۷۵e-۰۵	-	۰/۰۰۱۹	-	۲/۰۰۸e-۰۴	-	۰/۰۴
۸	۲/۵۰e-۰۵	۱/۹۶	۴/۷۹e-۰۴	۱/۹۹	۵/۲۲e-۰۵	۱/۹۴	۰/۱۳
۱۶	۶/۳۴e-۰۶	۱/۹۸	۱/۲۰e-۰۴	۱/۹۹	۱/۳۰e-۰۵	۱/۹۹	۰/۳۸
۳۲	۱/۶۰e-۰۶	۱/۹۹	۳/۰۰e-۰۵	۲/۰۰	۲/۹۴e-۰۶	۲/۱۵	۱/۴۰
۶۴	۴/۰۰e-۰۷	۲/۰۰	۷/۵۰e-۰۶	۲/۰۰	۶/۴۸e-۰۷	۲/۱۸	۵/۳۱
۱۲۸	۱/۰۰e-۰۷	۲/۰۰	۱/۸۷e-۰۶	۲/۰۰	۱/۵۲e-۰۷	۲/۰۹	۲۱/۰۱
۲۵۶	۲/۵۰e-۰۸	۲/۰۰	۴/۶۶e-۰۷	۲/۰۰	۳/۸۰e-۰۸	۲/۰۰	۸۰/۸۵

در اینجا مرتبه مشتقات کسری یعنی تابع $\alpha(x,t)$ به صورت زیر انتخاب شده است

$$\alpha(x,t)=0.25,\ 0.5,\ \frac{e^{-xt}}{300},\ \frac{20-(xt)^2}{500},\ \frac{1+\sin^2(100xt)}{200}. \tag{۳۱}$$

طبق قضیه۳-۱، روش پیشنهادی (۱۷) بدون هیچ شرطی پایدار است. همانطور که جدول ۱ نشان می‌دهد روش پیشنهادی نسبت به زمان دارای نرخ همگرایی $\mathcal{O}(\tau^2)$ است و جدول ۲ نشان می‌دهد که این روش نسبت به مکان از نرخ همگرایی $\mathcal{O}(h^4)$ بهره‌مند می‌باشد و مطابق با نتایج تئوری ارائه شده در قضیه ۳-۲ است.

جدول۲. به ازای تعداد نقاط مختلف M در جهت x، ماکزیمم خطا، نرخ همگرایی مکانی و زمان اجرای برنامه (ثانیه) حاصل از روش پیشنهادی با $\tau=\frac{1}{2000}$ برای حل مثال ۱ وقتی‌که جواب واقعی $u(x,t)=t^2\sqrt{t}\sin(2\pi x)$ می‌باشد.

زمان (ثانیه)	$\alpha(x,t)=\frac{1+\sin^2(100xt)}{200}$ نرخ همگرایی	خطا	$\alpha(x,t)=\frac{20-(xt)^2}{500}$ نرخ همگرایی	خطا	$\alpha(x,t)=\frac{\exp(-xt)}{300}$ نرخ همگرایی	خطا	$M=\frac{1}{h}$
۴۰/۴۲	-	۰/۰۰۳۹	-	۰/۰۰۳۸	-	۰/۰۰۳۹	۱۶
۴۷/۰۱	۳/۹۹	۲/۴۴e-۰۴	۴/۰۱	۲/۳۴e-۰۴	۴/۰۰	۲/۴۴e-۰۴	۳۲
۸۰/۲۳	۴/۰۰	۱/۵۳e-۰۵	۴/۰۰	۱/۴۶e-۰۵	۴/۰۵	۱/۵۲e-۰۵	۶۴
۱۹۸/۲۱	۳/۹۹	۹/۵۳e-۰۷	۳/۹۸	۹/۲۲e-۰۷	۳/۹۹	۹/۴۹e-۰۷	۱۲۸
۱۰۵/۵۰	۴/۰۰	۵/۹۳e-۰۸	۴/۰۰	۵/۷۵e-۰۸	۳/۹۹	۵/۹۰e-۰۸	۲۵۶

به منظور مقایسه کارایی و دقت بالای روش ارائه شده، نتایج عددی حاصل از این روش و دو روش عددی داده شده در [۱۷] و [۱۸]، برای حل مسأله نفوذ-کسری (۳۰)، در جدول ۳ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نسبت به دو روش داده شده در [۱۷] و [۱۸] دقیق‌تر است. نتایج عددی حاصل از روش پیشنهادی برای حل مسأله (۳۰)، هنگامی‌که $\beta=\frac{1}{2}$ ، $\beta=\frac{5}{4}$ و $\beta=\frac{7}{4}$، در جدول ۳ گزارش شده است که در آن طول گام‌های مکانی و زمانی به صورت $h=\frac{1}{400}$ و $\tau=\frac{1}{40},\frac{1}{80},\frac{1}{160}$ انتخاب شده‌اند.

جدول ۳. مقایسه ماکزیمم خطای حاصل از روش‌های ارائه شده در [۱۷]، [۱۸] و روش پیشنهادی برای حل مثال ۱ وقتی‌که جواب واقعی تابع $u(x,t)=t^2\sin(2\pi x)$ است.

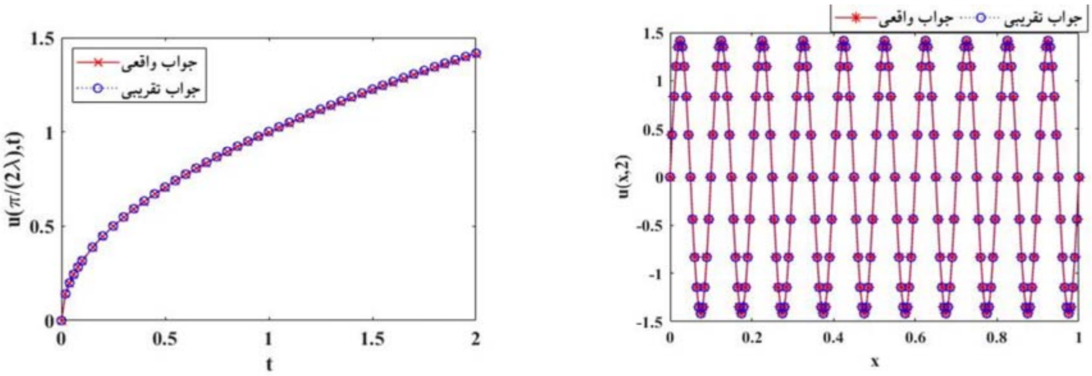
$\alpha(x,t)$	روش پیشنهادی $(\tau=\frac{1}{2000},h=\frac{1}{500})$	روش ارائه شده در[۱۷] $(K=1,M_1=7)$	روش ارائه شده در [۱۸] $(\hat{m}=30,k=1,M=15)$
۰/۲۵	۴/۸۳e-۰۸	۶/۶۳e-۰۶	۲/۴۵e-۰۳
۰/۵	۴/۶۳e-۰۸	۶/۶۱e-۰۶	۲/۴۶e-۰۳
$\alpha(x,t)=\frac{20-(xt)^2}{500}$	۵/۷۵e-۰۸	۶/۶۴e-۰۶	-

جدول۴. به ازای $N = 40, 80, 160$، ماکزیمم خطا، نرخ همگرایی زمانی و زمان اجرای برنامه (ثانیه) حاصل از روش پیشنهادی با $h = \frac{1}{400}$ برای حل مثال ۱ وقتی‌که جواب واقعی $u(x,t) = t^{\beta}\sin(2\pi x)$ و $0 < \beta < 2$ می‌باشد.

زمان (ثانیه)	$\alpha(x,t)=\frac{1+\sin^2(100xt)}{200}$ نرخ همگرایی	$\alpha(x,t)=\frac{1+\sin^2(100xt)}{200}$ خطا	$\alpha(x,t)=\frac{20-(xt)^2}{500}$ نرخ همگرایی	$\alpha(x,t)=\frac{20-(xt)^2}{500}$ خطا	$\alpha(x,t)=\frac{exp(-xt)}{300}$ نرخ همگرایی	$\alpha(x,t)=\frac{exp(-xt)}{300}$ خطا	$N=\frac{1}{\tau}$	β
۱/۹۵	–	۰/۰۰۱۲	–	۰/۰۰۳	–	۲/۴۲e-۰۴	۴۰	$\frac{1}{2}$
۷/۲۷	۰/۸۸	۶/۵۱e-۰۴	۰/۵۱	۰/۰۰۲۱	۰/۴۹	۱/۷۲e-۰۴	۸۰	
۲۷/۳۱	۱/۰۴	۳/۱۹e-۰۴	۰/۹۳	۰/۰۰۱۱	۰/۷۸	۱/۰۰e-۰۴	۱۶۰	
۱/۹۵	–	۱/۰۸e-۰۵	–	۲/۶۳e-۰۵	–	۲/۳۶e-۰۶	۴۰	$\frac{5}{4}$
۷/۲۷	۱/۵۶	۳/۶۸e-۰۶	۱/۲۵	۱/۱۱e-۰۵	۱/۲۴	۹/۹۸e-۰۷	۸۰	
۲۷/۳۱	۱/۷۷	۱/۰۸e-۰۶	۱/۷۵	۳/۲۹e-۰۶	۱/۸۱	۲/۸۵e-۰۷	۱۶۰	
۱/۹۵	–	۶/۸۳e-۰۶	–	۱/۹۹e-۰۵	–	۱/۶۵e-۰۶	۴۰	$\frac{7}{4}$
۷/۲۷	۱/۸۷	۴/۸۸e-۰۶	۱/۷۵	۵/۹۳e-۰۶	۱/۷۴	۴/۹۳e-۰۷	۸۰	
۲۷/۳۱	۱/۹۹	۴/۶۸e-۰۷	۱/۷۵	۱/۷۶e-۰۶	۱/۸۴	۱/۳۷e-۰۷	۱۶۰	

همانطور که این جدول نشـــان می‌دهد با افزایش تعداد نقاط گرهی نســـبت به زمان یعنی N، روش پیشـــنهادی برای $\beta = \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ نرخ همگرایی $\mathcal{O}(\tau^2)$ را در جهت زمان به‌دســـت می‌آورد. در حالی‌که برای $\beta = \frac{1}{2}$، این روش نرخ همگرای مطلوب خود را از دست می‌دهد، این امر ناقض کارایی روش نیست زیرا جواب واقعی، برای $0 < \beta < 1$ در $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست و لذا در شرایط داده شده در قضیه ۳-۲ نیز صدق نمی‌کند. با این حال، جواب تقریبی این روش تطابق بسیار مناسبی با جواب واقعی مسأله دارد.

همچنین برای $\alpha(x,t) = \frac{1}{200}(1+\sin^2(100xt))$، جواب واقعی و جواب تقریبی مسأله (۳۰) حاصل از روش پیشنهادی با $M = 400$ و $N = 500$ در زمان $T = 2$ در شکل ۱ مقایسه شده‌اند. این شکل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی وقتی‌که جواب واقعی یک تابع نوسانی نسبت به x و همچنین تابعی ناهموار نسبت t به فرم $u(x,t) = \sqrt{t}\sin(20\pi x)$ است نیز موفق است، به‌علاوه در این حالت ماکزیمم خطای روش از مرتبه 10^{-4} است.



(الف) جواب $u(x,T=2)$ (ب) جواب $u(x=\frac{\pi}{2\lambda},t)$

شکل ۱. برای $\alpha(x,t)=\frac{1}{200}(1+\sin^{2}(100xt))$ ، جواب واقعی و جواب تقریبی مسأله (۳۰) حاصل از روش پیشنهادی با $M=400$ و $N=500$ در زمان $T=2$ وقتی‌که جواب به فرم $u(x,t)=\sqrt{t}\sin(\lambda x)$ و $\lambda=20\pi$ است، به‌علاوه ماکزیمم خطای روش از مرتبه 10^{-4} است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش سریع و با نرخ همگرایی بالا برای حل عددی مسأله نفوذ-کسری مرتبه-متغیر از مرتبه $\alpha(x,t)$ ارائه شده است. برای گسسته‌سازی این مسأله، از یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده برای گسسته‌سازی مکانی و از یک عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شده است. روش پیشنهادی پایدار نامشروط است و دارای نرخ همگرایی دو نسبت به زمان و نرخ همگرایی چهار نسبت به مکان می‌باشد. طبق نتایج مقایسه‌ای گزارش شده، روش پیشنهادی نسبت به برخی روش‌های موجود دقیق‌تر است.

References

1. D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo. Fractional calculus: models and numerical methods, vol 3.World Scientific, 2012.
2. R. Almeida, D. Tavares, and D. F. Torres. The variable-order fractional calculus of variations. Springer, 2019.
3. S. G. Samko and B. Ross, Integration and differentiation to a variable fractional order, Integral transforms and special functions, **1** (1993), 277–300.
4. C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, Variable order and distributed order fractional operators, Nonlinear dynamics, **29** (2002), 57–98.
5. M. A. Zaky, A legendre spectral quadrature tau method for the multi-term time-fractional diffusion equations, Computational and Applied Mathematics, **37** (2018), 3525–3538.

6. M. Hajipour, A. Jajarmi, D. Baleanu, and H. Sun, On an accurate discretization of a variable-order fractional reactiondiffusion equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **69** (2019), 119–133.
7. J. Cao, Y. Qiu, and G. Song, A compact finite difference scheme for variable order subdiffusion equation, Communicationsin Nonlinear Science and Numerical Simulation, **48 (**2017), 140–149.
8. R. Lin, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, Stability and convergence of a new explicit finite-difference approximationfor the variable-order nonlinear fractional diffusion equation, Applied Mathematics and Computation, **212** (2009), 435–445.
9. C.-M. Chen, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, Numerical schemes with high spatial accuracy for a variable-order anomalous subdiffusion equation, SIAM Journal on Scientific Computing, **32** (2010), 1740–1760.
10. C.-M. Chen, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, Numerical simulation for the variable-order galilei invariant advectiondiffusion equation with a nonlinear source term, Applied Mathematics and Computation, **217** (2011), 5729–5742.
11. S. Shen, F. Liu, J. Chen, I. Turner, and V. Anh, Numerical techniques for the variable order time fractional diffusion equation, Applied Mathematics and Computation, **218 (**2012), 10861–10870.
12. F. Kheirkhah, M. Hajipour, and D. Baleanu, The performance of a numerical scheme on the variable-order timefractional advection-reaction-subdiffusion equations, Applied Numerical Mathematics, **178** (2022), 25–40.
13. P. Zhuang, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term, SIAM Journal on Numerical Analysis, **47** (2009), 1760–1781.
14. C. Li and F. Zeng. Numerical methods for fractional calculus, 24. Chapman and Hal1/CRC Press, 2015.
15. G. D. Smith, G. D. Smith, and G. D. S. Smith. Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford university press, 1985.
16. G. H. Golub and C. F. Van Loan. Matrix computations. Johns Hopkins University press, 2013.
17. H. Dehestani, Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, A novel direct method based on the lucas multiwavelet functions for variable-order fractional reaction-diffusion and subdiffusion equations, Numerical Linear Algebra with Applications, **28** (2021), 2346.
18. M. Heydari, Wavelets galerkin method for the fractional subdiffusion equation, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, **11 (**2016), 061014 (7 pages).
19. Y. Xu, H.G Sun, Y. Zhang, H.W Sun and J. Lin, A novel meshless method based on RBF for solving variable-order time fractional advection-diffusion-reaction equation in linear or nonlinear systems, Computers & Mathematics with Applications, **142** (2023), 107-120.