Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

On σ-Cyclic Amenability for Banach Algebras

E. Ghaderi[1] ✉, **M. Nemati**[2], **S. Naseri**[3]

1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Kurdistan. Pasdaran street. P. O. Box 416. Sanandaj, Iran. ✉ E-mail: eg.ghaderi@uok.ac.ir
2. Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran. E-mail: m.nemati@iut.ac.ir
3. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Kurdistan. Pasdaran street. P. O. Box 416. Sanandaj, Iran. E-mail: abcdef@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 4 December 2022
Accepted: 3 February 2024
Published online: 9 June 2021

Keywords:
Banach algebras, Trace extension property, σ-cyclic derivation, σ-cyclic amenability, unitization, θ-Lau product.

ABSTRACT

Introduction

The notion of amenability for Banach algebras was first introduced and initiated by Johnson [3]. Afterwards, Gronbaek [2] studied the concept of cyclic amenability and it's hereditary properties of Banach algebras. Many Authors study and investigate the several notions of σ-amenability, for more details refer to [1], [5], [6], [8] and [9].

In the throughout of this paper we assume that A is a Banach algebra, I is a closed two-sided ideal in A, σ is a continuous homomorphism on A and X is an A-bimodule Banach. The linear map D: A→X is called derivation if D(ab) = D(a)·b + a·D(b) for all a,bϵA. Moreover, the linear mapping D: A → X is called a σ-derivation if D(ab) = D(a)·σ(b) + σ(a)·D(b) for each a,bϵA. A linear map D : A → X is called σ-inner derivation if there exists x_1ϵX such that D = $ad^{\sigma}_{x_1}$, where $ad^{\sigma}_{x_1}$(a) = σ(a). x_1 – x_1.σ(a), for all aϵA. The Banach algebra A is called σ-amenable if every σ-derivation D : A → X* is σ-inner. This notion was first introduced and studied by Moslehian and Motlagh [9].

Recall that the derivation D:A→A* is cyclic if

$$<D(a), b>+<D(b), a>=0, \quad (a,b\epsilon A).$$

A is cyclic amenable if every cyclic derivation D:A→A* is inner. So, by using these notion we introduced the new notions σ-cyclic derivation and σ-cyclic amenability for Banach algebras. We say that the σ-derivation D : A → A* is σ-cyclic if

$$\langle D(a), \sigma(b)\rangle + \langle D(b), \sigma(a)\rangle = 0, \quad (a,b\epsilon A).$$

Also, the Banach algebra A is σ-cyclic amenable if every σ-cyclic derivation D:A→A* is σ-inner. The closed two-sided ideal I in A has the trace extension property if for each λϵI* with a·λ=λ·a (aϵA), there exists ΛϵA* such that $\Lambda_{|_I}$ = λ and Λ·a=a·Λ, for all aϵA. Every homomorphism σ on A can be extended to a homomorphism $\hat{\sigma}: \frac{A}{I} \to \frac{A}{I}$ suth that for aϵA defined by $\hat{\sigma}$(a+I)=σ(a)+I. Next, we present the results obtained in this paper. We showed that let $\frac{A}{I}$ be $\hat{\sigma}$-cyclic amenable. Then I has the trace extension property. Also, Suppose that σ has

dense range on A, I has the trace extension property and Ais σ-cyclic. Then $\frac{A}{I}$ is $\hat{\sigma}$-cyclic amenable.

Recall that the Banch algebra A is essential, if $\overline{A^2} = A$. We showed that every σ-cyclic amenable Banach algebra is essential. If $\sigma(I) \subseteq I$, we can restrict σ to I and denoted it by $\sigma_I : I \to I$. It is clear that σ_I is continuous homomorphism on I. Thus, if $\sigma(I) \subseteq I$, I is σ_I-cyclic amenable and $\frac{A}{I}$ is $\hat{\sigma}$-cyclic amenable, then A is σ-cyclic amenable.

For the unitization of Banach algebra A i.e. $A^{\#}=A \oplus \mathbb{C}e$, and for every continuous homomorphism σ on A there exists a continuous homomorphism $\sigma^{\#}: A^{\#} \to A^{\#}$ such that defined by $\sigma^{\#}(a, \lambda e)=\sigma(a)+\lambda e$, $(a \epsilon A, \lambda \epsilon \mathbb{C})$. Therefore, with above notes, A is σ-cyclic amenable if and only if $A^{\#}$ be $\sigma^{\#}$-cyclic amenable. Finally, for two Banach algebras A and B and nonzero multiplicative linear functional θ on B, the Cartesian space A×B with norm and multiplication

$$\|(a,b)\|=\|a\|+\|b\|, \qquad (a,b)(a',b')=(aa'+\theta(b)a'+\theta(b')a, bb'),$$

is a Banach algebra and denoted by $A \times_{\theta} B$. If σ and τ are homomorphisms on A and B respectively, then (σ, τ) denoted by $<(\sigma, \tau),(a, b)>=(\sigma(a), \tau(b))$ is a homomorphism on $A \times_{\theta} B$ if and only if $\theta \circ \tau = \theta$. By using this we showed that $A \times_{\theta} B$ is (σ, τ)-cyclic amenable if and only if A is σ-cyclic amenable and B is τ-cyclic amenable.

How to cite: Ghaderi, E., Nemati, M., & Naseri, S. (2024). On σ-cyclic amenability for Banach algebras. *Mathematical Researches*, **10** (1), 131 – 144.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵٤٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بررسی و مطالعه مفهوم σ–میانگین پذیری دوری روی جبرهای باناخ

اقبال قادری[۱] ✉، مهدی نعمتی[۲]، صابر ناصری[۳]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ۱۵۱۷۵-۶۶۱۷۷، ایران. رایانامه: eg.ghaderi@uok.ac.ir
۲. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، 84156-83111، ایران. رایانامه: m.nemati@iut.ac.ir
۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ۱۵۱۷۵-۶۶۱۷۷، ایران. رایانامه: s.naseri@uok.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۹/۱۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۳/۲۰

واژه‌های کلیدی:
جبرهای باناخ،
حاصلضرب θ-لائو،
خاصیت اثر توسیع،
σ-مشتق دوری،
σ-میانگین‌پذیری دوری و
یکدارساز.

چکیده

فرض کنید σ یک همریختی روی جبر باناخ A باشد. در این مقاله برای A مفاهیم جدید σ-مشتق دوری و σ-میانگین پذیری دوری را تعریف می‌کنیم. در ابتدا ارتباط بین خاصیت اثر توسیع ایده‌آل ها و مفهوم جدید را مطالعه می کنیم و نشان می دهیم که اگر $\frac{A}{I}$، σ-میانگین پذیر دوری باشد، آنگاه ایده‌آل I دارای خاصیت اثر توسیع است. در ادامه ثابت می کنیم که عکس این نتیجه در حالت کلی درست نیست و می تواند تحت شرایط خاصی که بیان شده است برقرار باشد. یکی از نتایج مهمی که حاصل شده است این است که هر جبر σ-میانگین پذیر دوری همواره اساسی است. به علاوه، برای هر ایده‌آل بسته و دوطرفه I از A، ارتباط بین σ-میانگین پذیری دوری A و $\hat{\sigma}$-میانگین‌پذیری دوری $\frac{A}{I}$ را بررسی و مطالعه می‌کنیم. همچنین نشان می دهیم σ-میانگین پذیر بودن A و $A^{\#}$ با هم معادل است. نهایتاً این مفهوم را روی جبرهای θ-لائو مطالعه نموده و برای یک سری از همریختی ها ارتباط آن را با مفهوم مشابه روی جبرهای A و B بررسی می کنیم.

استناد: قادری، اقبال؛ نعمتی، مهدی؛ و ناصری، صابر (۱۴۰۳). بررسی و مطالعه مفهوم σ-میانگین پذیری دوری روی جبرهای باناخ. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۱)، ۱۳۱ – ۱۴۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

همان طور که می دانیم مفهوم میانگین پذیری برای جبرهای باناخ برای اولین بار توسط جانسون [3] معرفی شد. در ادامه گرونبک [2] مفهوم میانگین پذیری دوری و خواص موروثی آن را برای جبرهای باناخ مطالعه نمود. سپس ریاضیدانان زیادی روی مفهوم σ-میانگین پذیری جبرهای باناخ کار کردند و نتایج بسیار و متنوعی را به دست آوردند که برای مطالعه در این زمینه می توانید به منابع [1]، [5]، [6]، [8] و [9] مراجعه نمایید.

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باناخ دوطرفه باشد. در این صورت نگاشت خطی $D:A\to X$ را یک مشتق نامند هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in A$ داشته باشیم

$$D(ab)=D(a)\cdot b + a\cdot D(b).$$

به علاوه، D را داخلی نامند هرگاه عنصری مانند $x_0 \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ به دست آید

$$D(a) = a\cdot x_0 - x_0\cdot a,$$

در اینحالت مشتق داخلی D را با نماد $D(a) = ad_{x_0}(a)$ نشان می دهند. اگر σ همریختی پیوسته روی A باشد، آنگاه نگاشت خطی $D:A\to X$ را یک σ-مشتق نامند هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in A$ نتیجه شود

$$D(ab)=D(a)\cdot \sigma(b) + \sigma(a)\cdot D(b).$$

مشتق D را σ-داخلی نامند هرگاه عنصری مانند $x_1 \in X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in A$ به دست آید

$$D(a) = \sigma(a)\cdot x_1 - x_1\cdot \sigma(a).$$

همچنین در اینحالت مشتق داخلی D را نیز با نماد $D(a) = ad^{\sigma}_{x_1}(a)$ نشان داده می شود. جبر باناخ A را σ-میانگین پذیر نامند هرگاه هر σ-مشتق $D:A\to X^*$، یک مشتق σ-داخلی باشد. این مفهوم برای اولین بار توسط مصلحیان و نیازی مطلق [8] معرفی و مطالعه شد.

۱. مفهوم σ-میانگین پذیری دوری

در این بخش، به ارائه برخی از اطلاعات و تعاریف اساسی مورد نیاز برای مفهوم σ-میانگین پذیری دوری روی جبرهای باناخ می پردازیم.

یادآوری می کنیم که برای جبر باناخ A، مشتق $D:A\to \mathbf{A}^*$ را دوری نامند هرگاه برای هر دو عنصر دلخواه $a, b \in A$ نتیجه شود $< D(a), b > + < D(b), a > = 0$ و همچنین A میانگین پذیر دوری است چنانچه D داخلی باشد. با الهام گرفتن از این تعریف و به کمک همریختی های پیوسته روی جبر باناخ A می توان مفاهیم مشابه σ-مشتق دوری و σ-میانگین پذیر دوری را برای همریختی پیوسته σ روی جبر باناخ دلخواه A تعریف نمود.

تعریف: فرض کنید A یک جبر باناخ و σ همریختی پیوسته روی A باشد. در این صورت σ-مشتق $D:A\to A^*$ را σ-دوری نامیم هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in A$ داشته باشیم

$$< D(a), \sigma(b) > + < D(b), \sigma(a) > = 0.$$

بنابراین گوییم جبر باناخ A، σ-میانگین پذیر دوری است هرگاه هر σ-مشتق دوری $D:A\to \mathbf{A}^*$، σ-داخلی باشد. واضح است که اگر σ نگاشت همانی باشد، آنگاه σ-میانگین پذیری دوری همان میانگین پذیر دوری خواهد بود.

در ادامه برای اینکه بتوانیم خواص موروثی این مفاهیم را روی ایده‌آل های جبرهای باناخ مطالعه کنیم مطالب زیر را می آوریم. فرض کنید I یک ایده‌آل بسته دوطرفه از جبر باناخ A باشد. در این صورت I دارای خاصیت اثر توسیع است هرگاه برای هر $\lambda \in I^*$ با خاصیت $a \cdot \lambda = \lambda \cdot a$ (برای هر $a \in A$)، عنصری مانند $\Lambda \in A^*$ موجود باشد به طوری که $\Lambda_{|I} = \lambda$ و همچنین برای هر عنصر $a \in A$ داشته باشیم $a \cdot \Lambda = \Lambda \cdot a$. در ادامه یادآوری می کنیم که هر همریختی پیوسته مانند σ روی جبر باناخ A، یک همریختی پیوسته مانند $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ را روی جبر خارج قسمتی $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}$ القا می کند؛ در واقع $\hat{\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}} \longrightarrow \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}$ برای هر $a+I \in \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}$ با ضابطه زیر تعریف می شود

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(a+I) = \sigma(a) + I.$$

۲. نتایج

در ادامه به بیان برخی نتایج در زمینه σ-میانگین پذیری دوری روی جبرهای و همچنین خواص موروثی آنها می پردازیم.

گزاره ۲.۱: فرض کنید I یک ایده‌آل بسته‌ی دوطرفه از جبر باناخ A، σ یک همریختی پیوسته روی A و جبر خارج قسمتی $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}$ نیز $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$-میانگین پذیری دوری باشند. در این صورت I دارای خاصیت اثر توسیع خواهد بود.

اثبات: فرض کنید $\lambda \epsilon I^*$ به قسمی باشد به طوری که برای $a \epsilon A$ داریم $a \cdot \lambda = \lambda \cdot a$. در این صورت عنصری مانند $\mu \epsilon A^*$ وجود دارد به طوری که $\mu_{|I} = \lambda$. واضح است که $I^{\perp} = (\frac{A}{I})^*$. حال نگاشت $D: \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}} \longrightarrow (\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}})^*$ را برای هر دو عنصر دلخواه $a, c \in A$ با ضابطه

$$< D(a+I), c+I > = < \sigma(a) \cdot \mu - \mu \cdot \sigma(a) , c>$$

تعریف می کنیم. توجه داریم که برای هر $a, b, c \in A$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} < D((a+I)(b+I)), c+I > &= < \sigma(ab) \cdot \mu - \mu \cdot \sigma(ab), c > \\ &= < \sigma(a)\sigma(b) \cdot \mu - \sigma(a) \cdot \mu \cdot \sigma(b) \\ &\quad + \sigma(a) \cdot \mu \cdot \sigma(b) - \mu \cdot \sigma(a)\sigma(b), c > \\ &= < \sigma(b) \cdot \mu - \mu \cdot \sigma(b), c\sigma(a) > \end{aligned}$$

$$+ < \sigma(a) \cdot \mu - \mu \cdot \sigma(a), \sigma(b)c>$$
$$=< (\sigma(a)+I) \cdot D(b+I), c+I >$$
$$+ < D(a+I) \cdot (\sigma(b)+I), c+I >.$$

بنابراین D یک $\hat{\sigma}$-مشتق است. به سادگی می توان بررسی نمود که D یک $\hat{\sigma}$-مشتق دوری نیز است. بنابراین عنصری مانند $\lambda_1 \epsilon (\frac{A}{I})^* = I^{\perp}$ وجود دارد به طوری که برای هر $a, c \epsilon A$ خواهیم داشت

$$< D(a+I), c+I> = < \sigma(a) \cdot \lambda_1 - \lambda_1 \cdot \sigma(a), c>.$$

قرار می دهیم $\Lambda:=\mu-\lambda_1$. واضح است که $\Lambda \epsilon A^*$، $\Lambda_{|I} = \lambda$ و برای هر $a \epsilon A$ خواهیم داشت

$$\sigma(a) \cdot \mu - \mu \cdot \sigma(a)= \sigma(a) \cdot \lambda_1 - \lambda_1 \cdot \sigma(a).$$

از اینرو برای هر $a \epsilon A$ رابطه $a \cdot \Lambda = \Lambda \cdot a$ به دست می آید؛ یعنی I دارای اثر توسیع است.

در نتیجه بعدی نشان می دهیم که عکس گزاره قبل در حالت کلی برقرار نیست اما تحت شرایط خاصی درست می باشد. همچنین نشان می دهیم چنانچه برد σ چگال و I دارای خاصیت اثر توسیع باشد، مفهوم σ-میانگین پذیری از جبر باناخ A به جبر باناخ خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ به ارث می رسد؟

گزاره ۲/۲: فرض کنید σ یک همریختی پیوسته روی جبر باناخ A با برد چگال، I یک ایده‌آل بسته و دوطرفه از A دارای خاصیت اثر توسیع و A، σ-میانگین پذیر دوری باشد. در این صورت $\frac{A}{I}$، $\hat{\sigma}$-میانگین پذیر دوری خواهد بود.

اثبات: نگاشت طبیعی و خارج قسمتی $\pi:A\longrightarrow\frac{A}{I}$ را در نظر می گیریم که به وضوح π پوشاست. اگر $D: \frac{A}{I} \longrightarrow (\frac{A}{I})^*$ یک $\hat{\sigma}$-مشتق دوری باشد؛ یعنی برای هر $a, b \epsilon A$ داریم

$$<D(a+I), \sigma(b)+I > + <D(b+I), \sigma(a)+I > =0,$$

آنگاه نگاشت $\widetilde{D} := \pi^* \circ D \circ \pi: A \longrightarrow A^*$ را در نظر می گیریم. بنابراین برای هر $a,b \epsilon A$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} <\widetilde{D}(a),\sigma(b)>+<\widetilde{D}(b),\sigma(a)> &=<\pi^*\big(D(a+I)\big),\sigma(b)>+<\pi^*\big(D(b+I)\big),\sigma(a)> \\ &=< D(a+I),\sigma(b)+I>+< D(b+I),\sigma(a)+I> \\ &=0. \end{aligned}$$

در نتیجه $\widetilde{D}$ یک σ-مشتق دوری می باشد. از اینرو عنصری مانند $\lambda \epsilon A^*$ وجود دارد به طوری که برای هر عنصر دلخواه $a \epsilon A$ داریم $\widetilde{D}(a) = \sigma(a) \cdot \lambda - \lambda \cdot \sigma(a)$. اکنون چنانچه عناصر $i \epsilon I$ و $a \epsilon A$ دلخواه باشند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} <\widetilde{D}(a), i> &= <\pi^*\big(D(a+I)\big), i> \\ &=< D(a+I), i+I> \end{aligned}$$

$$=< D(a+I), I>$$
$$=0.$$

با توجه به چگال بودن σ، واضح است که برای هر $a\epsilon A$ نتیجه می شود $a\cdot\lambda_{|I} = \lambda_{|I}\cdot a$. حال چون I دارای خاصیت اثر توسیع است، بنابراین عنصری مانند $\Lambda\epsilon A^*$ وجود دارد به طوری که $\Lambda_{|I} = \lambda_{|I}$ و همچنین برای هر $a\epsilon A$ داریم $a\cdot\Lambda=\Lambda\cdot a$. از اینرو نتیجه می شود $\lambda\text{-}\Lambda\epsilon I^{\perp}$ و برای هر $a, b\epsilon A$ داریم

$$\begin{aligned}<D(a+I), b+I> &= <D\circ \pi(a), \pi(b)> \\ &= <\widetilde{D}(a), b> \\ &= <\sigma(a)\cdot\lambda - \lambda\cdot\sigma(a), b> \\ &= <\sigma(a)\cdot\lambda - \sigma(a)\cdot\Lambda - \lambda\cdot\sigma(a) - \Lambda\cdot\sigma(a), b> \\ &= <\sigma(a)\cdot(\lambda-\Lambda)-(\lambda-\Lambda)\cdot\sigma(a), b>.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $a\epsilon A$ می توان نوشت

$$D(a+I) = (\sigma(a)+I)\cdot(\lambda-\Lambda) - (\lambda-\Lambda)\cdot(\sigma(a)+I);$$

یعنی $\frac{A}{I}$، $\widehat{\sigma}$-میانگین پذیر دوری است.

می دانیم که جبر باناخ A اساسی است هر گاه $\overline{A^2} = A$ باشد. در نتیجه بعدی نشان می دهیم که اساسی بودن A از خاصیت σ-میانگین پذیر دوری بودن آن نتیجه می شود.

گزاره ۲/۳: فرض کنید σ یک همریختی روی جبر باناخ یکدار A باشد. در این صورت اگر A، σ-میانگین پذیر دوری باشد، آنگاه A اساسی خواهد بود.

اثبات: اثبات را به کمک برهان خلف دنبال می کنیم. بنابراین عنصری مانند $a_0\epsilon A - \overline{A^2}$ موجود است. از اینرو قضیه هان-باناخ ایجاب می کند که عنصر $f_0\epsilon A^*$ چنان وجود دارد که $f_0(a_0) = 1$ و $f_{0_{|_{A^2}}} = 0$. حال نگاشت $D:A\rightarrow A^*$ را برای هر $a\epsilon A$ با ضابطه $D(a)=a\cdot f_0$ در نظر می گیریم. برای هر $a, a'\epsilon A$ نتیجه می شود

$$<D(a), \sigma(a')>+<D(a'), \sigma(a)>=<f_0, \sigma(a')a>+<f_0, \sigma(a)a'>=0.$$

پس D یک σ-مشتق دوری خواهد بود. بنابراین عنصری مانند $g\epsilon A^*$ وجود دارد به طوری که برای هر $a\epsilon A$ داریم $D(a)=ad_g^{\sigma}(a)$. چنانچه e عنصر همانی A باشد خواهیم داشت

$$<D(a_0), e>=<\sigma(a_0)\cdot g - g\cdot\sigma(a_0), e>=0.$$

از طرف دیگر داریم

$$<D(a_0), e>=<a_0\cdot f_0, e>=1.$$

از اینرو فرض خلف در نظر گرفته شده نادرست بوده و جبر باناخ A اساسی خواهد بود.

همریختی پیوسته $\sigma:A\to A$ را می توان روی هر ایده‌آل I از A تحدید نمود بدین صورت که اگر $\sigma(I)\subseteq I$ باشد، آنگاه می‌توان همریختی پیوسته ای مانند $\sigma_I=\sigma_{|_I}:I\to I$ را تعریف نمود. در گزاره بعدی به کمک این مطلب به بررسی و مطالعه ارتباط مفهوم σ-میانگین پذیر دوری جبر باناخ A و ایده‌آل های آن و فضای خارج قسمتی تولید شده توسط آن می پردازیم. در حقیقت نشان می دهیم که تحت شرایط خاصی خاصیت σ-میانگین پذیر دوری از یک ایده‌آل و جبر خارج قسمتی آن به خود جبر اصلی به ارث می رسد.

گزاره ۲/۴: فرض کنید I ایدآلی بسته در جبر باناخ A، σ یک همریختی پیوسته روی A و $\sigma(I)\subseteq I$ باشد. در این صورت چنانچه I، σ_I-میانگین پذیر دوری و $\frac{A}{I}$، $\hat{\sigma}$-میانگین پذیر دوری باشند، آنگاه A نیز σ-میانگین پذیر دوری خواهد بود.

اثبات: ابتدا نگاشت شمول $\iota:I\to A$ و همچنین نگاشت الحاقی آن یعنی $\iota^*:A^*\to I^*$ را در نظر می گیریم. همچنین با توجه به گزاره ۳، چون I، σ_I- میانگین پذیر دوری است بنابراین اساسی خواهد بود؛ یعنی $\overline{I^2}=I$. حال فرض کنید $D:A\to A^*$ یک σ-مشتق دوری باشد؛ یعنی برای هر $a, a'\epsilon A$ داریم

$$<D(a), \sigma(a')> + <D(a'), \sigma(a)>=0.$$

نگاشت $D_I=\iota^*\circ D\circ\iota:I\to I^*$ را در نظر می گیریم. به سادگی دیده می شود که D_I یک σ_I-مشتق است. از اینرو عنصری مانند $i_0^*\epsilon I^*$ وجود دارد به طوری که برای هر $i\epsilon I$ نتیجه می شود

$$D_I(i)=(\iota^*\circ D\circ\iota)(i)=ad_{i_0^*}^{\sigma_I}(i).$$

می توان عنصر $i_0^*\epsilon I^*$ را به عنصری مانند $a_0^*\epsilon A^*$ توسیع داد. لذا با جایگذاری $D\text{-}ad_{a_0^*}^{\sigma}$ به جای D خواهیم داشت $(\iota^*\circ D)_{|I}=0$. بنابراین برای هر دو عنصر دلخواه $i,i'\epsilon I$ و هر عنصر $a\epsilon A$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned}<D(ii'), a> &= <D(i)\cdot\sigma(i')+\sigma(i)\cdot D(i'), a>\\ &=<(\iota^*\circ D)(i),\ \sigma(i')a>+<(\iota^*\circ D)(i'),\ a\sigma(i)>\\ &=0.\end{aligned}$$

لذا رابطه $D_{|I^2}=0$ به دست می آید. از اینرو $D_{|I}=0$. در نتیجه به سادگی برای هر $a, a'\epsilon A$ و هر $i\epsilon I$ داریم

$$\sigma(i)\cdot D(a)=D(a)\cdot\sigma(i)=0,$$

و از اینرو خواهیم داشت

$$<D(a), \sigma(i)a'>=<D(a), a'\sigma(i)>=0.$$

بنابراین با قراردادن $R=\overline{\sigma(I)A\cup A\sigma(I)}$ دیده می‌شود که $D(a)_{|R}=0$. به علاوه نتیجه می‌شود که $D(a)\subseteq R^{\perp}$.

لذا خواهیم داشت $D(a)\subseteq (\frac{A}{I})^*$. حال نگاشت $\hat{D}:\frac{A}{I}\to(\frac{A}{I})^*$ را برای هر $a\in A$ با ضابطه

$$<\widetilde{D}(a+I), b+I> = <D(a), b>,$$

در نظر می گیریم. می دانیم که برای هر $a\in A$ و $a^*\in A^*$، A^* با اعمال مدولی زیر $(\frac{A}{I})$−دومدول باناخ می باشد.

$$(a+I)\cdot a^* = a\cdot a^*, \qquad a^*\cdot(a+I)=a^*\cdot a.$$

لذا به سادگی می توان دید که $\hat{D}$ یک $\hat{\sigma}$−مشتق دوری می باشد. در نتیجه عنصری مانند $f_0\in(\frac{A}{I})^*$ وجود دارد به طوری که برای هر $a\in A$ داریم

$$D(a)=\hat{D}(a+I)=ad_{f_0}^{\hat{\sigma}}(a+I).$$

بنابراین برای هر $a\in A$ رابطه $(D\text{-}ad_{f_0^*}^{\sigma})(a)=ad_{f_0}^{\hat{\sigma}}(a+I)$ به دست می‌آید. نهایتاً خواهیم داشت $D=ad_{(f_0^*+f_0)}^{\sigma}$ و این همان σ−میانگین پذیر دوری بودن A را نتیجه خواهد داد.

در نظریه جبرها، چنانچه جبر A یکدار نباشد و بخواهیم آن را یکدار نماییم جمع مستقیم A را با مجموعه اعداد مختلط در نظر گرفته و یکدارساز، $A^{\#}=A\oplus\mathbb{C}e$، آن را به کار می بریم. عناصر $A^{\#}$ را برای $a\epsilon A$ و هر $\lambda\epsilon\mathbb{C}$ معمولاً به صورت $a+\lambda e$ یا $(a,\lambda e)$ و یا (a,λ) نشان می دهند. برای معرفی دوگان یکدارساز و عناصر آن، عنصر $e^*\epsilon(A^{\#})^*$ را چنان در نظر می‌گیریم که $<e^*,e>=1$ و برای هر $a\epsilon A$ داشته باشیم $<e^*,a>=0$. بنابراین خواهیم داشت

$$(A^{\#})^*=A^*\oplus\mathbb{C}e^*.$$

همچنین برای هر $(a,\lambda e)\epsilon A^{\#}$ و $(f,\mu e^*)\epsilon(A^{\#})^*$ داریم

$$<(f,\mu e^*),(a,\lambda e)>=f(a)+\lambda\mu.$$

اعمال مدولی $A^{\#}$ روی $(A^{\#})^*$ را برای هر $a\epsilon A$، $\lambda,\mu\epsilon\mathbb{C}$ و $f\epsilon A^*$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$(a+\lambda e)\cdot(f+\mu e^*)=(\lambda f+a\cdot f)+\big(\lambda\mu+f(a)\big)e^*,$$

$$(f+\mu e^*)\cdot(a+\lambda e)=(\lambda f+f\cdot a)+\big(\lambda\mu+f(a)\big)e^*.$$

دقت کنید که هر همریختی پیوسته مانند $\sigma:A\to A$ می تواند یک همریختی پیوسته مانند $\sigma^{\#}:A^{\#}\to A^{\#}$ را القا کند به طوری که برای هر $(a,\lambda e)\epsilon A^{\#}$ با ضابطه $\sigma^{\#}(a,\lambda)=(\sigma(a),\lambda e)$ تعریف می شود.

گزاره ۲.۵: فرض کنید σ یک همریختی پیوسته روی جبر باناخ A باشد. در این صورت $A^\#$، $\sigma^\#$-میانگین پذیر دوری است اگر و فقط اگر A نیز σ-میانگین پذیر دوری باشد.

اثبات: چنانچه $D{:}A\to A^*$ یک σ-مشتق دوری باشد، لذا به کمک آن نگاشت $D^\#: A^\# \to (A^\#)^*$ را برای هر عنصر دلخواه $(a, \lambda e)\epsilon A^\#$ با ضابطه $D^\#\left(\left(a,\ \lambda e\right)\right) = \left(D(a)\ ,\ 0\right)$ در نظر می گیریم. σ-مشتق دوری بودن D واضح است. از اینرو عنصری مانند $(a_0^*\ ,\ \lambda_0 e^*)\epsilon(A^\#)^*$ وجود دارد به طوری که برای هر $(a, \lambda e), (a', \lambda' e)\epsilon A^\#$ داریم

$$< D^\#\left(a,\ \lambda e\right), \left(a',\ \lambda' e\right) > =< ad^{\sigma^\#}_{(a_0^*,\lambda_0 e^*)}(a,\lambda e), (a',\lambda' e) >$$
$$=< \left(\sigma(a)\ ,\ \lambda e\right)\left(a_0^*\ ,\ \lambda_0 e^*\right),\ \left(a'\ ,\ \lambda' e\right) > -< \left(a_0^*\ ,\ \lambda_0 e^*\right)\left(\sigma(a)\ ,\ \lambda e\right), \left(a'\ ,\ \lambda' e\right) >$$
$$=<a_0^*\ ,\ a'\sigma(a) - \sigma(a)a' >$$

در نتیجه برای هر $a\epsilon A$ خواهیم داشت

$$D(a)=ad^{\sigma}_{a_0^*}(a)=\sigma(a)\cdot a_0^* - a_0^* \cdot \sigma(a).$$

برعکس، فرض کنید A، σ-میانگین پذیر دوری و $\widetilde{D}: A^\# \to (A^\#)^*$ یک $\sigma^\#$-مشتق دوری باشد. به سادگی می توان دید که $\widetilde{D}(e) = 0$ است. بنابراین داریم

$$\widetilde{D}(a,\lambda e) = \widetilde{D}(a,0) + \widetilde{\lambda D}(0,e) = \widetilde{D}(a),$$

لذا نگاشت هایی مانند $D{:}A\to A^*$ و $\varphi{:}A\to\mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که برای هر $a\epsilon A$ نتیجه می شود

$$\widetilde{D}(a) = D(a) + \varphi(a)e^*.$$

حال برای هر دو عنصر دلخواه $a, a'\epsilon A$ داریم

$$\widetilde{D}(aa') = \widetilde{D}(a)\cdot\sigma(a') + \sigma(a)\cdot\widetilde{D}(a')$$
$$=(D(a)+\varphi(a)e^*)\cdot\sigma(a') + \sigma(a)\cdot(D(a') + \varphi(a'))$$
$$=D(a)\cdot\sigma(a')+<D(a), \sigma(a')>e^* + \sigma(a)\cdot D(a')+< D(a'), \sigma(a) > e^*.$$

بنابراین می توان نوشت

$$D(aa')= D(a)\cdot\sigma(a')+\sigma(a)\cdot D(a'),\quad \varphi(aa')= <D(a), \sigma(a')>+< D(a'), \sigma(a) >.$$

از طرف دیگر با توجه به σ-دوری بودن مشتق D^*، برای هر $(a, \lambda e), (a', \lambda' e)\epsilon A^\#$ داریم

$$0=<\widetilde{D}(a,\lambda e), (\sigma(a') + \lambda' e) > +< \widetilde{D}(a',\lambda' e), (a,\lambda e)>$$
$$=<D(a), \sigma(a')>+\lambda\lambda'+<D(a'), \sigma(a)>+\lambda'\lambda$$

لذا با قرار دادن $\lambda=0$ یا $\lambda'=0$، σ-دوری بودن مشتق D نتیجه خواهد شد. از اینرو عنصری مانند $a_0^*\epsilon A^*$ وجود دارد به طوری که برای هر $a\epsilon A$ خواهیم داشت $D(a)=ad_{a_0^*}^{\sigma}(a)$. برای هر دو عنصر دلخواه $a, a'\epsilon A$ به دست می آید

$$\begin{aligned}\Phi(aa')&= <D(a), \sigma(a')>+< D(a'),\sigma(a) >\\ &=<\sigma(a)\cdot a_0^*,\sigma(a') > -< a_0^*\cdot\sigma(a),\sigma(a') >\\ &\quad+< \sigma(a')\cdot a_0^*,\sigma(a) > -< a_0^*\cdot\sigma(a'),\sigma(a) >\\ &=0,\end{aligned}$$

از σ-میانگین پذیر دوری بودن A، نتیجه می شود که $\overline{A^2}=A$. در نتیجه داریم $\varphi_{|A}=0$. بنابراین برای $(a,\lambda e)\epsilon A^{\#}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(a,\lambda e) &=D(a) = \sigma(a)\cdot a_0^* - a_0^*\cdot\sigma(a)\\ &=(\lambda a_0^* + \sigma(a)\cdot a_0^*)+< a_0^*,\sigma(a) > e^* - (\lambda a_0^* + a_0^*\cdot\sigma(a))-< a_0^*,\sigma(a) > e^*\\ &=\sigma^{\#}(a,\lambda e)\cdot(a_0^*+0e^*) - (a_0^*,0e^*)\cdot\sigma^{\#}(a,\lambda e).\end{aligned}$$

از اینرو $\widetilde{D}$، داخلی می باشد و در نتیجه $A^{\#}$، $\sigma^{\#}$-میانگین پذیر دوری خواهد بود.

نهایتاً مطالعه و بررسی مفهوم σ-میانگین پذیری دوری را روی جبرهای θ-لائو دنبال می کنیم و در ادامه ارتباط این مفهوم را روی جبرهای دلخواه A و B با مفهوم مشابه روی جبر θ-لائوی ساخته شده توسط آنها مطالعه می کنیم.

برای دو جبر باناخ دلخواه A و B و تابعک خطی ضربی ناصفر θ روی B، حاصلضرب دکارتی $A\times B$ را برای هر $a,a'\epsilon A$، $b,b'\epsilon B$ و $\lambda\epsilon\mathbb{C}$ با اعمال جمع، ضرب اسکالر و نرم زیر را در نظر می گیریم

$$(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b'),\quad \lambda(a, b)=(\lambda a, \lambda b),$$
$$\|(a, b)\|=\|a\|+\|b\|.$$

حال به جای ضرب دکارتی معمولی، ضرب زیر را برای هر $a,a'\epsilon A$ و $b,b'\epsilon B$ در نظر می گیریم

$$(a, b)\cdot(a', b')=(aa'+\theta(b)a'+\theta(b')a, bb').$$

چنانچه این ضرب را روی حاصلضرب دکارتی $A\times B$ قرار دهیم آن را با نماد $A\times_\theta B$ نشان داده و حاصلضرب θ-لائوی جبرهای باناخ A و B نامیده می شود. همراه با اعمال تعریف شده در بالا، $A\times_\theta B$ به یک جبر باناخ نرم دار تبدیل خواهد شد. لازم به ذکر است که این ضرب به طور غیر مستقیم برای اولین بار در سال ۱۹۸۳ توسط لائو [4] برای F-جبرها معرفی شد. در ادامه در سال ۲۰۰۷، منفرد [7] ضرب تعریف شده توسط لائو را به جبرهای باناخ کلی تعمیم داد و ضرب θ-لائو را معرفی نمود.

در ضرب تعریف شده توسط منفرد، چنانچه $\theta=0$ باشد، حاصلضرب θ-لائو همان ضرب دکارتی خواهد بود و لذا در این مقاله همواره θ را تابعک خطی ضربی ناصفر روی B در نظر می گیریم. به علاوه، اگر قرار دهیم $B=\mathbb{C}$ و θ تابک همانی روی اعداد مختلط باشد، آنگاه در این حالت هم حاصلضرب θ-لائو به همان یکدارساز جبر باناخ A تبدیل خواهد شد. بنابراین حاصلضرب θ-لائو تعمیمی از یکدارساز جبرهای باناخ می باشد. یادآوری می کنیم که A یک ایده‌آل بسته دوطرفه و B یک زیر جبر بسته در $A\times_\theta B$ می باشند به طوری فضای خارج قسمتی $\frac{A\times_\theta B}{A}$ با B یکریخت طولپا خواهد بود که عناصر $a\epsilon A$ و $b\epsilon B$ را به ترتیب به صورت $(a, 0)\epsilon A\times_\theta B$ و $(0, b)\epsilon A\times_\theta B$ در نظر می گیریم. واضح است که $A\times_\theta B$ جابجایی است اگر و تنها اگر هر دو جبر A و B جابجایی باشند. فضای دوگان $(A \times_\theta B)^*$ با ضرب دکارتی $A^* \times B^*$ یکریخت خواهد بود و برای هر $(f, g)\epsilon(A \times_\theta B)^*$ و هر $(a, b)\epsilon A\times_\theta B$ خواهیم داشت

$$<(f, g), (a, b)>=f(a)+g(b), \quad \|(f, g)\|=\max\{\|f\|, \|g\|\}.$$

چنانچه $\sigma:A\to A$ و $\tau:B\to B$ دو نگاشت باشند، آنگاه می توان به کمک آنها نگاشت $(\sigma,\tau): A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ را برای $a\epsilon A$ و هر $b\epsilon B$ با ضابطه زیر تعریف نمود

$$<(\sigma, \tau), (a, b)>=(\sigma(a), \tau(b)).$$

در ادامه با فرض همریختی بودن σ و τ و با استفاده از این نگاشت، تحت شرط خاصی یک همریختی را روی $A\times_\theta B$ می‌آوریم. چنانچه σ و τ همریختی های پیوسته به ترتیب روی A و B باشند. در این صورت به سادگی و با نوشتن تعریف دیده می شود که (σ, τ) نیز یک همریختی پیوسته روی $A\times_\theta B$ است اگر و فقط اگر برای هر $b\epsilon B$ داشته باشیم $(\theta\circ\tau)(b)=\theta(b)$. به کمک این قسمت نتیجه بعدی را بیان می کنیم.

گزاره ۲.۶: فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ تابعکی خطی ضربی روی B باشند. به علاوه فرض کنید σ و τ همریختی های پیوسته به ترتیب روی A و B باشند به قسمی که $\theta\circ\tau = \theta$. در این صورت $A\times_\theta B$، (σ, τ)-میانگین پذیر دوری است اگر و فقط اگر A، σ-میانگین پذیر دوری و B، τ-میانگین پذیر دوری باشند.

اثبات: فرض کنید که $A\times_\theta B$، (σ, τ)-میانگین پذیر دوری، $D_1: A \to A^*$، σ-مشتق دوری و $D_2: B \to B^*$، τ-مشتق دوری باشند. در این صورت نگاشت $D: A\times_\theta B \to A^* \times B^*$ را برای هر $a\epsilon A$ و هر $b\epsilon B$ با ضابطه $D(a,b)=(D_1(a), D_2(b))$ در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض و خواص مشتق های D_1 و D_2 برای هر $a,a'\epsilon A$ و هر $b,b'\epsilon B$ داریم

$$\begin{aligned}<D(a,b), (\sigma(a'),\tau(b'))>+<D(a',b'), (\sigma(a),\tau(b))>&=< D_1(a), \sigma(a')>+ < D_2(b), \tau(b')>\\ &\quad +< D_1(a'), \sigma(a)>+ < D_1(b'), \sigma(b)>\\ &=0.\end{aligned}$$

به علاوه، D یک (σ, τ)-مشتق می باشد؛ زیرا برای عناصر دلخواه $a,a',x\epsilon A$ و $b,b',y\epsilon B$ خواهیم داشت

$$<D(a,b)\cdot(\sigma(a'),\tau(b')), (x,y)>+ <(\sigma(a),\tau(b))\cdot D(a',b'), (x,y)>$$
$$=<(D_1(a), D_2(b)), (\sigma(a'),\tau(b'))\cdot(x,y)>+ <(D_1(a'), D_2(b')), (x,y)\cdot(\sigma(a),\tau(b))>$$
$$=<D_1(a), \sigma(a')x+\theta(b')x+\theta(y)\sigma(a')>+<(D_1(a'), x\sigma(a)+\theta(b)x+\theta(y)\sigma(a)>$$
$$+<D_2(b), \tau(b')y>+<D_2(b'), y\tau(b)>$$
$$=<D_1(a)\cdot\sigma(a')+\sigma(a)\cdot D_1(a')+\theta(b')D_1(a)+\theta(b)D_1(a'), x>$$
$$+(<D_1(a), \sigma(a')>+< D_1(a'), \sigma(a)>)\theta(y)$$
$$+<D_2(b)\cdot\tau(b')+\tau(b)\cdot D_2(b'), y>$$
$$=<(D_1(a)\cdot\sigma(a')+\sigma(a)\cdot D_1(a')+\theta(b')D_1(a)+\theta(b)D_1(a'), D_2(b)\cdot\tau(b')+\tau(b)\cdot D_2(b')), (x,y)>. \quad (1)$$

از طرف دیگر نیز داریم

$$D((a,b)(a',b'))=D(aa'+\theta(b)a'+\theta(b')a, bb')$$
$$=(D_1(aa'+\theta(b)a'+\theta(b')a), D_2(bb'))$$
$$=(D_1(a)\cdot\sigma(a')+\sigma(a)\cdot D_1(a')+\theta(b)D_1(a')+\theta(b')D_1(a), D_2(b)\tau(b')+\tau(b)\cdot D_2(b')). \qquad (2)$$

لذا با مقایسه روابط (1) و (2) نتیجه می گیریم که D یک (σ, τ)-مشتق می باشد. پس عنصری مانند $(f,g)\epsilon A^* \times B^*$ وجود دارد به طوری که برای هر دو عنصر دلخواه $a\epsilon A$ و $b\epsilon B$ داریم

$$D(a,b)=ad_{(f,g)}^{(\sigma,\tau)}(a,b)=(\sigma(a),\tau(b))\cdot(f,g)-(f,g)\cdot(\sigma(a),\tau(b)).$$

بنابراین برای عناصر دلخواه $a,x\epsilon A$ و $b,y\epsilon B$ نتیجه می شود

$$<D(a,b), (x,y)>=<(f,g), (x,y)\cdot(\sigma(a),\tau(b))> - <(f,g), (\sigma(a),\tau(b))\cdot(x,y)>$$
$$=<f, x\sigma(a)+\theta(y)\sigma(a)+\theta(\tau(b))x>+<g, y\tau(b)>$$
$$- <f, \sigma(a)x+\theta(y)\sigma(a)+\theta(\tau(b))x> - <g, \tau(b)y>$$
$$=< (\sigma(a)\cdot f - f\cdot\sigma(a), \tau(b)\cdot g - g\cdot\tau(b)), (x,y)>$$

از اینرو با توجه به ضابطه D می توان نتیجه گرفت که برای هر $a\epsilon A$ و هر $b\epsilon B$ داریم

$$D_1(a) = \sigma(a)\cdot f - f\cdot\sigma(a), \qquad D_2(b) = \tau(b)\cdot g - g\cdot\tau(b)$$

برعکس، فرض کنید A، σ-میانگین پذیر دوری و B، τ-میانگین پذیر دوری باشند. در این صورت با توجه به گزاره ۴، چون A یک ایده‌آل بسته دوطرفه از $A\times_\theta B$ و همچنین $B\cong\frac{A\times_\theta B}{A}$ است، بنابراین (σ, τ)-میانگین پذیری دوری $A\times_\theta B$ به سادگی نتیجه می شود.

References

1. A. Bodaghi, M. Eshaghi Gordji and A. R. Medghalchi, A generalization of the weak amenability of Banach algebras, Banach J. Math. Anal., **3**(1) (2009), 131-142.
2. N. Gronbaek, Weak and cyclic amenability for non-commutative Banach algebras, Proc. Edinburgh. Math. Soc., **35** (1992), 315-328.
3. B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc., **127** (1972).
4. A. T.-M. Lau. Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups, Fund. Math. **118** (1983), 161-175.
5. M. Mirzavaziri and M. S. Moslehian. Automatic continuity of σ-derivations on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., **134**(11) (2006), 3319-3327.
6. M. Mirzavaziri and M. S. Moslehian, σ-amenability of Banach algebras, Southeast Asian Bull., **33** (2009), 89-99.
7. M. S. Monfared, On certain products of Banach algebras with applications to Harmonic analysis, Studia Math., **178** (2007), 277-294.
8. M. S. Moslehian and A. Niazi Motlagh, Some notes on (σ, τ)-amenability of Banach algebras, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math., **53**(3) (2008), 57-68.
9. B. Shojaee and A. Bodaghi, Aproximate cyclic amenability of Banach algebras, Mathematical Sciences, **5**(1) (2011), 25-32.