Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

# Classification Bi-Algebras of Order Less Than 5 with Their Ideals

**A. Radfar**[1]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Payame Noor University, p. o. box. 19395-3697, Tehran, Iran.
E-mail: radfar@pnu.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**
Research Article

**Article history:**
Received: 12 April 2023
Received in revised form:
18 Augustl 2024
Accepted: 26 Augustl 2024
Published online:
10 November 2024

**Keywords**:
BI-algebra,
Classification,
Commutative algebra,
BCK-algebra,
Transitive algebra,
P-semi simple.

**ABSTRACT**

**Introduction**
Algebraic structures have become crucial in expanding scientific knowledge across disciplines such as physics, medical engineering, social sciences, and computer science. In 1958, Chang introduced the concept of BI-algebras. Extensions of BI-algebras, such as pseudo BI-algebras, hyper BI-algebras, have further applications in interpreting complex structures across these fields. This paper contributes to the classification of finite BI-algebras of order 2, 3, and 4 detailing their unique properties to enhance understanding and facilitate applications.

**Material and Methods**
The paper employs existing foundational theorems and definitions of BI-algebras, focusing on essential properties such as commutativity, transitivity, and distributivity. Using these properties, the classification of BI-algebras of order 2, 3, and 4 is achived through systematic construction and analysis of Cayley tables. For each algebra, the classification approach identifies isomorphic structures and distinguishes them by unique ideal structues. The method involves defining and verifying homomorphisms that preserve these isomorphic structures.

**Results and discussion**
The analysis confirms that, up to isomorphism, only one BI-algebra exist at order 2, two distinct BI-alegebras exist at order 3, and eight at order 4. Each algebra`s structure and prperties are summarized in corresponding Cayley tables. The results reveal specific algebras that are uniquely commutative, transitive, and distributive. Additionally, the paper discusses the impact of these proprties on the ideal structure, where each BI-algebra is analyzed for its set of ideals.

**Conclusion**
This study successfully classifies BI-algebras of order less than 5, contributing valuable insights into their structural and ideal properties. By explicity presenting all possible isomorphic classes and analyzing ideal structures, the paper offers a comperhensive refrence for researchers working with BI-algebras and related algebraic systems. The findings provide a robust foundation for further applications of BI-algebras in various scientific and mathematical fields, enhancing their utility in modeling complex logical and structural systems.

**How to cite:** Radfar, A. (2024). Classification BI-algebras of order less than 5 with their ideals. *Mathematical Researches*, **10** (3), 52 – 71.


Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵٤

# پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# رده‌بندی BI–جبرهای از مرتبه کمتر از ۵ و ایده‌آل‌های آن‌ها

**عاکفه رادفر** [1] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: radfar@pnu.ac.ir

| اطلاعات مقاله | چکیده |
|---|---|
| **نوع مقاله:** مقاله پژوهشی | در این مقاله، تمام جداول کیلی $BI$-جبرهای از مرتبه ۲، 3و 4 در حد یکریختی نمایش داده شده و رده‌بندی شده است. در این مقاله اثبات شده که هر $BI$-جبرجابجایی و پخشی یک $BCK$-جبر است. علاوه بر این ثابت شده است که در حد یکریختی تنها یک $BI$-جبر از مرتبه ۲، دو $BI$-جبر از مرتبه 3 و هشت $BI$-جبر از مرتبه 4 وجود دارد. همچنین بررسی شده است که کدام یک از این جبرها جابجایی، کدام‌یک متعدی و کدام یک پخشی هستند. تمام ایده‌آل‌های هر $BI$-جبر نیز در این مقاله به نمایش گذاشته شده است. |
| **تاریخ دریافت:** ۱۴۰۲/۱/۲۳<br>**تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۳/۵/۲۸<br>**تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۳/۶/۰۵<br>**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۳/۸/۲۰ | |
| **واژه‌های کلیدی:**<br>BI-جبر،<br>رده‌بندی،<br>جبر جابجایی،<br>BCK-جبر،<br>جبر متعدی. | |

**استناد:** رادفر، عاکفه؛ (۱۴۰۳). رده‌بندی BI-جبرهای از مرتبه کمتر از ۵ و ایده‌آل‌های آن‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۳)، ۵۲ – ۷۱.

## ۱. مقدمه

در عصر حاضر ساختارهای جبری، نقش بسزایی در توسعه مرزهای دانش و تولید علم دارند و مورد توجه محققان و پژوهش‌گران در علوم مختلف مانند فیزیک، مهندسی پزشکی، علوم اجتماعی، نظریه گراف، رباتیک، علوم کامپیوتر، محاسبات نرم، نظریه اتومات‌ها و ... قرار گرفته‌اند. در سال ۱۹۵۸ چانگ[1]، مفهوم $MV$-جبر را ارائه کرد و با استفاده از آن در سال 1959 توانست، اثبات جبری خاصی برای تمامیت منطق بی‌نهایت ارزشی لوکاسیویچ ارائه نماید. بعد از معرفی $MV$-جبرها، جبرهای حاصل‌ضربی و جبرهای گودل معرفی شدند که این سه نوع جبر دقیقاً مدل‌های جبری برای منطق لوکاسیویچ[2]، منطق ضربی و منطق گودل هستند و در تفسیر منطق فازی اهمیت ویژه‌ای دارند.

یکی دیگر از ساختارهای جبری که در سایر علوم کاربرد دارد، جبرهای استلزامی می‌باشند. مطالعه $BCK$-جبرها و $BCI$-جبرها برای نخستین بار در سال ۱۹۶۶ توسط دو ریاضیدان به نام‌های ایمایی[3] و ایزاکی[4] به‌عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ای معرفی شد[۹]. دسته‌ای وسیع‌تر از جبرهای مجرد به نام $BCH$-جبرها توسط هو[5] و لی[6] در سال ۱۹۸۳ معرفی شد. آنها نشان دادند که کلاس $BCH$-جبرها یک توسیع سره از کلاس $BCI$-جبرها هست [۸]. مفهوم جبرهای استلزامی در سال 1967 توسط ابوت[7] ارائه شد [۱]. نیجرز و کیم[8] بعد از معرفی $d$-جبرها که تعمیمی از $BCK$-جبرها می‌باشند، در مورد ارتباط بین این دو جبر تحقیق نمودند [۱۲].

در سال ۲۰۰۶ برزویی و خسروی شعار ثابت کردند که کلاس جبرهای استلزامی و دوگان $BCK$-جبرهای استلزامی یکسان هستند [۵]. سپس در سال ۲۰۰۷، کیم و کیم تعمیمی از دوگان $BCK$-جبرها با عنوان $BE$-جبرها را معرفی نمودند [۱۰]. تعمیمی از دوگان جبرهای استلزامی و $BCK$-جبرهای استلزامی با عنوان $BI$-جبرها در سال ۲۰۱۷ توسط برومند سعید و همکارانش ارائه شد [۴]. آنها مفهوم ایده‌آل و رابطه همنهشتی روی این جبر جدید را مورد بررسی و پژوهش قرار داده و نشان دادند، هر $BCK$-جبر استلزامی یک $BI$-جبر است؛ اما عکس این رابطه همواره برقرار نیست.

اهن[9] و همکاران در سال 2019 با تعریف زیرجبرهای نرمال، $BI$-جبرهای خارج‌قسمتی را معرفی کردند [۲]. نیازیان در سال ۲۰۲۱ موفق به ارائه مفهوم ابر $BI$-جبرها شد و با تعریف ابر زیرجبر و ابرایده‌آل در ابر $BI$-جبرها نتایج متعددی به دست آورد [۱۵]. سلیمانی در پایان‌نامه دکتری خود به بررسی خواص $BI$-جبرها پرداخته و نتایج متعددی به دست آورده است. وی همچنین $BI$-جبرهای جابجایی را مورد بررسی قرار داده و نشان داده است که هر $BI$-جبر جابجایی یک $BH$-جبر جابجایی است [۱۸]. اخیراً، رادفر و رضایی سودو $BI$-جبرها را تعریف کرده و حالت‌های مختلفی از سودو $BI$-جبرها را مورد بررسی قرار داده‌اند و نتایج متعددی به‌دست آورده‌اند. آن‌ها ثابت کردند سودو $BI$-جبر از مرتبه ۴ وجود ندارد، هر سودو $BI$-جبر از مرتبه ۴ یک ترتیب

[1] Chang
[2] Lukasiewicz
[3] Imai
[4] Iseki
[5] Hu
[6] Li
[7] Abbott
[8] Neggers and Kim
[9] Ahn

جزئی است و هر سودو $BI$-جبر جابجایی تحت شرایطی، یک جبر استلزام است [۱۶]. با توجه به این‌که رده‌بندی یک ساختار جبری می‌تواند به درک بهتر و شناخت دقیق‌تر یک ساختار جبری کمک کند، مقاله‌های متعددی در زمینه رده‌بندی ساختارهای جبری گوناگون وجود دارد[۳،۶،۱۳،۱۴،۱۷،۱۹]. در ضمن مثال‌های ارائه شده در این مقاله برای نویسندگان و محققانی که روی این ساختار جبری یا ساختارهای جبری مشابه آن تحقیق می‌کنند می‌تواند بسیار مفید باشد. از این جهت در این مقاله همه $BI$-جبرهای متناهی از مرتبه ۲، ۳ و ۴ با مشخص کردن جداول کیلی‌شان، رده‌بندی و شمارش شده است. در مورد هر $BI$-جبر، علاوه بر نمایش مجموعه تمام ایده‌آل‌های مربوطه‌اش، برخی خواص آن‌ها را بررسی و ثابت کردیم هر $BI$-جبر جابجایی و پخشی یک $BCK$-جبر است.

## ۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا و نتایج از قبل به دست آمده که برای نوشتن این مقاله نیاز هست، ارائه شده است.

**تعریف۲,۱.** [۴] یک $BI$-جبر $(X,*,0)$ جبری از نوع $(2,0)$ است که برای هر $x,y\in X$ در دو شرط زیر صدق کند:

$$(B)\qquad x*x=0,$$
$$(BI)\qquad x*(y*x)=x.$$

فرض کنید $(X,*,0)$ یک $BI$-جبر باشد، رابطه "$\leq$" روی $X$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$x\leq y$ اگر و فقط اگر $x*y=0$

توجه داریم رابطه $\leq$ که در این‌جا تعریف شده است، جزئاً مرتب نیست و فقط خاصیت بازتابی دارد.

**قضیه ۲.۲.** [۴] در هر $BI$-جبر برای هر $x,y,z\in X$ روابط زیر برقرار است:

$(p_1)$ $x*0=x$ ،

$(p_2)$ $0*x=0$ ،

$(p_3)$ $x*y=(x*y)*y$ ،

$(p_4)$ اگر $y*x=x$، آن‌گاه $X=\{0\}$ ،

$(p_5)$ اگر برای هر $x,y,z\in X$، $x*(y*z)=y*(x*z)$، آن‌گاه $X=\{0\}$ ،

$(p_6)$ اگر $x*y=z$، آن‌گاه $z*y=z$ و $y*z=y$ ،

$(p_7)$ اگر $(x*y)*(z*u)=(x*z)*(y*u)$، آن‌گاه $X=\{0\}$ .

$BI$-جبر $X$ را

الف- پخشی راست یا به‌اختصار پخشی گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ ، $(x*y)*z=(x*z)*(y*z)$،

ب- جابجایی گویند، هرگاه برای هر $x, y \in X$، داشته باشیم $x*(x*y)=y*(y*x)$ ،

ج- متعدی گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ از $x \leq y$ و $y \leq z$ نتیجه شود $x \leq z$.

برومند سعید و همکارانش ثابت کردند فقط در مورد BI-جبر $X=\{0\}$ می‌تواند پخشی چپ باشد، همچنین آنها ثابت کردند که اگر $X$ پخشی باشد، آن‌گاه رابطه "$\leq$" روی $X$ خاصیت تعدی دارد [۴].

خواص یک BI-جبر پخشی در قضیه زیر آورده شده است.

**قضیه ۳.۲.** [۴] در هر BI-جبر پخشی برای هر $x, y, z \in X$ روابط زیر برقرارند:

$(p_8)$ $y*x \leq y$،

$(p_9)$ $y*(y*x) \leq x$،

$(p_{10})$ $x*(x*y) \leq x$،

$(p_{11})$ $0=((x*y)*(z*y))*(x*z)=((x*y)*(x*z))*(z*y)$،

$(p_{12})$ اگر $x \leq y$، آن‌گاه $x*z \leq y*z$،

$(p_{13})$ $(x*y)*z \leq x*(y*z)$ ( $X$ یک جبر شبه شرکت‌پذیر است)،

$(p_{14})$ اگر $x*y=z*y$، آن‌گاه $(x*z)*y=0$.

با استفاده از خواص فوق روابط زیر برقرار است:

$(p_{15})$ اگر $x*y=x$، آن‌گاه $y*x=y$،

$(p_{16})$ اگر $x*y \neq x$، آن‌گاه $y*x \neq y$،

$(p_{17})$ $x*y \neq y$،

$(p_{18})$ اگر $x*y \neq x$، آن‌گاه $z*x \neq y$.

**تعریف ۴.۲.** [۴] زیرمجموعه $I$ از $BI$-جبر $X$ را ایده‌آل گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف- $0 \in I$،

ب- برای هر $x, y \in X$، از $y \in I$ و $x*y \in I$ بتوان نتیجه گرفت $x \in I$.

در این مقاله مجموعه همه ایده‌آل‌های $BI$-جبر $X$ را با $I(X)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۵.۲.** [۱۱] جبر $(X,*,0)$ از نوع (۲،۰) را $BCK$-جبر گویند، هرگاه برای هر $x,y,z\in X$ در شرایط زیر صدق کند:

$(BCK_1)$ $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$،

$(BCK_2)$ $x*0=x$،

$(BCK_3)$ اگر $x*y=y*x=0$، آن‌گاه $x=y$،

$(BCK_4)$ $0*x=0$.

$BCK$- جبر $X$ را استلزامی گویند، هرگاه برای هر $x,y\in X$ در شرط $(BI)$ صدق کند. $BCK$- جبر $X$ را استلزامی مثبت گویند، هرگاه برای هر $x,y,z\in X$ در شرط $(x*y)*z=(x*z)*(y*z)$ صدق کند.

**تعریف ۶.۲.** [۷] مجموعه غیرتهی $X$ همراه با عمل دوتایی "$*$" و عدد ثابت $0$ را یک دوگان جبرهیلبرت گویند هرگاه برای هر $x,y\in X$ در شرایط زیر صدق کند:

$(DHA1)$ $(x*y)*x=0$،

$(DHA2)$ $((z*x)*(y*x))*((z*y)*x)=0$،

$(DHA3)$ از $x*y=0$ و $y*x=0$ نتیجه بگیریم $x=y$.

دوگان جبر هیلبرت $X$ را جابجایی گویند، هرگاه برای هر $x,y\in X$، داشته باشیم $x*(x*y)=y*(y*x)$.

**قضیه ۷.۲.** [۷] دوگان جبر هیلبرت $X$، برای هر $x,y,z\in X$ در خواص زیر صدق می‌کند:

الف- $(x*y)*z=(x*z)*y$،

ب- $x*0=x$،

ج- $0*x=0$،

**قضیه ۸.۲.** [۱۷] کلاس $BI$-جبرهای جابجایی و پخشی و کلاس دوگان جبر هیلبرت جابجایی یکسانند.

**تعریف ۹.۲.** [۲] نگاشت $f:(X,*)\to(Y,\circ)$ را یکریختی گویند، هرگاه یک به یک و پوشا باشد و به ازای هر $x,y\in X$، در شرط $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ صدق کند. $BI$–جبرهای $(X,*)$ و $(Y,\circ)$ را یکریخت گویند و می‌نویسیم $(X,*)\simeq(Y,\circ)$، هرگاه یک یکریختی بین آنها موجود باشد.

## ۳. $BI$-جبرهای از مرتبه دو و سه

در این بخش $BI$-جبرهای مرتبه دو و سه را رده‌بندی کرده و جدول کیلی آن‌ها را به نمایش می‌گذاریم. برای این منظور، با استفاده از تعریف $BI$-جبر و قضایای ۲٫۲ و ۳٫۲ ثابت می کنیم که تنها یک $BI$-جبر از مرتبه دو در حد یکریختی و دو $BI$-جبر از مرتبه سه در حد یکریختی وجود دارد.

**قضیه ۱.۳.** فقط یک $BI$-جبر از مرتبه دو در حد یکریختی وجود دارد.

**برهان.** فرض کنید $X=\{0,a\}$. با استفاده از $(p_1)$، $(p_2)$ و $(B)$ نتیجه می‌گیریم $0*0=0*a=a*a=0$ و $a*0=a$؛ بنابراین فقط یک $BI$-جبر از مرتبه دو با جدول زیر وجود دارد که پخشی راست نیز هست.

**جدول ۱. BI-جبر از مرتبه ۲**

| $*$ | $0$ | $a$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\}\}$. □

**قضیه ۲.۳.** تعداد $BI$-جبرهای مرتبه سه در حد یکریختی برابر ۲ است.

**برهان.** فرض کنید $X=\{0,a,b\}$. بنابر $(p_1)$، $(p_2)$ و $(B)$ داریم:

$$b*0=b \text{ و } 0*0=0*a=0*b=b*b=a*a=0,\quad a*0=a.$$

با استفاده از $(p_{17})$، نتیجه می‌گیریم $a*b\neq b$؛ بنابراین $a*b\in\{0,a\}$. اگر $a*b=a$، آن‌گاه بنابر $(p_{15})$، $b*a=b$. اگر $a*b=0$، آن‌گاه با استفاده از $(p_{16})$، نتیجه می‌گیریم $b*a\neq b$. همچنین بر طبق $(p_{17})$، $b*a\neq a$؛ بنابراین $b*a=0$ و دو جدول کیلی زیر را می‌یابیم که هر دو مورد پخشی هستند و $(X,\star_1,0)$ جابجایی نیز هست.

**جدول ۲. BI-جبر جابجایی**

| $\star_2$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a,b\}\}$. □

**جدول ۳. BI-جبر جابجایی و پخشی**

| $\star_1$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},\{0,a,b\}\}$

## ۴. $BI$-جبرهای مرتبه ۴

در این بخش $BI$-جبرهای مرتبه ۴ را رده‌بندی می‌کنیم. برای این منظور با در نظر گرفتن $BI$-جبر $X=\{0,a,b,c\}$، حالت‌های مختلف برای $a*b$ و $a*c$ را بررسی می‌کنیم و با استفاده از این حالت‌ها، تمامی $BI$-جبرهای ممکن را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. ابتدا لم‌های کلیدی را مطرح می‌کنیم که هر کدام از آن‌ها یکی از حالات ممکن برای $a*b$ و $a*c$ را بررسی می‌کند. سپس با استفاده از این لم‌ها و قضایای مرتبط، رده‌بندی دقیقی از $BI$-جبرهای مرتبه ۴ ارائه می‌شود. جداول کیلی متناظر با این $BI$-جبرها نمایش داده‌می‌شوند که در آن‌ها خواص جابجایی، پخشی و متعدی بودن بررسی می‌گردد. این تحلیل به ما اجازه می‌دهد تا تمامی $BI$-جبرهای مرتبه ۴ را که از نظر یکریختی متفاوت هستند، شناسایی و دسته بندی کنیم. لازم به ذکر است در سرتاسر این بخش فرض بر این است که $X=\{0,a,b,c\}$ یک $BI$-جبر است.

**لم ۱،۴.** (الف) $0*0=0*a=0*b=0*c=0$،

(ب) $a*a=b*b=c*c=0$.

(ج) $a*0=a, b*0=b, c*0=c$.

**برهان.** با استفاده از $(p_1)$، $(p_2)$ و $(B)$ اثبات بدیهی است. □

**لم ۲،۴.** اگر $a*b=a*c=0$، آن‌گاه موارد زیر برقرارند:

(الف) $b*a=0$،

(ب) $b*c\in\{0,b\}$،

(پ) $c*a=0$،

(ت) $c*b\in\{0,c\}$،

(ث) $b*c=0$ نتیجه می‌دهد $c*b=0$،

(ج) $b*c=b$ نتیجه می‌دهد $c*b=c$.

**برهان.** (الف) از آن‌جایی‌که $a*b\neq a$، با استفاده از $(p_{16})$ نتیجه می‌گیریم $b*a\neq b$. بنابر $(p_{17})$، $b*a\neq a$ همچنین از $(p_{18})$ و $a*c\neq a$ نتیجه می‌شود $b*a\neq c$. پس $b*a=0$.

(ب) بنابر $(p_{17})$، $b*c\neq c$. با توجه به $(p_{16})$ و $a*c\neq a$ خواهیم داشت $c*a\neq c$. بنابر $(p_{18})$و $c*a\neq c$ می‌توان نتیجه گرفت $b*c\neq a$. پس $b*c\in\{0,b\}$.

(پ) اثبات شبیه قسمت (الف) است.

(ت) اثبات شبیه قسمت (ب) است.

(ث) فرض کنید $b*c=0$. دراین‌صورت بنابر $(p_{17})$ و $(p_{18})$، $c*b\notin\{c,b\}$. همچنین از $(p_{18})$ و $b*a\neq b$ خواهیم داشت $c*b\neq a$. پس $c*b=0$.

(ج) با استفاده از $(p_{15})$ برهان بدیهی است. □

**لم ۳.۴.** فرض کنید $a*b=0$ و $a*c=a$. دراین‌صورت موارد زیر برقرارند:

(الف) $b*a\in\{0,c\}$،

(ب) $c*a=c$،

(پ) $c*b\in\{0,c\}$،

(ت) اگر $c*b=0$، آن‌گاه $b*c\in\{0,a\}$،

(ث) اگر $c*b=c$، آن‌گاه $b*c=b$.

**برهان.** (الف) با استفاده از $(p_{16})$، $(p_{17})$ و $a*b\neq a$ داریم $b*a\notin\{a,b\}$؛ بنابراین $b*a\in\{0,c\}$.

(ب) طبق $(p_{15})$ برهان بدیهی است.

(پ) بنابر $(p_{18})$ و $b*a\neq b$ داریم $c*b\neq a$. به‌علاوه با استفاده از $(p_{17})$ خواهیم داشت $c*b\in\{0,c\}$.

(ت) فرض کنید $c*b=0$. دراین‌صورت با استفاده از $(p_{16})$، $(p_{17})$ و $c*b\neq c$ نتیجه می‌شود $b*c\notin\{b,c\}$. بنابراین $b*c\in\{0,a\}$.

(ث) بنابر $(p_{15})$ برهان بدیهی است. □

**لم ۴،۴.** فرض کنید $a*b=0$ و $a*c=b$. دراین‌صورت موارد زیر برقرارند:

(الف) $b*a=0$،

(ب) $b*c=b$،

(پ) $c*a=0$ ،

(ت) $c*b=c$ .

**برهان.** (ب) و (ت). با استفاده از $(p_6)$ و $a*c=b$ برهان ساده است.

(الف) بنابر $(p_{17})$، $b*a\neq a$. با به‌کارگیری $(p_{16})$ و $a*b\neq a$ نتیجه می‌گیریم $b*a\neq b$. همچنین بنابر $(p_{18})$ و $a*c\neq a$ خواهیم داشت $b*a\neq c$؛ بنابراین $b*a=0$.

(پ) بنابر $(p_{17})$، $c*a\neq a$. با به‌کارگیری $(p_{16})$ و $a*c\neq a$ نتیجه می‌گیریم $c*a\neq c$. همچنین بنابر $(p_{18})$ و $a*b\neq a$ خواهیم داشت $c*a\neq c$؛ بنابراین $c*a=0$. □

**لم ۵.۴.** فرض کنید $a*b=a$ و $a*c=0$. دراین‌صورت

(الف) $b*a=b$،

(ب) $c*a\in\{0,b\}$،

(پ) $b*c\in\{0,b\}$،

(ت) اگر $b*c=0$، آن‌گاه $c*b\in\{0,a\}$،

(ث) اگر $b*c=b$، آن‌گاه $c*b=c$.

**برهان.** (الف) بنابر $(p_{15})$ برهان بدیهی است.

(ب) با استفاده از $(p_{16})$ و $(p_{17})$، نتیجه می‌شود $c*a\notin\{a,c\}$. پس $c*a\in\{0,b\}$.

(پ) طبق (ب) $c*a\neq c$. به‌علاوه بنابر $(p_{17})$ و $(p_{18})$ داریم $b*c\notin\{a,c\}$. پس $b*c\in\{0,b\}$.

(ت) فرض کنید $b*c=0$. بنابر $(p_{16})$، $(p_{17})$و $b*c\neq b$ نتیجه می‌شود $c*b\notin\{b,c\}$. پس $c*b\in\{0,a\}$.

(ث) با استفاده از $(p_{15})$، برهان ساده است. □

**لم ۶.۴.** فرض کنید $a*b=a*c=a$. دراین‌صورت

(الف) $b*a=b$،

(ب) $c*a=c$،

(پ) اگر $b*c=0$، آن‌گاه $c*b\in\{0,a\}$،

(ت) اگر $b*c=a$، آن‌گاه $c*b\in\{0,a\}$،

(ث) اگر $b*c=b$، آن‌گاه $c*b=c$.

**برهان.** (الف)، (ب) و (ث). با استفاده از $(p_{15})$ برهان ساده است.

(پ) و (ت). فرض کنید $b*c=0$ یا $b*c=a$. با استفاده از $(p_{16})$ ، $(p_{17})$ و $b*c\neq b$ نتیجه می‌شود $c*b\notin\{b,c\}$ و لذا $c*b\in\{0,a\}$. □

**لم ۷٫۴.** فرض کنید $a*b=a$ و $a*c=b$. دراین‌صورت

(الف) $b*a=b$،

(ب) $b*c=b$،

(پ) $c*a\in\{0,b\}$،

(ت) $c*b=c$ .

**برهان.** (الف)، (ب) و (ت). با استفاده از $(p_6)$ برهان ساده است.

(پ) از آن‌جایی‌که $a*c\neq a$، با استفاده از $(p_{16})$ و $(p_{17})$ نتیجه می‌شود $c*a\notin\{c,a\}$؛ بنابراین $c*a\in\{0,b\}$. □

**لم ۸٫۴.** فرض کنید $a*b=c$. دراین‌صورت

(الف) $b*c=b$،

(ب) $c*b=c$،

(پ) اگر $a*c\in\{0,b\}$، آن‌گاه $b*a=c*a=0$،

(ت) اگر $a*c=a$، آن‌گاه $b*a\in\{0,c\}$ و $c*a=c$.

**برهان.** (الف) و (ب). با به‌کارگیری $(p_6)$ برهان ساده است.

(پ) فرض کنید $a*c=0$. دراین‌صورت بنا بر $(p_{16})$، $(p_{18})$ و $a*c\neq a$ خواهیم داشت، $c*a\neq a$، $b*a\neq c$ و $c*a\neq c$. هم‌چنین از $(p_{16})$، $(p_{18})$ و $a*b\neq a$ نتیجه می‌شود $c*a\neq b$ و $b*a\neq b$. با به‌کارگیری $(p_{17})$، نتیجه می‌گیریم $c*a=b*a=0$.

(ت) از $a*c=a$ و $(p_{15})$ نتیجه می‌گیریم $c*a=c$. از آن‌جایی‌که $a*b\neq a$، بنابر $(p_{16})$ و $(p_{17})$، داریم $b*a\notin\{b,a\}$؛ بنابراین $b*a\in\{0,c\}$. □

**قضیه ۹.۴.** هشت $BI$-جبر مرتبه ۴ در حد یکریختی موجود است.

**برهان.** فرض کنید $X=\{0,a,b,c\}$ یک $BI$-جبر از مرتبه ۴ باشد. با استفاده از $(p_{17})$، $a*b\in\{0,a,c\}$. اگر $a*b=0$، آن‌گاه سه حالت برای $a*c$ داریم. اگر $a*c=0$، آن‌گاه بنابر لم ۲,۴، دو $BI$-جبر زیر را می‌یابیم، که در آن هر دو متعدی هستند و $(X,*_1)$ پخشی نیز است.

**جدول۴. BI-جبر متعدی**

| $*_2$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $0$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},X\}$. □

**جدول ۵. BI-جبر متعدی و پخشی**

| $*_1$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},X\}$

اگر $a*b=0$ و $a*c=a$، آن‌گاه بنابر لم ۳.۴ (پ)، $c*b=0$ یا $c*b=c$. اگر $c*b=0$، آن‌گاه با استفاده از لم ۳.۴ (ت) باید چهار جدول زیر را مورد بررسی قرار دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود $(X,\bullet_1)\simeq(X,*_2)$ و $(X,\bullet_2)\simeq(X,*_3)$ و $(X,*_4)$ جابجایی، پخشی و متعدی است، ضمناً یک $BCK$-جبر نیز هست.

**جدول ۶. BI-جبر**

| $*_3$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},X\}$

**جدول ۷. BI-جبر متعدی**

| $\bullet_1$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},X\}$

**جدول ۸. BCK-جبر**

| $*_4$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $0$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,c\},X\}$. □

**جدول۹. BI-جبر**

| $\bullet_2$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,c\},X\}$

اگر $c*b=c$، آن‌گاه بنابر لم ۳.۴ (ث)، $b*c=b$ و باید دو جدول زیر را مورد بررسی قرار دهیم که هر دو غیر یکریخت، هر دو $BI$-جبر متعدی هستند و $(X,*_5)$ پخشی است.

**جدول ۱۰. BI-جبر متعدی**

| $*_6$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,a,b\},\{0,c\},X\}$. □

**جدول ۱۱. BI-جبر متعدی و پخشی**

| $*_5$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a,b\},\{0,c\},X\}$

اگر $a*b=0$ و $a*c=b$، آن‌گاه طبق لم ۴,۴ یک $BI$-جبر زیر را می‌یابیم که با $(X,*_3)$ یکریخت است.

**جدول ۱۲. BI-جبر**

| $\bullet_3$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $0$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,c\},X\}$. □

حال اگر $a*b=a$ و $a*c=0$، آن‌گاه بنابر لم ۵،۴، شش $BI$-جبر زیر با جدول‌های کیلی که به‌صورت زیر نشان داده شده است را بررسی کنیم که همه جبرهای به‌دست آمده با حالت‌های قبلی که یافته‌ایم یکریخت هستند. با یک بررسی ساده ولی کمی طولانی متوجه می‌شویم که $(X,\bullet_4)\simeq(X,*_2)$، $(X,\bullet_5)\simeq(X,\bullet_6)\simeq(X,*_3)$، $(X,\bullet_7)\simeq(X,*_4)$، $(X,\bullet_8)\simeq(X,*_5)$ و $(X,\bullet_9)\simeq(X,*_6)$. برای مثال اگر $f:(X,\bullet_9)\to(X,*_6)$ را به صورت

$$f(0)=0,\ f(a)=a, f(b)=c, f(c)=b$$

تعریف کنیم. دراین‌صورت $f$ یک یکریختی بین $(X,\bullet_9)$ و $(X,*_6)$ است. اثبات یکریختی بقیه موارد نیز مشابه است و در این مقاله به آن نپرداخته‌ایم.

**جدول ۱۳. BI-جبر**

| $\bullet_5$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $a$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $0$ | $a$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,b\},X\}$

**جدول ۱۴. BI-جبر متعدی**

| $\bullet_4$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $a$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},X\}$

**جدول ۱۵. BCK-جبر**

| $\bullet_7$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $a$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},X\}$

**جدول ۱۶. BI-جبر**

| $\bullet_6$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $a$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $0$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},X\}$

**جدول ۱۷. BI-جبر متعدی**

| $\bullet_9$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | 0 |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},\{0,a,c\},X\}$. □

**جدول۱۸. BI-جبر متعدی و پخشی**

| $\bullet_8$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | 0 |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $b$ |
| $c$ | $c$ | 0 | $c$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a,c\},\{0,b\},X\}$

اگر $a*b=a*c=a$، آن‌گاه طبق لم ۶.۴، پنج $BI$-جبر زیر را می‌یابیم که $(X,*_7)$ متعدی است، $(X,*_8)$ جابجایی و پخشی و یک $BCK$-جبر است. همچنین $(X,\bullet_{10})\simeq(X,*_5)$ و $(X,\bullet_{11})\simeq(X,\bullet_{12})\simeq(X,*_6)$.

**جدول۱۹. BI-جبر متعدی**

| $\bullet_{11}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | 0 |
| $c$ | $c$ | $c$ | $a$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},\{0,b,c\},X\}$

**جدول ۲۰. BI-جبر متعدی و پخشی**

| $\bullet_{10}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | 0 |
| $c$ | $c$ | $c$ | 0 | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b,c\},X\}$

**جدول ۲۱. BI -جبر متعدی**

| $*_7$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $a$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $a$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},\{0,c\},\{0,b,c\},X\}$

**جدول ۲۲. BI-جبر متعدی**

| $\bullet_{12}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $a$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | 0 | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b,c\},\{0,c\},X\}$

جدول ۲۳. BCK-جبر

| $*_8$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},\{0,c\},\{0,a,b\},\{0,a,c\},\{0,b,c\},X\}.$

اگر $a*b=a$ و $a*c=b$، آن‌گاه با استفاده از لم ۷٫۴ به دو $BI$-جبر زیر می‌رسیم، که در آن $(X,\bullet_{13})\simeq(X,*_6)$ و $(X,\bullet_{14})\simeq(X,*_7)$.

جدول ۲۴. BI-جبر متعدی

| $\bullet_{14}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,b\},\{0,c\},\{0,a,c\},X\}.$

جدول ۲۵. BI-جبر متعدی

| $\bullet_{13}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $a$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | $b$ |
| $c$ | $c$ | 0 | $c$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a,c\},\{0,b\},\{0,c\},X\}$

در پایان، اگر $a*b=c$، آن‌گاه بنابر لم ۸٫۴ باید چهار جدول زیر را مورد بررسی قرار دهیم که همه آن‌ها با موارد قبلی کهیافته‌ایم یکریخت هستند. داریم $(X,\bullet_{15})\simeq(X,*_3)$، $(X,\bullet_{16})\simeq(X,*_4)$، $(X,\bullet_{17})\simeq(X,*_6)$ و $(X,\bullet_{18})\simeq(X,*_7)$.

جدول ۲۶. BCK-جبر

| $\bullet_{16}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | 0 | 0 | $b$ |
| $c$ | $c$ | 0 | $c$ | 0 |

$I(X)=\{\{0\},\{0,b\},\{0,c\},X\}$

جدول ۲۷. BI-جبر

| $\bullet_{15}$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $c$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $0$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,b\},X\}$

جدول ۲۸. BI-جبر متعدی

| $\bullet_{18}$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,a,b\},\{0,b\},\{0,c\},X\}.$ □

جدول ۲۹. BI-جبر متعدی

| $\bullet_{17}$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $0$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $0$ |

$I(X)=\{\{0\},\{0,a\},\{0,a,b\},\{0,b\},\{0,c\},X\}$

با توجه به $BI$-جبرهای $(X,*_1)$ تا $(X,*_8)$ به نتیجه زیر می‌رسیم:

**نتیجه ۱۰.۴ .** الف- تعداد $BI$-جبرهای از مرتبه ۴ در حد یکریختی برابر ۸ است،

**قضیه ۱۱.۴.** هر $BI$-جبر جابجایی و پخشی یک $BCK$-جبر است.

**برهان.** فرض کنیم $X$ یک $BI$-جبر جابجایی و پخشی باشد. طبق قضیه ۸.۲، هر $BI$-جبر جابجایی و پخشی یک دوگان جبر هیلبرت جابجایی است. پس طبق تعریف ۶.۲ و قضیه ۷.۲ در خواص $(BCK_2)$ تا $(BCK_4)$ صدق می‌کند. بنابر قضیه ۳.۲ $(p_{11})$ و قضیه ۷.۲ (الف)، برای هر $x,y,z\in X$ داریم:

$$0=((x*y)*(z*y))*(x*z)=((x*y)*(x*z))*(z*y).$$

بنابراین $X$ در شرط $(BCK_1)$ نیز صدق می‌کند و در نتیجه یک $BCK$-جبر است. □

**قضیه ۱۲.۴.** $BCK$-جبر $X$ یک $BI$-جبر است اگر و تنها اگر استلزامی باشد.

در مثال بعد نشان می‌دهیم عکس قضیه ۱۱.۴، در حالت کلی برقرار نیست.

**مثال ۴. ۱۳.** فرض کنید $X=\{0,a,b,c\}$. در جدول کیلی زیر مشاهده می‌کنیم که $(X,\bullet)$ یک $BCK$-جبر است ولی یک $BI$-جبر نیست، زیرا $a\bullet(b\bullet a)=a\bullet a=0\neq a$ و $X$ در شرط $(BI)$ صدق نمی‌کند.

جدول ۳۰. BCK-جبر

| $\bullet$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $0$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $a$ | $a$ | $0$ |

## ۵. نتیجه گیری

در این مقاله $BI$-جبرهای از مرتبه ۲، ۳ و ۴ در حد یکریختی رده‌بندی شدند. نتایج اصلی شامل موارد زیر است:

$BI$-جبرهای مرتبه ۲: طبق قضیه ۱,۳، تنها یک $BI$-جبر از مرتبه ۲ وجود دارد.

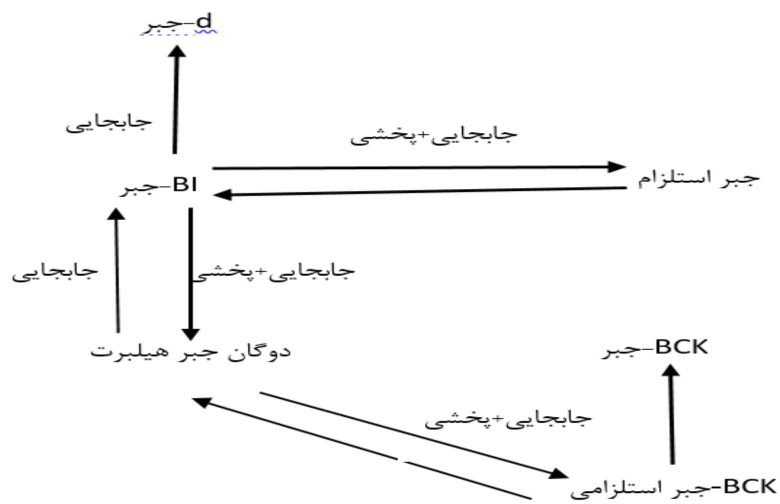
$BI$-جبرهای مرتبه ۳: طبق قضیه ۲,۳، دو $BI$-جبر از مرتبه ۳ شناسایی شد.

$BI$-جبرهای مرتبه ۴: تعداد $BI$-جبرهای از مرتبه ۴ در حد یکریختی به ۸ می‌رسد که در فصل سوم اثبات شده است.

برای تمامی $BI$-جبرهای معرفی شده، مجموعه تمام ایده‌آل‌ها به نمایش گذاشته شده و مشخص گردیده کدام‌یک دارای خواص جابجایی، پخشی و متعدی هستند. به‌طور خاص، ثابت شده است که هر $BI$-جبر جابجایی و پخشی یک $BCK$-جبر است. نتایج این تحقیق با استفاده از قضایای ۱.۳، ۲.۳ و نتیجه ۱۰.۴ در جدول (۱) و شکل (۱) نتایج ارائه شده اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد با افزایش مرتبه، تنوع و پیچیدگی $BI$-جبرها به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. در تحقیقات بعدی به رده‌بندی $BI$-جبرهای مرتبه ۵ خواهیم پرداخت که به فهم عمیق‌تر از ساختارها کمک می‌کند.

جدول ۱:تعداد انواع BI-جبرهای از مرتبه کمتر از ۵

| متعدی | $BCK$ -جبر | پخشی | جابجایی | تعداد | مرتبه $BI$ -جبر |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۱ | ۲ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۷ | ۲ | ۴ | ۲ | ۸ | ۴ |




شکل ۱. ارتباط بین ساختارهای جبری در این مقاله

# References

1. J. Abbott, Semi-Boolean algebras, Mate. Vesnik, **4**(1967), 177-198.

2. S. S. Ahn, J. M. Ko and A. Borumand Saeid, On ideals of BI-algebras, J. Indones. Math. Soc. **25**(1)(2019), 24-34.

3. R. Ameri, A. Radfar and R. A. Borzooei, Characterization of hyper BCI-algebra of order 3, Ital. J. Pure Appl. Math. **30**(2013), 141-156.

4. A. Borumand Saeid, H. S. Kim and A. Rezaei, On BI-algebras, An. St. Univ. Ovidius Constanta **25**(2017), 177-194.

5. R. A. Borzooei and S. Khosravi shoar, Implication algebras are equivalent to the dual implicative BCK-algebras ,Sci. Math. Jpn. **63**(2006), 371-373.

6. R. A. Borzooei and A. Radfar, Classification of hyper MV-algebras of order 3, Ratio Mathematica. **25**(2013), 15-28.

7. A. Diego, Sur algébres de Hilbert, Collect. Logique Math. Ser. A **21** (1967), 177–198.

8. .L. QHu and X. Li, On BCH-algebra, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **2** (1983), part 2, 313-320.

9. Y. Imai and K. Iseki, On axioms systems of propositional calculi XIV, Proceeding of the Japan Academy, Series A, **42** (1966), 19–22.

10. H. S. Kim and Y. H. Kim, On BE-algebras, Sci. Math. Jpn, **66**(1) (2007), 113-117.

11. H. S. Li, An axiom system of BCI-algebras, Math. Jpn, **30** (1985), 351–352.

12. J. Neggers and H. S. Kim, On d-algebras, Math. Slovaca, **49** (1999), 19-26.

13. S. A. Nematoallah Zadeh, A. Broumand Saeid, R. Ameri and A. Radfar, On finite B-algebra, Afrika Mathematika, **26**(2015), 825-847, DOI 10.1007/s13370-014-0249-8.

14. S. A. Nematolah Zadeh, A. Borumand Saeid, R. A. Borzooei, A. Radfar and R. Ameri, On finite BM-algebra, Kochi J. Math **9** (2014): 43-50.

15. S. Niazian, On hyper BI-algebras, Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, **2**(1) (2021), 47-67.

16. A. Radfar and A. Rezaei, ,Pseudo-BI-algebras: Non-commutative generalization of BI-algebras Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras**4**(2)(2023), 167-187.

17. S. Rasouli, A new approach to characterization of MV-algebras , Algebraic Structures and Their Applications, **3**(2016), 49-70.

18. S. Soleymani, Topics in BI-algebras, (2022), Ph. D. Thesis, Payame Noor University, Iran.

19. K. Shuker, and H. Ahmed, The Characterizations of δ-Algebras with Their Ideals, (2021), Journal of Physics: Conference Series. 1999. 012108. 10.1088/1742-6596/1999/1/012108.