




Applying Sequential Quadratic Programming and Smoothed L0 Norm for Recovery of Noisy Sparse Signal

Mohammad Saeid Alamdari¹  , Masoud Fatemi² , Aboozar Ghaffari³ 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.  E-mail: m.s.alamdari@email.kntu.ac.ir
2. Department of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran. E-mail: smfatemi@kntu.ac.ir
3. Department of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran. E-mail: aboozar_ghaffari@iust.ac.ir

Article Info	ABSTRACT
<p>Article type: Research Article</p> <p>Article history: Received: 4 May 2023 Accepted: 22 October 2023 Published online: 9 June 2024</p> <p>Keywords: Optimization, Sequential quadratic programing, Smoothed L0 norm, Sparse signal representation.</p>	<p>Introduction</p> <p>Assume the system of linear equation $y = Ax$ where $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is a known matrix—it is called the dictionary or the sensing matrix—with $n > m$ and a given signal measurement $y \in \mathbb{R}^m$. The main goal in a sparse signal recovery problem is to find the sparsest possible vector x satisfying $y = Ax$. A common mathematical model of this problem is</p> $P_0: \min_x \ x\ _0 \quad \text{s. t.} \quad y = Ax \tag{1}$ <p>where $\ x\ _0$ is the L0 norm defined as the number of non-zero elements of x. Since the L0 norm does not have desirable properties like being continuous and differentiable, relaxation methods have been developed to solve it. In practical applications, where the available data are subject to noise and measurement errors, a study of a noisy version of the original model (1) is inevitable; that is,</p> $P_0^\varepsilon: \min_x \ x\ _0 \quad \text{s. t.} \quad \ y - Ax\ _2 \leq \varepsilon \tag{2}$ <p>where $\varepsilon > 0$ is an upper bound for the noise.</p> <p>The proposed algorithm</p> <p>Sequential quadratic programming is an iterative method for solving constrained optimization problems. This approach determines the search direction by solving a quadratic subproblem at every iteration. This method was first proposed by Wilson in 1963 and then popularized by Han, and Powell. Consider the constraint optimization problem.</p> $P \begin{cases} \min_x & f_\sigma(x) = - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \\ \text{s. t.} & c(x) = y - Ax \end{cases} \tag{3}$ <p>The problem (3) can be seen as a continuous relaxation of the original problem (1). In the SQP approach, the search direction d is computed by solving the following quadratic trust-region subproblem</p> $QP(x, \rho) \begin{cases} \min_d & q(d) := g^t d + \frac{1}{2} d^t H d \\ \text{s. t.} & c + \nabla c^t d = 0 \\ & \ d\ _2 \leq \rho \end{cases} \tag{4}$

where ρ is the trust-region radius, $g = (g_1, \dots, g_n)^t$ is the gradient of the objective function and H is the Hessian of the Lagrangian or its approximation. The gradient and the Hessian of the SL0 norm are

$$g_i = \frac{2x_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right), H = \text{Diag}\left(\left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right)$$

where $\text{Diag}(\omega_i)$ denotes a diagonal matrix with elements ω_i . Fortunately, Since the Hessian has a simple diagonal structure, all subproblems, as we show later, can be solved efficiently without imposing additional cost; it results to a super-linear rate of convergence. Let d be the solution of the quadratic programming subproblem (4), we define

$$\Delta q := q(0) - q(d) = -g^t d - \frac{1}{2} d^t H d, \Delta f := f(x) - f(x + d),$$

as the predicted and the actual reduction, respectively.

Conclusion

In this paper, we proposed a sequential quadratic programming algorithm for solving sparse recovery problems. An efficient SQP solver for the noise-aware problems was introduced. The proposed method uses a new approach to solve subproblems. Through a set of extensive experiments on sparse signal recovery problems in various scenarios, it was demonstrated that the proposed algorithm outperforms a number of well-known algorithms. In recent years, the problem of non-negative sparse representation and recovering low-rank matrices have received more attention by researchers. In this regard, a future plan of research can be developing a suitable version of the proposed method for solving these problems. As a further plan, providing a worst-case complexity bound for the proposed algorithm, considering the specific structure of the problem at hand, can be on the agenda. Using the Filter idea from non-linear programming instead of the penalty approach also is a good point for the future development.

How to cite: Alamdari, M.S., Fatemi, M., & Ghaffari, A. (2024). Applying sequential quadratic programming and smoothed L0 norm for recovery of noisy sparse signal. *Mathematical Researches*, **10** (1), 98 – 118.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵۴

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: <https://mmr.khu.ac.ir/>

بکارگیری برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و نرم صفر هموار شده برای بازیابی سیگنال‌های تنک نویزدار

محمدسعید علمداری^۱✉، مسعود فاطمی^۲، ابوذر غفاری^۳

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی کاربردی، دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران. رایانامه: m.s.alamdari@email.kntu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده ریاضی کاربردی، دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران. رایانامه: smfatemi@kntu.ac.ir
۳. گروه مهندسی پزشکی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران. رایانامه: aboozar_ghaffari@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	نمایش تنک کاربردهای زیادی در پردازش سیگنال و تصویر دارد که از آن جمله می‌توان به کاربرد در بازسازی تصاویر پزشکی، تقویت و فشرده‌سازی تصاویر، جداسازی سیگنال، پردازش سیگنال آرایه و رادار اشاره کرد. این مهم سبب شده تا محققان از انواع روش‌های نمایش تنک بهرمنند و در جهت حل مسائل بهینه‌سازی از نرم‌های مختلف استفاده نمایند. در این مقاله ابتدا روش‌های مختلف حل نمایش تنک بررسی می‌شوند و در ادامه روشی جدید و کارا برای بازیابی سیگنال‌های تنک نویزدار با بهرمندی از برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و نرم صفر هموار شده ارائه می‌شود. نتایج آزمایشات انجام شده، نرخ موفقیت بالای روش پیشنهادی در مقایسه با سایر روش‌های بهینه‌سازی نمایش تنک را نشان می‌دهد.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۱۴	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۳۰	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۳/۲۰	
واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی، برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، نرم صفر هموار شده، نمایش تنک سیگنال.	

استناد: علمداری، محمدسعید؛ فاطمی، مسعود؛ و غفاری، ابوذر (۱۴۰۳). بکارگیری برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و نرم صفر هموار شده برای بازیابی سیگنال‌های تنک نویزدار. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۱)، ۹۸ - ۱۱۸.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در بهینه‌سازی تُنک هدف آن است که از بین تعداد زیادی سیگنال پایه که در حالت کلی تعدادشان خیلی بیشتر از بعدشان است، کمترین تعداد برای نمایش یک سیگنال انتخاب شود. تبدیل‌های خطی در ریاضیات و علوم مهندسی جایگاه ویژه‌ای دارند و می‌توان آن‌ها را در فضا با بعد متناهی به کمک دستگاه معادلات خطی نمایش داد. تبدیل‌های خطی کامل در پردازش سیگنال و تصویر به خصوص در زمینه‌های فشرده‌سازی و کاهش نویز سیگنال با اهداف دستیابی به نمایش هر چه تُنک تر سیگنال، کاربرد دارند.

در سال‌های اخیر، استفاده از نمایش تنک سیگنال در کاربردهایی مانند نمونه برداری، فشرده‌سازی و نوپزدایی مورد توجه بسیار قرار گرفته است. موفقیت نمایش تنک در این کاربردها، از آنجا ناشی می‌شود که اکثر سیگنال‌های طبیعی مانند تصویر و گفتار دارای نمایشی تنک هستند. نمایش سیگنال‌ها در پایه مناسب، همواره به عنوان یک گام اساسی در شناخت ویژگی‌ها و تفسیر اطلاعات از سیگنال‌ها مورد توجه بوده است. منظور از نمایش تُنک، نمایشی از سیگنال است که در آن قسمت عمده‌ای از اطلاعات اساسی سیگنال در تعداد کمی از ضرایب متمرکز می‌شوند. گرچه تعریف و معیاری برای تُنک بودن وجود ندارد، اما در یک بیان ساده تُنکی به معنای صفر بودن بیشتر مولفه‌های سیگنال است و در بیان عملی یعنی اکثر مولفه‌های سیگنال کوچک بوده و تنها چند مولفه سیگنال دارای مقادیر قابل توجه‌ای باشند.

سیگنال‌ها با بردارهای $m \times 1$ نشان داده می‌شوند، یعنی فضای سیگنال همان \mathbb{R}^m است. یک سیگنال مانند y را در نظر بگیرید، اگر بردارهای یکه فضای \mathbb{R}^m را با $\{e_i\}_{i=1}^m$ نشان دهیم، آنگاه سیگنال بصورت زیر نشان داده می‌شود:

$$y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$$

که در آن y_i ها مولفه‌های بردار y هستند. عبارت فوق، در واقع نمایش بردار y برحسب خانواده بردارهای $\{e_i\}$ است. در اصطلاح یک خانواده از سیگنال‌های معلوم را دیکشنری و سیگنال‌های عضو آن را اتم می‌نامند.

دیکشنری $\{e_i\}_{i=1}^m$ ساده‌ترین دیکشنری حوزه زمان است که از اتم‌های کاملاً محلی در زمان یعنی سیگنال ضربه یا دیراک و انتقال یافته‌های آن تشکیل شده است. لذا هر سیگنال در ساده‌ترین شکل خود، یعنی هنگامی که آن را بصورت برداری مانند y با مولفه‌های y_i نشان می‌دهیم نمایشی بر حسب یک دیکشنری ساده (یعنی دیکشنری دیراک) است که در آن مولفه‌های y_i ضرایب این نمایش یا بسط می‌باشند.

اکثر سیگنال‌های طبیعی در یک یا چند حوزه مانند زمان، فرکانس، موجک و ... دارای نمایش تُنک هستند، به این معنا که می‌توان اطلاعات موجود در آن‌ها را با استفاده از تعداد اندکی ضریب در یک حوزه نمایش خاص بیان کرد. مثلاً اگرچه تصاویر در حوزه مکانی بسیار انبوه یا غنی و با اطلاعات زیاد به نظر می‌رسند، اما در حوزه فرکانس دارای اطلاعات فشرده و به اصطلاح تُنک هستند، به طوریکه اغلب ضرایب فرکانسی آن‌ها صفر یا نزدیک به صفر است. همین موضوع در مورد بسیاری از انواع دیگر سیگنال‌ها هم صادق است، به طوریکه می‌توان سیگنالی بسیار حجیم به طول N را تنها با k ضریب که $k < N$ است

نمایش داد. به عنوان مثال، در شکل ۱ نمایش تُنک سیگنال y به وسیله ماتریس حسگر A نشان داده شده است.

$$y_{m \times 1} = A_{m \times n} x_{n \times 1}$$

شکل ۱. نمایش تُنک سیگنال y به وسیله ماتریس حسگر A .

در این شکل سیگنال y با ابعاد $m \times 1$ به وسیله ماتریس حسگر A با ابعاد $m \times n$ ($m < n$) نمونه برداری می‌شود و سیگنال x که در نمایش تنک خیلی کوچکتر از y می‌باشد را نتیجه می‌دهد. سیگنال اندازه گیری شده x را می‌توان به گیرنده ارسال کرد و اگر به میزان کافی تُنک باشد و ماتریس حسگر A شرایط خاصی را ارضا کند، می‌توان y را از روی x بازسازی کرد. ماتریس A در واقع در بردارنده تمام پایه‌هایی است که برای نمایش داده‌ها استفاده می‌شود. این ماتریس دیکشنری نامیده می‌شود و تمام فضای برداری مربوط به داده‌ها را پوشش می‌دهد. هر کدام از ستون‌های ماتریس دیکشنری را یک اتم می‌نامند. در صورتی که تعداد اتم‌های دیکشنری برابر بعد فضای برداری باشد آنگاه آن دیکشنری را یک دیکشنری کامل و در این صورت هر کدام از داده‌ها نمایشی یکتا با استفاده از اتم‌های دیکشنری خواهد داشت. اگر تعداد اتم‌های یک دیکشنری کامل را بیشتر کنیم، به آن دیکشنری فراکامل گفته می‌شود که نمایش سیگنال با آن دارای جواب یکتا نخواهد بود. برای درک بهتر این موضوع دستگاه معادله خطی (۱) را در نظر بگیرید.

$$y = Ax \quad (1)$$

به دلیل اینکه ماتریس دیکشنری فراکامل است دستگاه معادله خطی در پیدا کردن y نامعین است و دارای بی‌شمار جواب خواهد بود. به طور کلی الگوریتم‌های که برای یافتن x با مشاهده y و A بکار می‌روند، الگوریتم‌های بازیابی تُنک گفته می‌شود که در بخش بعدی بطور کامل شرح داده می‌شوند. از آنجایی که به دنبال تُنک ترین پاسخ برای معادله (۱) هستیم، می‌توانیم مسئله را به فرم یک مسئله بهینه‌سازی به فرم (۲) بیان کنیم.

$$P_0: \min_x \|x\|_0 \quad s. t \quad y = Ax \quad (2)$$

که در آن $\|x\|_0$ معرف تعداد درایه‌های غیر صفر بردار x است و به طور کلی مسئله بالا به معنی یافتن بردار x است که دارای کمترین مؤلفه غیر صفر باشد و یا به عبارت دیگر تُنک ترین x ممکن بدست آید.

الگوریتم‌های بازبایی تُنک مبتنی بر نرم صفر هموار شده در مقایسه با روش‌های مبتنی بر حداقل کردن نرم صفر یا نرم یک، علاوه بر سرعت بیشتر دارای ویژگی‌های مطلوبی از قبیل پیوستگی، مشتق پذیری، سادگی و رفتار عددی مناسب می‌باشند که در بخش دوم شرح داده می‌شود. در این مقاله بر اساس نرم صفر هموار شده روش کارآمدی برای حل (۲) پیشنهاد می‌شود که ویژگی‌های آن به شرح زیر است:

- (۱) خواص همگرایی سراسری مطلوبی دارد.
 - (۲) از رویکرد جدیدی برای حل زیرمسائل درجه دوم بهره می‌برد.
 - (۳) کاهش پیچیدگی محاسباتی مساله را در پی دارد.
 - (۴) مساله را در حضور نویز حل می‌کند که بر اساس آن نتایج عددی مطلوبی را به همراه دارد.
- ساختار کلی مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲ چهار الگوریتم پر کاربرد در حل نمایش تُنک بررسی می‌شود. روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و روش پیشنهادی در بخش ۳ آورده شده است. بخش ۴ نتایج عددی مقاله و مقایسه روش پیشنهادی با سایر الگوریتم‌های شناخته شده در زمینه بازبایی سیگنال‌های تُنک را در قالب سه آزمایش نشان می‌دهد و در نهایت نتیجه گیری در بخش ۵ آورده شده است.

۱. الگوریتم‌های حل نمایش تنک

چالش اصلی در یافتن ضرایب تنک، حل دستگاه معادلات خطی است که برای بازسازی نمایش تنک جهت حل این دستگاه‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد. گروهی از آن‌ها، روش‌های حریصانه نام دارند که در آن، بصورت قدم به قدم یک یا چند اتم که بیشترین همبستگی با باقیمانده مربوط به نمایش سیگنال دارند انتخاب و با استفاده از آن‌ها، این باقیمانده را بروز می‌کنند. اساس این روش‌ها مبتنی بر تخمین مرحله به مرحله سیگنال با استفاده از اتم‌های دیکشنری است. به طور کلی این روش‌ها نسبت به سایر الگوریتم‌های نمایش تنک، سریع تر می‌باشند. گروه دیگری از روش‌های بازسازی نمایش تنک، روش‌های رهاسازی مبتنی بر بهینه‌سازی نامیده می‌شوند.

هدف استفاده از روش‌های بازسازی نمایش تنک و یافتن تُنک ترین پاسخ ممکن برای دستگاه معادلات خطی (۱) می‌باشد، لذا می‌توان مسئله به فرم مسئله بهینه‌سازی (۲) در نظر گرفته شود. اگر در معادله (۲) میزان تُنک بودن را به صورت یک قید یا محدودیت به مسئله اضافه کنیم آنگاه مسئله به فرم (۳) درمی‌آید:

$$\min_x \|y - Ax\|_0 \quad s. t \quad \|x\|_0 \leq k \quad (3)$$

درواقع در اینجا هدف از حل مسئله، کم کردن خطای حاصل از سیگنال بازسازی شده با نمایش تُنک و سیگنال اولیه است. به خاطر اینکه حل مسئله P_0 در حالت کلی غیرممکن است ناگزیر باید مسئله را به فرم معادله (۳) حل کنیم و چون خطا و نویز بازسازی اجتناب ناپذیر است در این حالت بردار X به صورت تخمینی بیان شده و معادله اولیه (۱) به فرم معادله (۴)

درمی‌آید.

$$y = Ax + z \quad (۴)$$

در این معادله $Z \in \mathbb{R}^m$ نویز نمایش نامیده می‌شود و دارای قید $\|z\|_2 \leq \varepsilon$ است. با حضور نویز پاسخ‌های تُنک مسئله (۴) را می‌توان به صورت تقریبی با حل مسئله بهینه‌سازی (۵) به دست آورد.

$$P_0^\varepsilon: \min_x \|x\|_0 \quad s. t \quad \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon \quad (۵)$$

هر چند روش حل مسائل بهینه‌سازی تعریف شده در بالا با استفاده از نُرم صفر می‌تواند از روش‌های یافتن پاسخ تُنک با استفاده از ماتریس به دست آید ولی همچنان پاسخ مسئله غیرقطعی و به طور کلی مستلزم حل یک مسئله NP-HARD است. در [۱] نشان داده شده است که پاسخ مسئله نُرم صفر را می‌توان با استفاده از نُرم یک نیز به دست آورد که به مسئله بهینه‌سازی آن P_0 گفته می‌شود. در بسیاری از مسائل کاربردی پاسخ مسائل P_0 و P_1 معادل هستند و مسئله P_1 می‌تواند تقریب قابل قبولی برای یافتن نمایش تُنک سیگنال باشد که بصورت (۶) تعریف می‌گردد.

$$P_1: \min_x \|x\|_1 \quad s. t \quad y = Ax \quad (۶)$$

اغلب ساختارهای مشهور نمایش تُنک بر مبنای نُرم یک بر اساس مسئله بهینه‌سازی (۷) حل می‌شوند:

$$P_1^\varepsilon: \min_x \|x\|_1 \quad s. t \quad \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon \quad (۷)$$

یکی دیگر از نرم‌هایی که توسط آن پاسخ تُنک را به دست می‌آورند نرم دو است. پاسخ‌های به دست آمده توسط این نرم دارای دقت زیادی نبوده و ممکن است که به اندازه کافی تُنک نباشند.

در این بخش، چهار الگوریتم پرکاربرد در حل نمایش تُنک به صورت مختصر بیان می‌شوند.

۱.۱ الگوریتم جست‌وجوی پایه: یکی از معروف‌ترین ابزارها برای یافتن پاسخ تُنک، الگوریتم جست‌وجوی پایه

^۱ است که در آن به جای نرم صفر، از حداقل کردن نرم یک، مطابق معادله (۶)، استفاده می‌شود [۲]. مسئله بهینه‌سازی (۶) به راحتی قابل تبدیل به یک مسئله خطی است. به همین دلیل با روش‌های مختلفی که برای مسائل خطی پیشنهاد شده قابل حل است. ثابت شده که اگر تعداد عناصر مخالف صفر در پاسخ تُنک از حدی که به همبستگی میان اتم‌ها (ستون‌های) دیکشنری A وابسته است کم‌تر باشد، پاسخ رابطه (۶) دقیقاً برابر با پاسخ تُنک با حداقل‌سازی نرم صفر است.

۲.۱ الگوریتم جست‌وجوی تطابقی: یکی از مهم‌ترین ایرادهای الگوریتم جست‌وجوی پایه زمان مورد نیاز آن است

¹ Basis Pursuit

که معمولاً با زیاد شدن ابعاد مسئله مشکل‌ساز می‌شود. یکی از سریع‌ترین روش‌ها برای تخمین پاسخ تُنک، الگوریتم جستجوی تطابق^۱ نام دارد [۳]. این روش ابتدا توسط ژانگ و ملت مطرح شد. ذات این روش حریصانه است و تلاش می‌کند تا در هر گام تنها ضریب یکی از اتم‌ها را مشخص کند. منظور از اتم‌ها ستون‌های ماتریس دیکشنری است. به عبارت دیگر، در گام اول اتمی که بیش‌ترین مشابهت با سیگنال آزمون را دارد، انتخاب و ضریب آن محاسبه می‌شود. در گام بعد، باقی‌مانده سیگنال آزمون و اتم اول با بقیه اتم‌ها مقایسه و مجدداً مشابه‌ترین اتم انتخاب می‌شود. به همین ترتیب در هر گام ضریب یکی از اتم‌ها تعیین می‌شود تا جایی که خطای بازنمایی سیگنال آزمون از حدی کم‌تر شود یا آنکه تعداد مشخصی از اتم‌ها دارای ضریب مخالف صفر شوند. این الگوریتم به سبب آنکه در هر گام به یک جستجوی ساده نیاز دارد، معمولاً بسیار سریع است. اما به دلیل حریص بودن تضمینی وجود ندارد که پاسخ نهایی مشابه با پاسخ تُنک باشد و به جواب بهینه همگرا شود.

۳.۱ الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد:

به منظور بهبود الگوریتم جستجوی تطابقی با حفظ سرعت بالای آن، الگوریتم‌های متنوعی پیشنهاد شده که معروف‌ترین آن الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد^۲ نام دارد [۴]. در روش جستجوی تطابقی متعامد در هر مرحله ضرایب ستون‌های فعال از ماتریس دیکشنری به صورت مستقل از نتایج مراحل قبل انتخاب می‌شوند و از نتایج قبلی تنها در یافتن مکان مؤلفه‌های غیرصفر استفاده می‌شود. یعنی در هر مرحله بعد از مشخص شدن اتم جدید، از تمام ضرایب قبلی صرف نظر شده و ترکیبی خطی از تمام اتم‌های انتخاب شده تا این مرحله، محاسبه می‌شود که کمترین خطا را برای بازسازی سیگنال آزمون داشته باشد. در واقع در این الگوریتم بر خلاف الگوریتم جستجوی تطابقی برای بروز نمایش تُنک، سیگنال روی زیر فضای تولید شده توسط اتم‌های انتخاب شده تا آن مرحله، تصویر می‌شود.

۴.۱ الگوریتم نرم صفر هموارشده:

یکی دیگر از الگوریتم‌های مناسب برای یافتن پاسخ تُنک، نرم صفر هموارشده^۳ نام دارد که توسط بابایی‌زاده معرفی شده است [۵]. در این روش تلاش بر آن است تا از حداقل کردن خود نرم صفر استفاده شود. ایرادی که برای حداقل کردن نرم صفر وجود دارد آن است که تابع نرم صفر پیوسته نیست. به همین دلیل، پیشنهاد شده تا به جای نرم صفر از تابع همواری استفاده شود که تقریبی از نرم صفر را نتیجه می‌دهد. نرم صفر بردار $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ تعداد مؤلفه‌های غیرصفر این بردار است. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم:

$$V(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i \neq 0 \\ 0 & x_i = 0 \end{cases}$$

¹ Matching Pursuit

² Orthogonal Matching Pursuit

³ Smoothed L0 norm

آنگاه نرم صفر x برابر با $\|x\|_0 = \sum_i^n V(x_i)$ است، لذا ناپیوستگی نرم صفر معلول ناپیوستگی تابع $V(x)$ است. اگر این تابع با تابعی هموار جایگزین شود، آن‌گاه تخمین هموار نرم صفر به دست می‌آید. توابع گوناگونی برای این منظور می‌توان استفاده نمود که مناسب‌ترین انتخاب، قرینه تابع گوسی با میانگین صفر است. در این صورت داریم:

$$f_\sigma(x_i) = \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)$$

به وضوح مشخص است که اگر σ خیلی کوچک باشد، آنگاه:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i = 0 \\ 0 & x_i \neq 0 \end{cases}$$

در نتیجه $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x) = 1 - V(x)$. بنابراین، اگر فرض کنیم $F_\sigma(x) = \sum_j^n f_\sigma(x_j)$ داریم:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(x) = \sum_{j=1}^n (1 - V(x_j)) = 1 - \|x\|_0$$

آنگاه $n - F_\sigma(x)$ می‌تواند تخمین نرم صفر x باشد، یعنی:

$$\|x\|_0 \approx n - F_\sigma(x)$$

از آنجا که این تابع جدید هموار است به سادگی می‌توان آن را بهینه‌سازی نمود. اگر σ را در رابطه (۸) به سمت صفر میل دهیم، تقریب به تساوی تبدیل می‌شود. بنابراین بیشینه کردن تابع $F_\sigma(x)$ برای σ کوچک معادل با حداقل کردن نرم صفر است. نکته مهم در استفاده از نرم صفر هموار شده، پارامتر هموارسازی σ است. تابع به ازای مقادیر کوچک σ تخمین مناسب تری ارائه می‌کند ولی به شدت ناهموار و دارای تعداد زیادی بیشینه محلی خواهد بود. از طرفی به ازای مقادیر بزرگتر σ تابع هموارتر و دارای تعداد کمتری بیشینه محلی خواهد بود، لذا برای جلوگیری از به تله افتادن الگوریتم در بیشینه محلی، دنباله کاهشی از σ را انتخاب و در هر مرحله بیشینه تابع $F_\sigma(x)$ را می‌یابند.

۲. مروری بر روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و روش پیشنهادی

روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی^۱ یک روش شناخته شده و کارا برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی، غیرمحدب و هموار است. این روش اولین بار توسط ویلسون در سال ۱۹۶۳ پیشنهاد و در ادامه توسط هان و پاول رایج شد. رویکرد این روش بدین صورت است که در هر تکرار، برای محاسبه جهت جدید d مسئله بهینه‌سازی درجه دوم حل می‌گردد و در آن از تقریب درجه دوم تابع هدف و تقریب خطی درجه اول قیود مسئله اصلی استفاده می‌شود. سرعت همگرایی زبرخطی و نتایج همگرایی قوی آن، محققان زیادی را به تحقیقات گسترده در این زمینه سوق داده است [۸-۶]. مسئله بهینه‌سازی مقید (۹) را در نظر بگیرید:

¹ Sequential Quadratic Programming

$$P \begin{cases} \min_x & f_\sigma(x) = -\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \\ \text{s. t.} & c(x) = y - Ax \end{cases} \quad (9)$$

برای محاسبه جهت جدید d زیر مسئله ناحیه اعتماد درجه دوم (۱۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$QP(x, \rho) \begin{cases} \min_d & q(d) := g^t d + \frac{1}{2} d^t H d \\ \text{s. t.} & c + \nabla c^t d = 0 \\ & \|d\|_2 \leq \rho \end{cases} \quad (10)$$

که در آن شعاع ناحیه اعتماد، g گرادیان تابع هدف و H هسین تابع می‌باشد. بصورت دقیق‌تر داریم:

$$g_i = \frac{2x_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \quad (11)$$

$$H = \text{Diag}\left(\left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right) \quad (12)$$

که در آن $\text{Diag}(\omega_i)$ ماتریس قطری با عناصر ω_i می‌باشد. نمادهای Δq به عنوان کاهش پیش بینی شده و Δf به عنوان کاهش واقعی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\Delta q := q(0) - q(d) = -g^t d - \frac{1}{2} d^t H d \quad (13)$$

$$\Delta f := f(x) - f(x + d) \quad (14)$$

رابطه (۱۵)، شرط کاهش کافی در تابع هدف نامیده می‌شود که در آن $\alpha \in (0,1)$ است.

$$\Delta f \geq \alpha \Delta q \quad (15)$$

در این مقاله روشی جدید و کارا برای بازیابی سیگنال‌های تُنک نویزدار پیشنهاد می‌گردد. در روش پیشنهادی برای حل مسئله بهینه‌سازی، بجای نرم صفر از نرم صفر هموار شده استفاده می‌کنیم و بجای حل مسئله ناهموار (۲) تقریب همواری از آن به فرم (۹) لحاظ می‌شود. زمانی که مسئله در معرض نویز باشد، بجای مسئله (۹)، مسئله (۱۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$P \begin{cases} \min_x & f_\sigma(x) = -\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \\ \text{s. t.} & z = y - Ax \\ & \|z\|_2 \leq \varepsilon \end{cases} \quad (16)$$

ابتکار روش پیشنهادی در این است که مسئله (۱۶) به یک مسئله بهینه‌سازی با قیود برابری تبدیل می‌شود و لذا قید نابرابری $\|z\|_2 \leq \varepsilon$ حذف و شرط جدید $\frac{\gamma}{2} \|z\|_2^2$ به تابع هدف اضافه می‌گردد که در آن γ پارامتر هموارسازی می‌باشد.

بنابراین مسئله به فرم (۱۷) تبدیل می‌شود:

$$P \begin{cases} \min_x & f_\sigma(x) + \frac{\gamma}{2} \|z\|_2^2 \\ \text{s.t.} & c(x) = y - Ax - Iz = 0 \end{cases} \quad (17)$$

در اینجا، تخمین نویز مستقیماً با استفاده از یک عبارت منظم‌سازی به مسئله بهینه‌سازی اضافه می‌شود. در نهایت، زیر مسئله درجه دوم (۱۸) را به دست می‌آوریم:

$$QP(x, \rho) \begin{cases} \min_d & g^t d + \frac{1}{2} d^t H d \\ \text{s.t.} & Ad = 0, \\ & \|d\|_2 \leq \rho, \end{cases} \quad (18)$$

جایی که g و H در (۱۱) و (۱۲) تعریف شده‌اند. حال مجدد در زیر مسئله (۱۸) با در نظر گرفتن پارامتر جریمه $\frac{\bar{\lambda}}{2}$ قید نابرابری $\|d\|_2 \leq \rho$ به تابع هدف منتقل می‌گردد و در نتیجه رویکرد جدیدی برای حل زیر مسائل در زمان کمتر براساس تخمین جواب دقیق تر و با سرعت همگرایی بالاتر فراهم می‌آید. بدین منظور زیر مسئله (۱۸) بصورت فرم (۱۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$QP(x, \rho) \begin{cases} \min_d & g^t d + \frac{1}{2} d^t H d + \frac{\bar{\lambda}}{2} d^t d \\ & Ad = 0 \end{cases} \quad (19)$$

لم ۲.۱. مسئله (۱۹) را در نظر بگیرید که در آن پارامتر جریمه و اسکالر مثبت دلخواهی می‌باشد، آنگاه جواب مسئله برابر $d^* = -\mathcal{H}^{-1}(A^t \Lambda^* + g)$ است که در آن $\Lambda^* = (-A\mathcal{H}^{-1}A^t)^{-1}(A\mathcal{H}^{-1}g)$ می‌باشد. علاوه بر آن $\mathcal{H} = H + \bar{\lambda}I$ است و $0 < \rho_1 \leq \rho$ وجود دارد بطوری که d^* جواب بهینه مسئله (۱۸) است اگر رابطه زیر برقرار باشد که در آن M کران بالایی برای Λ^* می‌باشد.

$$\gamma \geq \frac{\|A\|M + \|g\|}{\rho_1} - \max_{i=1, \dots, n} \left| \left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4} \right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \right|$$

اثبات. ابتدا تابع لاگرانژین مسئله (۱۹) را که بصورت $\mathcal{L} = \frac{1}{2} d^t \mathcal{H} d + g^t d + \Lambda^t Ad$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم، حال بر اساس شرایط KKT^۱ داریم:

$$\mathcal{H} d + g + A^t \Lambda = 0 \quad (20)$$

$$Ad = 0 \quad (21)$$

با استفاده از (۲۰) داریم:

¹ Karush-Kuhn-Tucker

$$d^* = -\mathcal{H}^{-1}(A^t \Lambda^* + g) \quad (22)$$

حال با استفاده از (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$0 = Ad = -A\mathcal{H}^{-1}(A^t \Lambda^* + g) \quad (23)$$

با بکارگیری (۲۳) مقدار Λ^* محاسبه می‌گردد و در نتیجه:

$$\Lambda^* = (-A\mathcal{H}^{-1}A^t)^{-1}A\mathcal{H}^{-1}g \quad (24)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که برای هر $\gamma \geq 0$ ، $\|\Lambda^*\|$ کراندار است. در ابتدا از رابطه (۲۴) داریم:

$$(-A\mathcal{H}^{-1}A^t)\Lambda^* = A\mathcal{H}^{-1}g \quad (25)$$

با تقسیم رابطه (۲۵) بر $\|\mathcal{H}^{-1}\|$ داریم:

$$\frac{-A\mathcal{H}^{-1}A^t\Lambda^*}{\|\mathcal{H}^{-1}\|} = A \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|} g \quad (26)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}^{-1}\|} = I \quad (27)$$

با حد گرفتن از دو طرف رابطه (۲۶) و بکارگیری (۲۷) داریم:

$$-AA^t\Lambda^* = Ag \quad (28)$$

و از (۲۸) نتیجه می‌گیریم:

$$\Lambda^* = (-AA^t)^{-1}Ag \quad (29)$$

به عنوان یک نتیجه از همگرایی، $M > 0$ وجود دارد بطوری که برای هر $\gamma \geq 0$ ، $\|\Lambda^*\| \leq M$ می‌باشد. لذا

$$\|d^*\| \leq \frac{\|A^t\Lambda^* + g\|}{\|\mathcal{H}\|} \leq \frac{\|A\|M + \|g\|}{\|\mathcal{H}\|}$$

جایی که:

$$\|\mathcal{H}\| = \gamma + \max_{i=1, \dots, n} \left| \left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4} \right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \right|$$

بوضوح مشخص است اگر

$$\frac{\|A\|M + \|g\|}{\rho} - \max_{i=1, \dots, n} \left| \left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4} \right) \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \right| \leq \gamma$$

آنگاه $\|d^*\| \leq \rho$ خواهد بود، از طرف دیگر با فرض $\rho_1 = \|d^*\|$ ، تابع لاگرانژی (۱۸) به فرم (۳۰) تبدیل می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} d^t \mathcal{H} d + g^t d + \Lambda^t A d + \mu(d^t d - \rho_1^2) \quad (30)$$

و لذا شرایط KKT آن بصورت زیر می‌باشند:

$$\mathcal{H}d + g + A^t \Lambda + \mu d = 0, Ad = 0, \|d\|_2 \leq \rho_1, \mu(d^t d - \rho_1^2) = 0$$

بوضوح مشخص است این شرایط برای $d = d^*$, $\Lambda = \Lambda^*$, $\mu = 0$ برآورده می‌شوند. ■

الگوریتم ۱: جواب زیر مسئله درجه دوم $SS(A, g, H, \rho)$	
A, g, H, ρ	ورودی:
λ_0	پارامتر:
$\bar{\lambda} = \lambda_0$	مقدار دهی اولیه:
	تکرار مراحل ۱ تا ۴ تا اینکه $\ d\ _2 \leq \rho$ برقرار شود:
1: $\mathcal{H} = H + \bar{\lambda}I$ 2: $\Lambda = (-A\mathcal{H}^{-1}A^t)^{-1}(A\mathcal{H}^{-1}g)$ 3: $d = -\mathcal{H}^{-1}(A^t\Lambda + g)$ 4: $\bar{\lambda} \leftarrow \bar{\lambda} \times 1.2$	
d	خروجی:

الگوریتم ۲ جزئیات روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. حلقه بیرونی با هر مقدار اولیه $\sigma \geq \sigma_0$ که در آن σ_0 یک ثابت مثبت دلخواه است، مقدار دهی اولیه می‌شود. سپس، دنباله کاهشی از مقادیر σ تا زمانی که به آستانه σ_{min} برسند، ایجاد می‌شود. (این پارامتر دقت تقریب‌های تُرم صفر را کنترل می‌کند). طول گام d توسط الگوریتم ۱ در طول تکرارها محاسبه می‌شود. مشخص است که انتخاب دقیق پارامتر γ در (۱۷) می‌تواند ایجاد قید $\|z\|_2 \leq \mathcal{E}$ را تضمین کند. از آنجایی که این قید باید فقط در تکرارهای نهایی ایجاد شود، از مقدار کمی شروع و به تدریج در طول تکرارها آن را افزایش می‌دهیم. به این ترتیب، روش را مجبور می‌کنیم در تکرار اولیه الگوریتم تابع هدف را بیشتر از نقض قیود کاهش دهد.

الگوریتم ۲: روش پیشنهادی (RMSQP)	
$y, \mathcal{E}, A, A^\dagger = A^t(AA^t)^{-1}$	ورودی:
$\gamma, c, \alpha, \sigma_{min}$	پارامترها:
$x = A^\dagger y, \sigma = 3 \times \max x $	مقدار دهی اولیه:
while $\sigma > \sigma_{min}$ محاسبه مقادیر g, H با کمک روابط (۱۱) و (۱۲) و $d = SS(A, g, H, \rho)$ الگوریتم ۱ if $d = 0$ خاتمه الگوریتم end if محاسبه مقادیر $\Delta q, \Delta f$ با کمک روابط (۱۳) و (۱۴) if $\Delta f < \alpha \Delta q$ then $\rho \leftarrow \rho/2$ else if $x \leftarrow x + d$ end if $\sigma \leftarrow c \cdot \sigma$ end while x	
	خروجی:

در این بخش تحلیل همگرایی روش پیشنهادی ارائه می‌شود. اثبات همگرایی روش مبتنی بر نتایج بدست آمده توسط فلچر و همکاران [۹] است و در این خصوص مفروضات استاندارد زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱. تمام نقاطی که توسط الگوریتم تولید می‌شوند در ناحیه بسته و کراندار غیرتهی X قرار دارند.
 ۲. توابع $f_\sigma(x)$ و $c(x)$ در مجموعه باز شامل X دوبار مشتق پذیر پیوسته هستند.
 ۳. یک $M > 0$ وجود دارد به طوری که ماتریس هسین H در رابطه $\|H\|_2 \leq M$ صدق می‌کند.
- یک نتیجه از فرضیات استاندارد این است که ماتریس‌های هسین $f_\sigma(x)$ و $c(x)$ روی X کراندار هستند و طبق فرض ۲، روابط $\| \nabla^2 c(x) \|_2 \leq M$ و $\| \nabla^2 f_\sigma(x) \|_2 \leq M$ برای هر $x \in X$ برقرار است.

همگرایی سراسری روش پیشنهادی، با توجه به شرط KKT، تحت شرایط قیدی MF^۱ ثابت می‌شود. نقطه موجه x_0 در شرایط قیدی MF صدق می‌کند اگر و تنها اگر:

- بردارهای $\nabla c_i(x_0)$ برای هر $i \in \mathcal{E}$ مستقل خطی هستند، که در آن مجموعه \mathcal{E} و \mathcal{I} به ترتیب شامل مجموعه اندیس برای قیود برابری و نابرابری می‌باشند.
- بردار S وجود دارد بطوری که

$$\begin{aligned} s^t \nabla c_i(x_0) &= 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ s^t \nabla c_i(x_0) &< 0, \quad i \in \mathcal{A}_0 \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{A}_0 = \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x_0) = 0\}$ یعنی $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{I}$ شامل قیدهایی نابرابری که در x_0 فعال هستند. شرط لازم برای اینکه نقطه x_0 مسئله را حل کند این است که اولاً شدنی باشد و ثانیاً علاوه بر برقراری شرایط قیدی MF مجموعه $\{s \mid s^t g(x_0) < 0 \text{ و } s^t \nabla c_i(x_0) = 0, i \in \mathcal{E} \text{ و } s^t \nabla c_i(x_0) < 0, i \in \mathcal{A}_0\}$ تهی باشد.

قضیه ۲.۱. اگر مفروضات استاندارد برقرار باشد، آنگاه با فرض ثابت بودن σ یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

- (الف) یک نقطه KKT برای مسئله (۹) بدست می‌آید. یعنی $d = 0$ زیر مسئله QP(x, ρ) را حل می‌کند.
- (ب) یک نقطه y تجمعی برای دنباله $\{x_k\}$ بدست می‌آید که موجه است. این نقطه KKT است و یا در شرایط قیدی MF صدق نمی‌کند.

اثبات: حالت (الف) بوضوح برقرار است. لذا فقط حالت (ب) را اثبات می‌کنیم. ابتدا تقریب سری تیلور تابع $f_\sigma(x)$ را بصورت

$$f_\sigma(x_k + d) = f_\sigma(x_k) + g_k^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(y) d$$

در نظر می‌گیریم که در آن y نقطه ای روی پاره خط x_k تا $x_k + d$ می‌باشد. از (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$\Delta f_\sigma = -g_k^t d - \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(y) d \tag{۳۱}$$

مقدار $\frac{1}{2} d^t H d$ را به عبارت (۳۱) اضافه و کم می‌کنیم:

¹ Mangasarian-Fromovitz

$$\Delta f_{\sigma} = -g_k^t d - \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(y) d + \frac{1}{2} d^t H d - \frac{1}{2} d^t H d \quad (32)$$

$$\Delta f_{\sigma} = \Delta q - \frac{1}{2} d^t (\nabla^2 f(y) - H) d$$

بر اساس $\|d\|_2 \leq \rho$, $\|H\|_2 \leq M$, $\|\nabla^2 f(y)\|_2 \leq M$ داریم:

$$\begin{aligned} d^t (\nabla^2 f(y) - H) d &\leq \|d\|_2 \|\nabla^2 f(y) - H\|_2 \|d\|_2 \\ &\leq \|d\|_2^2 (\|\nabla^2 f(y)\|_2 + \|H\|_2) \\ &\leq 2M\rho^2 \end{aligned} \quad (33)$$

در نتیجه با بکارگیری روابط (۳۲) و (۳۳) داریم:

$$\Delta f_{\sigma} \geq \Delta q - M\rho^2 \quad (34)$$

اکنون بر اساس برهان خلف فرض می‌کنیم که یک نقطه تجمع x^{∞} وجود دارد که شرایط قیدی MF را برآورده اما در شرایط KKT صدق نمی‌کند.

بر اساس لم ۵ از فلچر و همکاران [۹]، همسایگی \mathcal{N}^{∞} از x^{∞} و ثابت‌های مثبت κ, ε وجود دارند، به گونه‌ای که برای همه $x \in \mathcal{N}^{\infty} \cap X$ و $0 \leq \rho \leq \kappa$ زیرمسئله درجه دوم $QP(x, \rho)$ جواب شدنی d دارد که:

$$\Delta q \geq \frac{1}{3} \rho \varepsilon > 0 \quad (35)$$

حال با تقسیم عبارت (۳۴) بر Δq و بکارگیری رابطه (۳۵) داریم:

$$\frac{\Delta f_{\sigma}}{\Delta q} \geq 1 - \frac{3\rho M}{\varepsilon}$$

و بطور معادل داریم:

$$\Delta f_{\sigma} \geq \alpha \Delta q, \alpha = 1 - \frac{3\rho M}{\varepsilon}$$

لذا اگر $\rho \leq (1 - \alpha)\varepsilon / (3M)$ باشد، آنگاه $\Delta f_{\sigma} \geq \alpha \Delta q > 0$ و در نتیجه دنباله مقادیر تابع $f_{\sigma}(x_k)$ بطور یکنواخت کاهشی می‌باشد. بنابراین $f_{\sigma}(x_k)$ روی مجموعه X کراندار و در نتیجه دنباله $\sum_{k \geq 1} \Delta f_{\sigma}(x_k)$ همگرا خواهد بود و به وضوح با این حقیقت $\Delta f_{\sigma}(x_k) \geq \alpha \Delta q(x_k) \geq \frac{1}{3} \alpha \rho \varepsilon$ در تناقض می‌باشد، بنابراین x^{∞} یک نقطه KKT بوده و لذا حالت (ب) برقرار است. ■

۳. نتایج عددی

در این بخش عملکرد عددی الگوریتم پیشنهادی و کارایی آن در بازیابی بردارهای تُنک نشان داده می‌شود. ابتدا تاثیر پارامترهای گوناگون بر روی عملکرد روش بررسی و مقادیر اولیه کارآمدی برای آن‌ها پیشنهاد می‌گردد. در ادامه نتایج مقایسه عددی با برخی از الگوریتم‌های شناخته شده گزارش می‌شود.

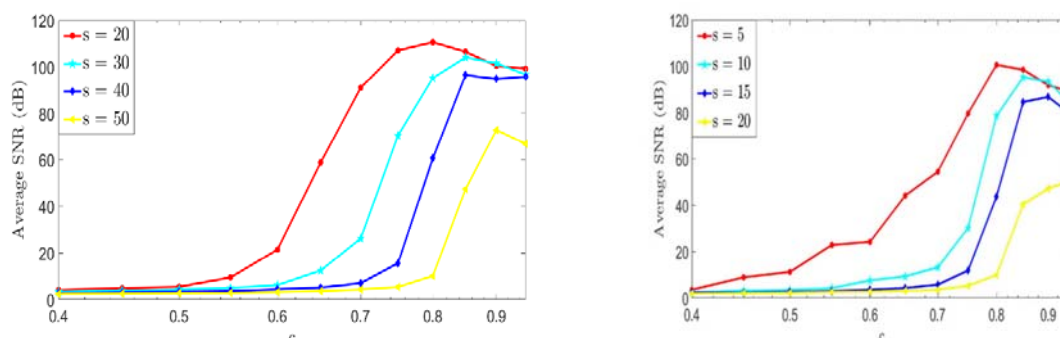
در آزمایش‌های انجام شده، از بردارهای تُنک و ماتریس حسگر A که بطور تصادفی ایجاد شده‌اند استفاده می‌شود و موقعیت مؤلفه‌های غیرصفر از مجموعه $\{1, \dots, n\}$ بصورت تصادفی نمونه برداری می‌گردند که در آن $\|\bar{x}\|_0 = S$ است و در نهایت

$y = A\bar{x}$ در نظر گرفته می‌شود. از طرفی \hat{x} برابر تقریب جواب بازیابی شده توسط الگوریتم‌ها در نظر گرفته شده است. شاخص عملکرد نرخ سیگنال به نویز^۱ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$SNR(\hat{x}, \bar{x}) = 10 \log_{10} \frac{\|\bar{x}\|_2}{\|\bar{x} - \hat{x}\|_2}$$

آزمایش اول: در این آزمایش تأثیر پارامترهای c, α, σ_{min} و Δ_{min} در کارایی روش پیشنهادی بررسی و برای یافتن مقادیر اولیه کارآمد، شاخص SNR مورد استفاده قرار می‌گیرد.

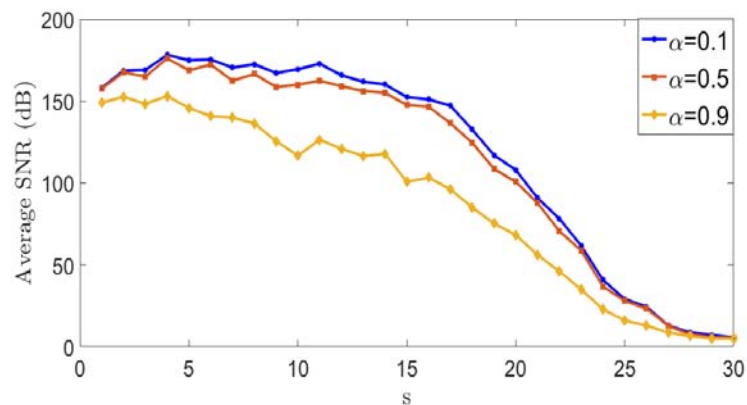
(۱) **تأثیر پارامتر c :** اگر مقدار پارامتر c کم در نظر گرفته شود، احتمال گیر افتادن در جواب‌های موضعی زیاد می‌شود. از طرف دیگر، انتخاب نسبتاً بزرگ برای c باعث هموارسازی بیشتر در تابع SLO می‌شود و احتمال رسیدن به جواب سراسری را بیشتر می‌کند. شکل ۲ میانگین شاخص SNR بعنوان تابعی از c برای ماتریس حسگر در ابعاد 50×150 و 100×200 را نشان می‌دهد. آزمایش ۵۰۰ بار تکرار و برای S های گوناگون مقدار SNR محاسبه شده است. وقتی S کوچک است، همانطور که انتظار می‌رود شاخص همیشه بزرگ است و از سوی دیگر، برای S های به اندازه کافی بزرگ تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. با بررسی نتایج $c = 0.9$ یک مقدار اولیه کارآمد در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲. میانگین SNR روش پیشنهادی برای ماتریس در ابعاد $A_{50 \times 150}$ (سمت راست) و $A_{100 \times 200}$ (سمت چپ).

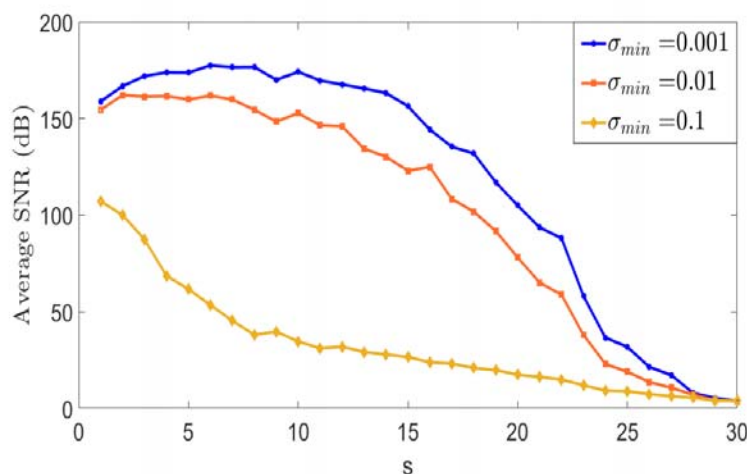
(۲) **تأثیر پارامتر α :** در فرمول (۱۴) که نشان دهنده شرایط کاهش کافی است، پارامتر α بین صفر و یک تغییر می‌کند. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف $\alpha = 0.1$ به عنوان مقدار اولیه کارآمد پیشنهاد می‌شود. آزمایش ۵۰۰ بار تکرار و میانگین نمودار شاخص SNR بر حسب S در شکل ۳ برای مقادیر مختلف α نشان داده شده است.

¹ Signal-to-Noise Ratio



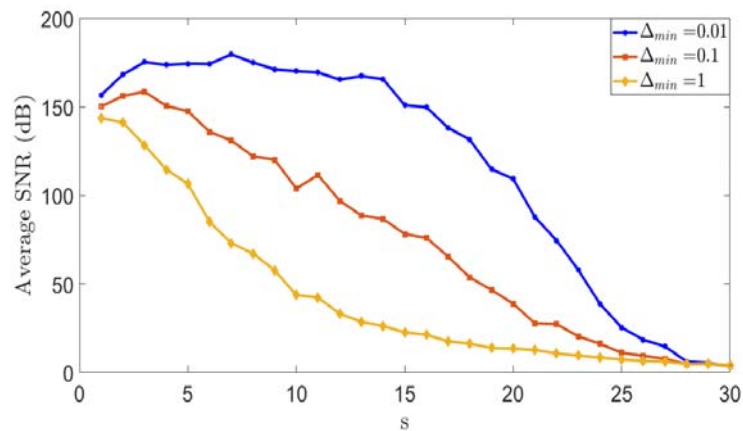
شکل ۳. میانگین شاخص SNR برای مقادیر مختلف α در ماتریس حسگر با ابعاد $A_{50 \times 150}$.

(۳) تاثیر پارامتر σ_{min} : همانطور که در بخش ۲ اشاره شد، σ پارامتر هموارسازی است. هرچه مقدار σ کوچکتر باشد دقت تقریب نرَم صفر بهتر خواهد شد. پس از ۵۰۰ بار تکرار آزمایش، بهترین مقدار برای پارامتر σ_{min} بر اساس نتایج عددی ارائه شده $\sigma_{min} = 10^{-3}$ می‌باشد. در شکل ۴ میانگین نمودار شاخص SNR بر حسب S برای مقادیر مختلف σ_{min} نشان داده شده است.



شکل ۴. میانگین شاخص SNR برای مقادیر مختلف σ_{min} در ماتریس حسگر با ابعاد $A_{50 \times 150}$.

(۴) تاثیر پارامتر Δ_{min} : برای یافتن مقادیر اولیه کارآمد این پارامتر، آزمایش ۵۰۰ بار تکرار و در شکل ۵ میانگین نمودار شاخص SNR بر حسب S گزارش شده است. با بررسی نتایج، مقدار $\Delta_{min} = 10^{-2}$ به عنوان مقدار اولیه کارآمد معرفی می‌شود.



شکل ۵. میانگین شاخص SNR برای مقادیر مختلف Δ_{min} در ماتریس حسگر با ابعاد $A_{50 \times 150}$.

آزمایش دوم: در این آزمایش، ابتدا بصورت مختصر متداول‌ترین الگوریتم‌های بازیابی سیگنال‌های تنک که با روش پیشنهادی مقایسه شده اند معرفی و در ادامه عملکرد عددی و کارایی آن‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

- RMSQP: در روش پیشنهادی با استفاده از الگوریتم ۲ و مجموعه پارامترهای زیر، مسئله حل می‌شود.

$$c = 0.9, \alpha = 0.1, \gamma = 3000, \sigma_{min} = 10^{-3}, \Delta_{min} = 10^{-2}$$
- ILT: مسئله بهینه‌سازی $\min_x \|Ax - y\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \log(|x_i| + \delta)$ را با آستانه توقف 10^{-2} حل می‌کند، که در آن δ ثابت مثبت کوچک و λ پارامتر منظم‌سازی است.
- LP: این روش مسئله بهینه‌سازی $\min_x \|x\|_p \text{ s.t. } y = Ax$ که در آن $0 < p \leq 1$ می‌باشد را حل می‌کند. این روش بر اساس روش تکراری Re-WL1 توسعه یافته و مقدار $p = 0.5$ به عنوان پارامتر کارآمدی معرفی شده است [۱۰].
- RSL0^۳: این روش که در بخش ۲ تشریح شد برای حل مسئله از مجموعه پارامترهای زیر استفاده می‌کند [۱۱].

$$c = 0.9, L = 8, \mu = 2, \sigma_{min} = 10^{-4}$$
- LASSO: این روش مسئله بهینه‌سازی $\min_x \lambda \|x\|_1 + \|Ax - y\|^2$ را حل می‌کند که در آن λ پارامتر منظم‌سازی و Φ تابع چگالی تجمعی می‌باشند [۱۲]. پارامترهای اولیه روش بصورت زیر است.

$$\lambda = 2c\sigma\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right), c = 1.05, \alpha = 0.5$$

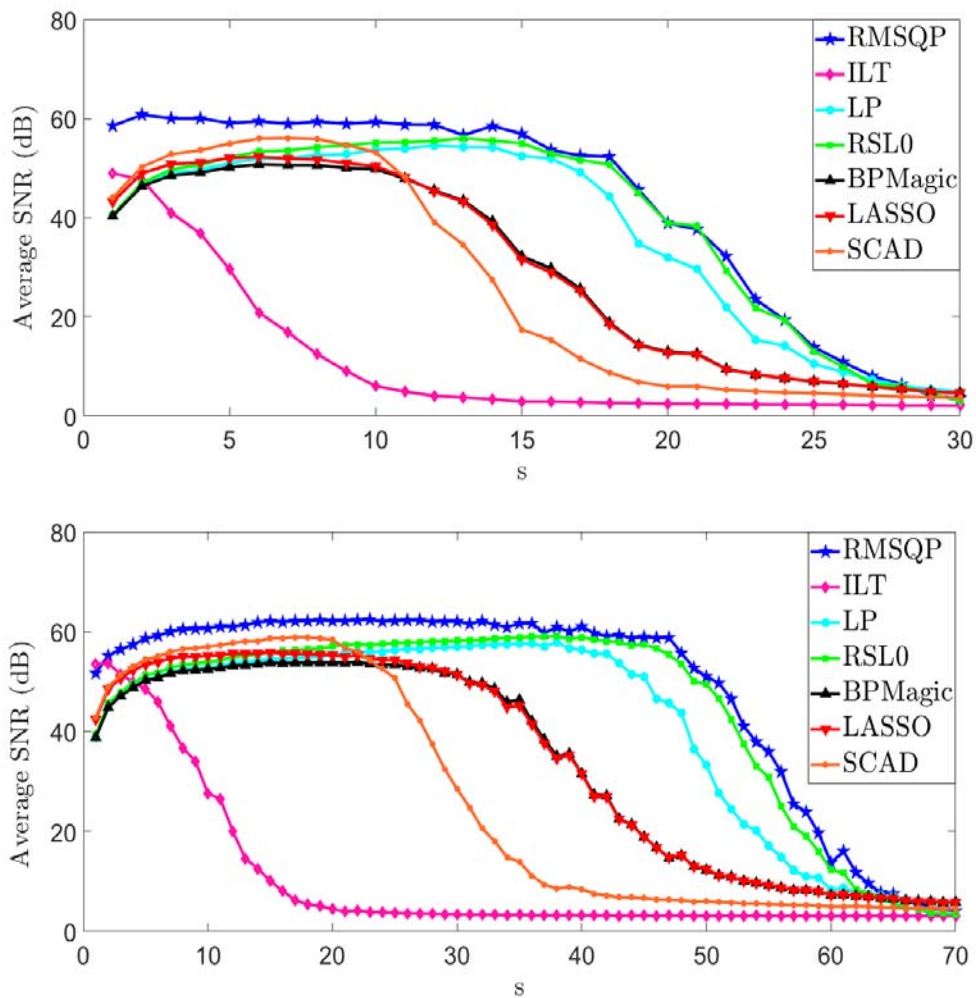
¹ Iterative Log Thresholding

² LP quasi-norm

³ Robust Smoothed ℓ_0 norm

⁴ Least Absolute Shrinkage and Selection Operator

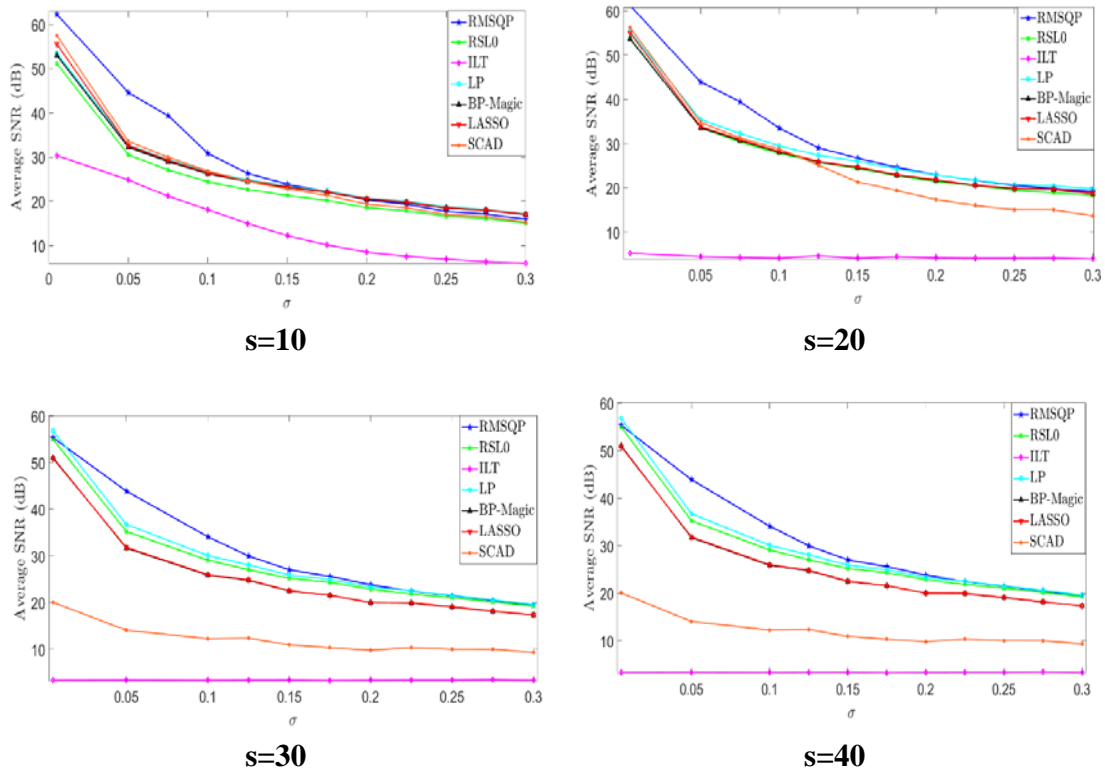
پارامتر مهمی که در خصوص ارائه کارایی روش پیشنهادی وجود دارد، بررسی وضعیت ابعاد ماتریس حسگر A می‌باشد. در این آزمایش نسبت تعداد ستون‌ها به تعداد سطرهای $(\frac{n}{m})$ ماتریس حسگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ در دو حالت مختلف با ابعاد 50×150 ($\frac{n}{m} = 3$) و 100×200 ($\frac{n}{m} = 2$) در نظر گرفته شد و شاخص عملکرد SNR محاسبه و پس از ۵۰۰ بار تکرار، میانگین آن گزارش شد. شکل ۶ نمودار میانگین شاخص SNR بر حسب s در ابعاد 50×150 و 100×200 را با مقدار نویز ثابت $\sigma = 0.05$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقدار شاخص SNR روش پیشنهادی از سایر الگوریتم‌ها بیشتر است و کارایی و عملکرد بهتر روش را نشان می‌دهد.



شکل ۶. مقایسه روش پیشنهادی RMSQP با نویز $\sigma = 0.05$ برای $A_{50 \times 150}$ (تصویر بالا) و $A_{100 \times 200}$ (تصویر پایین).

آزمایش سوم: در این آزمایش، سطح پراکندگی ثابت و به ترتیب برابر با ۱۰، ۲۰، ۳۰ و ۴۰ در نظر می‌گیریم و مقدار نویز از صفر تا $\sigma = 0.3$ تغییر می‌کند. شکل ۷ نمودار SNR بر حسب تغییرات نویز σ را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل

مشخص است، برای چهار حالت مختلف از سطح پراکندگی $S=10,20,30,40$ روش پیشنهادی RMSQP از دقت بهتری نسبت به سایر الگوریتم‌ها برخوردار است.



شکل ۷. مقایسه روش پیشنهادی RMSQP با دامنه تغییرات نویز $0 \leq \sigma \leq 0.3$ برای ماتریس حسگر $A_{100 \times 200}$.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا الگوریتم‌های موجود برای حل مسائل بهینه‌سازی نمایش تُنک سیگنال بررسی شد. در ادامه با بهرمندی از برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و نرم صفر هموارشده روشی جدید و کارا برای بازیابی سیگنال‌های تُنک نویزدار پیشنهاد گردید که همگرایی زبرخطی داشته و نتایج همگرایی سراسری آن در قالب قضیه ۲.۱ به خوبی نشان داده شده است که راه حل دقیقی برای حل زیر مسئله با هزینه کم ارائه می‌کند. نتایج خروجی آزمایش‌های انجام شده بر روی داده‌ها جهت بازیابی سیگنال تُنک نویزدار نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نسبت به سایر الگوریتم‌های معرفی شده در این حوزه، نرخ موفقیت بالاتری داشته و از نظر کارایی بهتر است. در این خصوص آزمایش دوم نشان داد که روش پیشنهادی از شاخص SNR بهتری برخوردار است، یعنی بازیابی در خصوص سیگنال تنک انجام شده نسبت به سایر روش‌ها بسیار بهتر می‌باشد و از طرفی مشخص شد روش به ابعاد ماتریس حسگر وابسته نیست یعنی زمانی که تعداد ستون‌ها نسبت به

تعداد سطرها سه برابر یا دو برابر باشند، تفاوتی در کارایی روش ایجاد نمی‌کند. آزمایش سوم نیز کارایی بسیار بالای روش را در مقایسه با سایر روش‌ها در حضور تغییرات نویز از 0 تا 0.3 نشان داد.

به عنوان پژوهش‌های آینده می‌توان از روش پیشنهادی در مساله بازیابی مسایل تنک غیرمنفی، ماتریس‌های رتبه پایین و بازسازی تصاویر در زمینه‌های پزشکی مانند تصاویر شبکه‌ی چشم یا MRI مغزی بهره‌مند شد. همچنین می‌توان با در نظر گرفتن مساله به صورت چندلایه و حل هرکدام از آن‌ها با کمک پردازش موازی، زمان اجرای روش و پیچیدگی مسایل در ابعاد بزرگ را کمتر ساخت. ایده دیگر برای کارهای آتی استفاده از سایر نرم‌ها بجای نرم صفر هموار شده در تابع هدف می‌باشد، همچنین می‌توان بجای بهره‌مندی از برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی، روش فیلتر را بررسی کرد.

References

1. A. M. Bruckstein, D. L. Donoho, and M. Elad, From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images, *SIAM Rev.*, **51** (2009), 34-81.
2. R. Liu, M. Shu, and C. Chen, ECG Signal Denoising and Reconstruction Based on Basis Pursuit, *Applied Sciences* **11**, 4 (2021).
3. W. Jinming and L. Haifeng, Binary sparse signal recovery with binary matching pursuit, *Inverse Problems.*, **37** (2021), 14-65.
4. C. Xueping Chen, L. Jianzhong and C. Jiandong, A new result on recovery sparse signals using orthogonal matching pursuit, *Statistical Theory and Related Fields*, (2022), 1-7.
5. H. Mohimani, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten, A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed L0 norm, *IEEE Trans. Signal Process.*, **57** (2009), 289-301.
6. M. S. Alamdari, M. Fatemi, A. Ghaffari, A modified sequential quadratic programming method for sparse signal recovery problems, *Signal Processing*, (2023).
7. M. S. Alamdari, M. Fatemi, Presenting a new method to separate fetal heart signals from the mother by using sequential quadratic programming, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **13** (2023), 153-167.
8. M. S. Alamdari, M. Fatemi, A. Ghaffari, The Recovery of Sparse Signals by Sequential Quadratic Programming Approach, *Journal of Operational Research and Its Applications*, **20** (2023), 19-32.
9. R. Fletcher, S. Leyffer, P.L. Toint, On the global convergence of a filter-SQP algorithm, *SIAM J. Optim.* **13** (2002), 44-59.
10. S. Foucart and M. Lai, Sparsest solutions of under-determined linear systems via ℓ_q -minimization for $0 < q \leq 1$, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **26** (2009), 395-407.
11. A. Eftekhari, M. Babaie-Zadeh, C. Jutten, and H. Abrishami Moghaddam, Robust-SL0 for stable sparse representation in noisy settings, in *IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, (2009), 3433-3436.
12. A. Belloni, V. Chernozhukov, and L. Wang, Square-root lasso: pivotal recovery of sparse signals via conic programming, *Biometrika*, **98** (2011), 791-806.
13. M. S. Alamdari, M. Fatemi, Applying weighted smoothed norm in sparse representation classification for face recognition. *Electronic and Cyber Defense*, **11** (2023), 57-65.