آماره‌های همسان و آگاهی‌بخش و کاربردهای آن

مهدی شمس[1]1، غلامرضا حسامیان[2]

[1]نویسنده مسئول، گروه آمار، دانشگاه کاشان

[2]گروه آمار، دانشگاه پیام نور

چکیده: در حالتی که حجم اطلاعات زیاد است، داده‌ها باید به نحوی خلاصه شوند که هیچ اطلاعات ارزشمندی از دست نرفته باشد. برای این منظور از آماره بسنده استفاده می‌شود. در این مقاله با تعریف آماره همسان، روشی برای محاسبه این آماره‌ها ارائه شده است. سپس تحت چند تابع زیان مختلف، آماره‌های آگاهی‌بخش تعریف می‌شوند. برای مشخص کردن دو ویژگی، همسانی و آگاهی‌بخشی از مفهوم بسندگی استفاده می‌شود. در پایان تحت چند تابع زیان مختلف، در حالتی که خطاهای مشاهدات گاوسی و سامانه خطی است، آماره‌های آگاهی‌بخش پیدا می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: آماره همسان، آماره آگاهی‌بخش، سری‌های زمانی.

۱. مقدمه

جستجو برای یافتن آماره بسنده در درجه اول یک مسئله کاهش داده است که منجر به خلاصه کردن داده‌ها در یک آماره به گونه‌ای می‌شود که هیچ اطلاعی راجع به پارامتر مجهول مفقود نشود. یک تابع کنترل بهینه که تنها از طریق آماره بسنده به داده‌ها وابسته است وجود دارد و در عمل، این ویژگی باید برای یک کلاس بزرگ از توابع زیان برقرار باشد. در این مقاله تحلیل‌ها تحت کلاس گسترده‌ای از توابع زیان مورد بررسی قرار خواهد گرفت که از بین این توابع زیان، خواص مشخصی مانند معنی‌داری و وجود مینیمم مورد نیاز خواهد بود.

مسئله کنترل در سامانه‌های تصادفی در تحقیقات زیادی از جمله دُو (۲۰۱۹)، شی و ژانگ (۲۰۲۰) و واسیلینا (۲۰۲۱) مورد بررسی قرار گرفته است. کاربرد نظریه تصمیم برای کنترل سامانه‌های تصادفی توسط فلورنتین (۱۹۶۱) پیشنهاد شده و در تحقیقاتی نظیر زُپولی (۱۹۷۷) و هُو و چو (۱۹۷۲) مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت واضح‌ترین تفاوت با نظریه تصمیم، عدم وجود فضای پارامتر در مسئله کنترل است. به منظور تبدیل مسئله کنترل به یک مسئله نظریه تصمیم استاندارد، از دیدگاه بیز استفاده می‌شود و پارامتر به عنوان یک متغیر تصادفی با یک توزیع پیشین در نظر گرفته می‌شود که از جمله این تحقیقات می‌توان به داسیوس و

---

[1] آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مهدی شمس، mehdishams@kashanu.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10، 93C05، 62Bxx.

زاچوفسکی (۲۰۱۶) اشاره کرد. یکی از مسائل مورد علاقه در این بحث مسئله برآورد است. در این راستا بسندگی در راهبردهای کنترل خطی در ماهاجان و نایار (۲۰۱۵) مورد بررسی قرار گرفته است. در کالمن (۱۹۶۰) مسئله پالایش خطی و پیش‌بینی مورد مطالعه قرار گرفته شده است. یکی از دلایل عدم تمایل محققان در این شاخه این است که ماهیت یک تابع کنترل منجر به سردرگمی خواهد شد. به عنوان مثال، در کار بر روی کنترل فرایند مارکف در فلورنتین (۱۹۶۱)، لازم است نتیجه بگیریم که بردار کنترل باید یک تابع از بردار وضعیت لحظه‌ای باشد، چون در غیر این صورت فرایند دیگر دارای خاصیت مارکف نیست. برای رفع این مشکل از دیدگاه نظریه تصمیم، استفاده از توابع کنترل تصادفی پیشنهاد می‌شود. مسئله کنترل می‌تواند به عنوان یک بازی دو نفره مجموع صفر نیز در نظر گرفته شود که در آن راهبرد تصادفی طبیعت شناخته شده است. با این حال، یک شناخت مقدماتی در مورد این نوع از بازی می‌تواند به طور موثر در مسئله کنترل موثر باشد (کین–لای و همکاران، ۲۰۰۹).

در این مقاله، پس از بخش اول که به مقدمه و اهداف و پیش‌نیازها پرداخته می‌شود، در بخش دوم، مسئله برآورد مورد بحث قرار گرفته است که کاملاً از تابع زیان مستقل است. بعد از تعریف آماره همسان، روشی برای محاسبه آن ارائه شده است. در پایان بخش دوم، حالت گاوسی معرفی شده است، که در آن خطاهای مشاهدات دارای توزیع نرمال بوده و سامانه خطی است. در بخش سوم، دو کلاس از توابع زیان و همچنین آماره آگاهی‌بخش تعریف شده است. این تعریف به تابع زیان اشاره دارد و تقریباً همسان معیاری است که برای آماره بسنده ارائه شده است. اصطلاح آماره بسنده به طور غیرمستقیم برای مشخص کردن دو ویژگی، همسانی و آگاهی‌بخشی استفاده می‌شود. در نهایت نشان داده می‌شود اگر تابع زیان به آخرین مقدار بردار وضعیت بستگی داشته باشد، در این صورت براوردهای برون‌یابی شده از این مولفه‌ها آگاهی‌بخش هستند.

در انتهای بخش اول مفاهیم و اصطلاحات مورد نیاز در مقاله تعریف می‌شود.

هر تابع اندازه‌پذیر از فضای نمونه به اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گویند که برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته به ترتیب تابع جرم احتمال و تابع چگالی تعریف می‌شود. لذا برای متغیر تصادفی پیوسته X، تابع نامنفی f را یک تابع چگالی گویند، هرگاه برای هر دو عدد حقیقی $a<b$ در شرط $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$ صدق کند. در حالت‌هایی که با بیش از یک متغیر تصادفی سروکار داریم، از تابع جرم احتمال توأم و تابع چگالی توأم یاد می‌کنیم. تابع چگالی گاوسی (نرمال) چندمتغیره به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

و توزیع آن را توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس-کواریانس Σ نامند. برای متغیرهای تصادفی پیوسته، تابع چگالی احتمال Y به شرط $X=x$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

که در آن $f_{X,Y}(x,y)$ و $f_X(x)$ را به ترتیب تابع چگالی توأم و حاشیه‌ای (کناری) گویند. دو متغیر تصادفی را مستقل گویند، هرگاه تابع احتمال توأم آن‌ها را بتوان به صورت حاصل‌ضرب توابع حاشیه‌ای آن‌ها نوشت، یا به طور معادل متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند، هرگاه برای هر x و y، $f_{Y|X=x}(y)=f_Y(y)$. امید شرطی Y به شرط $X=x$ نیز به صورت

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y \mid X = x}(y)\, dy$$

تعریف می‌شود (راس، ۲۰۱۸).

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی که با یک اندیس (گسسته یا پیوسته) مشخص شده باشند را فرایند تصادفی نامند. در حالتی که مجموعه اندیس یک فرایند تصادفی پیوسته باشد و مقادیر آینده فرایند با توجه به گذشته و حال، فقط به زمان حال بستگی داشته باشد، آن را فرایند مارکف گویند. به عبارت دیگر فرایند تصادفی $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ با فضای حالت E را فرایند مارکف نسبت به پالایش طبیعی $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ گویند، هرگاه برای اعداد حقیقی و نامنفی t و s و هر $j \in E$، تقریباً همه جا تساوی

$$P\left(X_{s+t} = j \mid \mathcal{F}_s\right) = P\left(X_{s+t} = j \mid X_s\right)$$

برقرار باشد. به عنوان مثال، فرایندهای تصادفی با نموهای مستقل نظیر حرکت براونی و فرایند پواسون، فرایند مارکف هستند. در یک فرایند مارکف همگن $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$، احتمال تغییر وضعیت (انتقال) از حالت $i \in E$ به $j \in E$ در زمان t را به صورت $P_t(i, j) = P(X_{t+h} = j \mid X_h = i)$ تعریف می‌کنند (گیراردین و لیمنیوس، ۲۰۱۸). تحلیل سری‌های زمانی معمولاً به داده‌هایی مرتبط می‌شود که به طور متوالی به هم وابسته‌اند و از این رو این شاخه در پیش‌بینی کاربرد داشته و همچنین ترتیب مشاهدات دارای اهمیت است. به طور خلاصه، یک سری زمانی مجموعه مشاهداتی است که بر حسب زمان مرتب شده باشند (دیستلر و شرر، ۲۰۲۲).

آماره تابعی از نمونه تصادفی است که اطلاعات مربوط به چند متغیر تصادفی را در یك متغیر تصادفی فشرده می‌سازد. آمار بسنده به گونه‌ای داده‌ها را خلاصه و فشرده می‌کند که تمام اطلاعات نمونه پیرامون پارامتر حفظ شده و اطلاعی از دست نرود. آماره T که تابعی از نمونه تصادفی (دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع) $X_1, \ldots, X_n$ است را برای θ بسنده گویند، هرگاه به ازای هر θ، توزیع شرطی $X_1, \ldots, X_n \mid T = t$، برای همه مقادیر t به پارامتر θ بستگی نداشته باشد. خلاصه کردن داده‌ها زمانی مجاز است که اطلاعات در آنها حفظ شود که آن تابع را آماره بسنده مینیمال نامند. در حقیقت آماره بسنده T را بسنده مینیمال نامند، هرگاه تابعی از هر آماره بسنده دیگر باشد. بیشترین فشرده‌سازی توسط آماره کامل انجام می‌شود. آماره S را G–کامل (G یك خانواده از توابع با مقادیر حقیقی است) گویند، هرگاه برای هر تابع $g \in G$، اگر به ازای هر $\theta \in \Theta$، $E_\theta(g(S)) = 0$، آن‌گاه به ازای هر $\theta \in \Theta$، $P_\theta[g(S) = 0] = 1$ (لی‌من و کسلا، ۱۹۹۸).

قاعده تصمیم تابعی اندازه‌پذیر از فضای نمونه به فضای عمل است، به‌طوری‌که به یک مشاهده نمونه تصادفی عملی را نسبت می‌دهد. فضای عمل معین می‌کند که مسئله تصمیم مورد مطالعه یک مسئله برآورد نقطه‌ای و یا فاصله اطمینان و یا آزمون فرض است. برای مثال، در برآورد نقطه‌ای، عمل‌ها، حدس نقاط و در آزمون فرض، دو عمل، پذیرش فرض صفر یا رد آن هستند. همچنین در مسئله برآورد نقطه‌ای، تابع تصمیم همان برآوردگر و در آزمون فرض، تابع تصمیم همان تابع آزمون است. تابع نامنفی $L(\theta, a)$ از فضای حاصل‌ضرب دکارتی فضای پارامتر در فضای عمل به اعداد حقیقی مثبت را تابع زیان می‌نامند که نشان‌دهنده زیان ناشی از اخذ تصمیم a است هنگامی که در حالت واقعی θ باشد (لی‌من و کسلا، ۱۹۹۸). انتخاب تابع زیان بستگی به مسئله مورد نظر دارد و یکی از متداول‌ترین آن‌ها تابع زیان توان دوم خطا است. تابع زیان ملاکی برای ارزیابی یک تصمیم است. رویکرد کلاسیک برای اخذ چنین تصمیمی، مینیمم‌سازی متوسط زیان است که

این متوسط زیان را تابع مخاطره تصمیم $\delta(X)$ می‌نامند و به‌صورت $R\left(\theta,\delta(\boldsymbol{X})\right)=E\left(L\left(\theta,\delta(\boldsymbol{X})\right)\right)$ تعریف می‌شود (لی‌من و کسلا، ۱۹۹۸). در روش‌های کلاسیک پارامتر θ یک مقدار ثابت و نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و یک نمونه تصادفی جمع‌آوری می‌شود تا بر اساس آن در مورد پارامتر تصمیم‌گیری شود. در روش بیزی Θ کمیتی در نظر گرفته می‌شود که خود یک متغیر تصادفی، با مقدار مشاهده شده θ است و تغییرات آن توسط یک توزیع پیشین مشخص می‌شود. این توزیع پیشین بر اساس اعتقادات و تجربیات قبلی آزمایشگر یا اطلاعاتی در مورد توزیع پیشین (مانند گشتاورها) و یا ساختار مشاهدات و... تعیین می‌شود.

۲ آماره‌های همسان

در این بخش آماره همسان تعریف شده و روشی برای محاسبه آن ارائه شده است. در پایان حالت گاوسی معرفی شده که در آن خطاهای مشاهدات دارای توزیع نرمال بوده و سامانه خطی است.

فرض کنید فضای حالت، یک فضای برداری اقلیدسی n-بعدی مثل $\mathcal{X}$ باشد. متغیرهای x_t، یک سری زمانی تصادفی به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{x}_0\left(\mathrm{w}_0\right)=\mathrm{x}_0\\
&\mathrm{x}_{t+1}=\varphi_t\left(\mathrm{x}_t,\mathrm{u}_t,\mathrm{w}_{t+1}\right),\ t=0,\ldots,T\\
&\mathrm{u}_t=\mathrm{u}_t(\mathrm{z}_0,\ldots,\mathrm{z}_t;\mathrm{u}_0,\ldots,\mathrm{u}_{t-1}),\ t=0,\ldots,T\\
&\mathrm{z}_t=\mathrm{z}_t(\mathrm{x}_t,\epsilon_t),\ t=0,\ldots,T
\end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن w_tها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های معلوم هستند که خطاهای مکانیکی نامیده می‌شود، ϵ_tها خطای مشاهدات مستقل با توزیع معلوم، z_t ها مشاهدات و u_tها بردار کنترل هستند. توابع φ_t و z_t معلوم و توابع یا راهبردهای کنترل $\mathrm{u}_t(.)$ در فضای برداری کنترل یعنی $\mathcal{U}_t$ (فضای عمل یا تصمیم) هستند. برای راحتی فرض کنید $\omega=\left(w_0,\ldots,w_{T+1};\epsilon_0,\ldots,\epsilon_T\right)$.

حرف بزرگ $\mathrm{Z}_t=\mathrm{z}_0,\ldots,\mathrm{z}_t$ و $\mathrm{U}_t=\mathrm{u}_0,\ldots,\mathrm{u}_t$ برای نشان دادن به ترتیب مشاهدات و بردارهای کنترل تا جمله t و شامل آن است. یک قاعده کنترل $\{\mathrm{u}\}=\{\mathrm{u}_0(.),\ldots,\mathrm{u}_T(.)\}$ شامل $T+1$ تابع کنترل $\mathrm{u}_t\left(\mathrm{Z}_t,\mathrm{U}_{t-1}\right)$ است که برای تمام مقادیر ممکن $\left(\mathrm{Z}_t,\mathrm{U}_{t-1}\right)$ تعریف می‌شوند. البته این فرض ضروری نیست، چون U_{t-1} به وسیله Z_{t-1} و $\{\mathrm{u}_0(.),\ldots,\mathrm{u}_{t-1}(.)\}$ تعیین شده است. اگر $\mathrm{u}_t(.)$ فقط تابعی از x_t یا z_t باشد، دومین معادله سامانه (۱) یک فرایند مارکف است، ولی در حالت کلی x_t یک فرایند مارکف نیست. ساختار مسئله به وسیله تعریف تابع زیان $L\left(\mathrm{x}_{T+1},\mathrm{u}_0,\ldots,\mathrm{u}_T\right)=\mathrm{L}\left(\mathrm{x}_{T+1},\mathrm{U}_T\right)$ کامل می‌شود. نتیجه اصلی بیان شده در قضیه ۳-۳ به راحتی می‌تواند برای تابع زیان $\sum_{\tau=0}^{T+1}\mathrm{L}_\tau\left(\mathrm{x}_\tau,\mathrm{u}_0,\ldots,\mathrm{u}_{\tau-1}\right)$ گسترش یابد که برای مثال مسئله سوخت محدودشده

$$\mathrm{L}_\tau\left(\mathrm{x}_\tau,\mathrm{u}_0,\ldots,\mathrm{u}_{\tau-1}\right)=\begin{cases}\left|x_\tau\right|^2 & \sum_{s=0}^{\tau-1}\left|\mathrm{u}_s\right|\le c\\ \infty & \sum_{s=0}^{\tau-1}\left|\mathrm{u}_s\right|>c\end{cases} \qquad (۲)$$

را می‌توان در نظر گرفت. این روش برای تابع زیان مربعی تعمیم‌یافته $\sum_{\tau}\sum_{s} x'_{\tau} Q_{\tau s} x_s + \sum_{\tau} u'_{\tau} u_{\tau}$ صادق نیست که در اینجا $Q_{\tau s}$ یک ماتریس $n \times n$ است که برای $\tau \neq s$ ، $Q_{\tau s} \neq 0$. در این حالت توزیع شرطی بردار وضعیت بسنده نیست. در واقع باید قبل از هر نقطه کنترل، همه بردارهای قبلی را مجدداً براورد کنیم. به راحتی می‌توان آماره‌ای که برای این توابع زیان بسنده است را حدس زد. با این حال، از آنجا که این نوع توابع زیان در عمل کاربرد ندارند، محققان علاقه‌ای به بررسی آن‌ها ندارند.

توجه داشته باشید که فضای کنترل محدودشده می‌تواند مانند (۲)، با قرار دادن مقادیر مثبت بینهایت برای تابع زیان بر روی مقادیر کنترل که مجاز نیست، استفاده شود. برای راحتی فرض کنید فضای کنترل برابر است با $\mathcal{U}_{\tau} = \mathcal{U}$ ، $\tau = 0, \ldots, T$.

قاعده کنترل $\{u\}$ برای L بهینه است، هرگاه

$$E\left(L(\omega;\{\hat{u}\})\right) = \inf_{\{u\}} E\left(L\left(\omega;\{u\}\right)\right). \qquad (۳)$$

علامت $L\left(\omega;\{u\}\right)$ نشان می‌دهد که تابع زیان $L\left(x_{T+1}, u_0, \ldots, u_T\right) = L\left(x_{T+1}, U_T\right)$ به صورت یک تابع از ω تبدیل شده و نماد جایگزین آن $L\left(\omega;\{u\}\right) = L(\omega; u_0(.), \ldots, u_T(.))$ است. این نماد به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته و نشان می‌دهد L در واقع یک تابعک وابسته به توابع $u_0(.), \ldots, u_T(.)$ است و به مقادیر محاسبه شده در نقاط مشخص بستگی ندارد و این حقیقت در اصل برنامه‌نویسی پویا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. همچنین در نظریه تصمیم به کمیت $E\left(L(\omega;\{u\})\right)$ تابع مخاطره قاعده کنترل $\{u\}$ گویند و از این رو طبق (۳)، قاعده کنترل $\{u\}$ یک قاده کنترل با کمترین مخاطره است.

توزیع شرطی x_t به شرط Z_t به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$P\left(x_t \in A \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)\right) \qquad (۴)$$

که در آن A یک مجموعه بورل در فضای برداری $\mathcal{X}$ است. توابع کنترل $u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)$ ، باید مشخص باشند، چون در غیر این صورت توزیع x_t و $z_0, \ldots, z_t$ تعریف نخواهد شد. در قضیه ۲-۱، ثابت می‌شود، توزیع شرطی (۴) به قاعده کنترل $\{u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)\}$ تنها از طریق مقدار U_{t-1} در Z_{t-1} بستگی دارد. اگر چه در این روش سومین معادله (۱) تعریف نمی‌شود، ولی قاعده کنترل $u_0(.), \ldots, u_t(.)$ می‌تواند توسط جایگزین کردن به صورت بازگشتی، همیشه به عنوان یک تابع $U_t(Z_t)$ از Z_t نوشته شود.

دومین معادله معادله سامانه (۱) به همراه با توزیع w_{t+1} ، احتمال تغییر وضعیت زیر را تعریف می‌کند:

$$P[x_{t+1} \in A \mid x_t, Z_t; u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)] = P_t(A \mid x_t, u_t(Z_t)). \qquad (۵)$$

توزیع ϵ_t با معادله مشاهدات چهارمین معادله (۱) تعریف می‌شود:

$$P[z_t \in B \mid x_t, Z_{t-1}; u_0(.), \ldots, u_t(.)] = \mathcal{Q}_t(B \mid x_t). \qquad (۶)$$

معادله توزیع شرطی (۴) در زمان $t+1$ با استفاده از مقادیر (۵)، (۶) و توزیع شرطی (۴) در زمان t حاصل می‌شود. توزیع x_{t+1} به شرط Z_t به وسیله انتگرال‌گیری روی x_t از توزیع توأم x_{t+1} و x_t به شرط Z_t از فرمول (۴) و (۵) محاسبه می‌شود:

$$P[x_{t+1} \in A \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)] = \int_{\mathscr{X}} P_t\left[A \mid x_t, u_t\left(Z_t\right)\right] P[dx_t \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)].$$

توزیع توأم x_{t+1} و z_{t+1} به شرط Z_t از حاصل‌ضرب توزیع شرطی z_{t+1} به شرط x_{t+1} و Z_t در (۶) در توزیع حاشیه‌ای x_{t+1} به شرط Z_t محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P[x_{t+1} \in A, z_{t+1} \in B \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_t(.)] &= \int_A \mathcal{Q}_{t+1}(B \mid x_{t+1}) P[dx_{t+1} \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_t(.)] \\ &= \int_A \mathcal{Q}_{t+1}(B \mid x_{t+1}) \int_{\mathscr{X}} P_t(dx_{t+1} \mid x_t, u_t(Z_t) P(dx_t \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_t(.)). \end{aligned} \tag{۷}$$

توزیع شرطی x_{t+1} به شرط Z_{t+1}، توسط توزیع توأم به عنوان یک مشتق رادون–نیکودیم تصادفی تعیین می‌شود (برای مثال ر.ک. لواِو، ۱۹۵۵، ص ۳۴۱):

$$P[x_{t+1} \in A \mid Z_{t+1}; u_0(.), \ldots, u_t(.)] = \frac{P[x_{t+1} \in A, dz_{t+1} \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_t(.)]}{P[x_{t+1} \in \mathscr{X}, dz_{t+1} \mid Z_t; u_0(.), \ldots, u_t(.)]}. \tag{۸}$$

در حالتی که توزیع شرطی مشاهدات z_{t+1} به شرط وضعیت x_{t+1} دارای چگالی نسبت به اندازه لبگ باشد که در برابری

$$Q_{t+1}(z_{t+1} \in B \mid x_{t+1}) = \int_B q_{t+1}(z_{t+1} | x_{t+1}) dz_{t+1}$$

صدق کند، معادله $\{u\} = \{u_0(.), \ldots, u_T(.)\}$ در (۱۹) جایگزین می‌شود و داریم:

$$\begin{aligned} &P[x_{t+1} \in A \mid Z_{t+1}; u_0(.), \ldots, u_t(.)] \\ &= \frac{\int_A q_{t+1}(z_{t+1} \mid x_{t+1}) \int_{\mathscr{X}_t} P_t\left(dx_{t+1} \mid x_t, u_t(Z_t)\right) P\left(dx_t \mid Z_t; u_0(.), .., u_t(.)\right)}{\int_{\mathscr{X}_{t+1}} q_{t+1}(z_{t+1} \mid x_{t+1}) \int_{\mathscr{X}_t} P_t\left(dx_{t+1} \mid x_t, u_t(z_t)\right) P\left(dx_t \mid z_t; u_0(.), .., u_t(.)\right)}. \end{aligned} \tag{۹}$$

این یک رابطه بازگشتی برای به‌روز رسانی با یک گام زمانی توزیع شرطی x_t به شرط Z_t را فراهم می‌کند و به مشاهدات جدید z_{t+1} و مقدار کنترل $u_t\left(Z_t\right)$ در Z_t و نه کل تابع کنترل $u_t(.)$ نیاز دارد. در ادامه فرض کنید توزیع q_{t+1} و P_t معلوم هستند. رابطه (۹) از نظر مسئله کنترل بسیار مهم است. برای یک سامانه تصادفی که در این مقاله در نظر گرفته می‌شود، توابع کنترل ثابت یا معلوم هستند و مسئله براورد بردار وضعیت از داده‌های موجود با محاسبه توزیع شرطی x_t به شرط Z_t و u_{t-1} حل می‌شود. رابطه (۹) یک روش برای محاسبه این توزیع فراهم می‌کند. اگر تاریخچه بردار وضعیت از داده‌ها بازسازی شود، باید توزیع‌های شرطی x_t به شرط Z_T و U_{T-1}، $t = 0,\ldots,T$ بدست آید. در قضیه ۲-۱، ثابت می‌شود، توزیع شرطی (۴) به قاعده کنترل $\{u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)\}$ تنها از طریق مقدار U_{t-1} در Z_{t-1} بستگی دارد.

قضیه ۲-۱: توابع $G_t(A \mid Z_t, U_{t-1})$، $t = 0,\ldots,T$ وجود دارند به طوری که برای همه توابع کنترل $\{u_0(.), \ldots, u_{t-1}(.)\}$:

$$P[\mathrm{x_t} \in \mathrm{A} \mid \mathrm{Z_t}; \mathrm{u_0}(.),\ldots,\mathrm{u_{t-1}}(.)] = \mathrm{G_t}\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\left(Z_{t-1}\right)\right) \qquad \text{a.s. } \mathrm{Z_t}.$$

اثبات: برای $t=0$، توزیع توأم x_0 و z_0 به قاعده کنترل بستگی ندارد:

$$P(\mathrm{x_0} \in \mathrm{A}, \mathrm{Z_0} \in \mathrm{B}) = \int_A \mathcal{Q}_0\left(\mathrm{B} \mid \mathrm{x_0}\right)\mathrm{P_0}\left(\mathrm{dx_0}\right)$$

و توزیع شرطی $\mathrm{G_0}\left(\mathrm{A|Z_0}\right)$ را می‌توان به این صورت تعریف کرد. اگر فرض استقرا این باشد که حکم قضیه برای t برقرار باشد، از این رو $\mathrm{G_{t+1}}\left(\mathrm{A|Z_{t+1}}, \mathrm{U_t}\right)$ از $\mathrm{G_t}\left(\mathrm{A|Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$، $\mathrm{z_{t+1}}$ و $\mathrm{u_t}$ با روابط بازگشتی داده شده در (۸)، (۷) و یا (۹) ساخته می‌شود و در پی آن حکم اثبات می‌شود. ■

از این که توزیع $\mathrm{Z_t}$ و $\mathrm{x_t}$ به طور کامل مشخص نیستند، توابع $\mathrm{G_t}\left(\mathrm{x_t} \in \mathrm{A|Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$ به صورت احتمال شرطی قابل محاسبه نیستند.

اگر در هر مرحله تمام داده‌ها در دسترس نباشند، قضیه ۲-۱ به کار نمی‌رود و توزیع شرطی $\mathrm{x_t}$ به شرط آماره $\mathrm{Y_t(Z_t)}$ یعنی

$$P(\mathrm{x_t} \in \mathrm{A} \mid \mathrm{Y_t(Z_t)}; \mathrm{u_0}(.),\ldots,\mathrm{u_{t-1}}(.))$$

به توابع کنترل و نه تنها به مقادیرشان در $\mathrm{Z_t}$ بستگی دارد.

آماره $X_{\mathrm{t}}(\mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}})$ که یک تابع از داده‌های موجود در زمان t است را همسان با توزیع $\mathrm{G_t}\left(\mathrm{A|Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$ نامند، هرگاه توزیع تنها از طریق $\mathrm{X_t}$ به داده‌ها بستگی داشته باشد، یعنی

$$\mathrm{G_t}\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right) = \mathrm{G_t}(\mathrm{A} \mid \mathrm{X_t}(\mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}})) \qquad (۱۰)$$

و علاوه بر این، $\mathrm{X_t}\left(\mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$ را می‌توان از اطلاعات راجع به توزیع $\mathrm{G_t}\left(.|\mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$ بدست آورد. به عنوان مثال، در حالت گاوسی، توزیع شرطی $\mathrm{G_t}\left(\mathrm{A|Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$، نرمال با میانگین $\hat{x}_t$ و کوواریانس $\mathrm{K_t}$ است که کوواریانس به داده‌ها بستگی ندارد. بنابراین میانگین $\hat{x}_t\left(\mathrm{Z_t}, \mathrm{U_{t-1}}\right)$ همسان با توزیع $\mathrm{G_t}$ است که در آن:

$$\mathrm{G_t}\left(\mathrm{A}\right) = \int_{\mathrm{x_t} \in \mathrm{A}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left|\mathrm{K_t}\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(x_t - \hat{x}_t\right)' \mathrm{K}_t^{-1}\left(x_t - \hat{x}_t\right)\right]\mathrm{dx_t}$$

و البته می‌توان میانگین را دوباره به صورت $\hat{x}_t = \int_{\mathcal{X}} \mathrm{x}\mathrm{G_t}\left(\mathrm{dx}\right)$ بازیابی کرد.

یافتن یک آماره همسان $\mathrm{X_t}$ که تا حد امکان ساده باشد، یک مزیت به حساب می‌آید. با این حال در صورت قادر نبودن به یافتن این آماره، توزیع $\mathrm{G_t}\left(\mathrm{A}\right)$ همیشه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و از این رو با این دیدگاه یک آماره همسان $\mathrm{X_t}$ همیشه وجود دارد.

این تعریف از آماره همسان، می‌تواند به آماره بسنده کامل از دینکین (۱۹۵۱) و آماره بسنده مینیمال از بلاکول و گیرشیک (۱۹۵۴) مرتبط باشد. به منظور انجام این کار لازم است که $\mathrm{x_t}$ را به عنوان پارامتر θ مشخص کنیم. توزیع $\mathrm{x_t}$ ممکن است به عنوان یک

توزیع پیشین بیز در نظر گرفته شود که با توجه به بستگی داشتن آن به توابع کنترل (یا راهبردهای) $u_0(.),\ldots,u_T(.)$ رضایت‌بخش نیست. با این وجود اگر توزیع‌ها دارای چگالی باشند و فضای پارامتر روی مقادیر x_t که $P(x_t)\neq 0$ تعریف شده باشد، در این صورت چگالی مشاهدات در شرط زیر صدق می‌کند:

$$P(Z_t, U_{t-1} \mid x_t) = \frac{g_t\left(x_t \mid X_t\right)}{p\left(x_t\right)} p\left(Z_t, U_{t-1}\right)$$

که تعریف معمول از بسندگی است. شرط برقراری لزوم، معادل با این است که X_t تابعی از $g_t\left(.|X_t\right)$، (چگالی توزیع $G_t\left(A|X_t\right)$) باشد.

قضیه ۲-۲: اگر $X_t(Z_t, U_{t-1})$ همسان با توزیع شرطی $G_t(A \mid Z_t, U_{t-1})$ باشد، پس X_t در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$X_{t+1} = \phi_t\left(X_t, u_t, z_{t+1}\right). \qquad (۱۱)$$

اثبات: توزیع $G_{t+1}(A \mid Z_{t+1}, U_t)$ را می‌توان از روابط بازگشتی برای توزیع‌های شرطی داده‌شده در (۷)، (۸) یا (۹) که در آن

$$G_t\left(A|Z_t, U_{t-1}\right) = G_t\left(A|X_t\right)$$

پیدا کرد. بنابراین $G_{t+1}(A)$ یک تابع از X_t، u_t و z_{t+1} است. با استفاده از فرض همسانی، X_{t+1} توسط $G_{t+1}(.)$ محاسبه خواهد شد. ■

به عنوان مثال در حالت خاص گاوسی، φ_t و z_t خطی هستند:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \varphi_t x_t + u_t + w_{t+1},\ t = 0,\ldots,T \\ z_t &= H_t x_t + \epsilon_t,\ t = 0,\ldots,T \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در آن w_t و ϵ_t بردارهای گاوسی مستقل با میانگین صفر و ماتریس‌های کوواریانس

$$\begin{aligned} E(w_t w_t') &= C_t, \\ E(\epsilon_t \epsilon_t') &= R_t \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

هستند. در فرمول‌های اخیر H_t و φ_t به ترتیب ماتریس‌های $m\times n$ و $n\times n$ و x_0 دارای توزیع $N(\hat{x}_0, K_0)$ هستند. در مورد توابع کنترل $u_t(.)$ نیاز به در نظر گرفتن هیچ فرضی نیست. با توجه به (۱۲) داریم:

$$P(x_{t+1} \mid x_t, u_t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|C_t|}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(x_{t+1} - \varphi_t x_t - u_t\right)' C_t^{-1}\left(x_{t+1} - \varphi_t x_t - u_t\right)\right]$$

و از تعریف مشاهدات در معادله دوم (۱۲) داریم:

$$q_t(z_t|x_t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{|R_t|}}\exp\left[-\tfrac{1}{2}(z_t-H_tx_t)'R_t^{-1}(z_t-H_tx_t)\right].$$

با استفاده از این توابع در روابط بازگشتی برای G_t در (۹)، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $g_t(x_t\mid Z_t,U_{t-1})$ یک چگالی گاوسی با میانگین

$$\hat{x}_t=\int_{\mathcal{X}}x_t g(x_t|Z_t,U_{t-1})dx_t$$

و کوواریانس

$$K_t=\int_{\mathcal{X}}(x_t-\hat{x}_t)(x_t-\hat{x}_t)'g(x_t|Z_t,U_{t-1})dx_t$$

است. طبق (۹)، روابط زیر برقرار هستند (کالمن، ۱۹۶۰):

$$\begin{aligned}&\hat{x}_{t+1}=\varphi_t\hat{x}_t+u_t+K_{t+1}H'_{t+1}R^{-1}_{t+1}(z_{t+1}-H_{t+1}u_t-H_{t+1}\varphi_t\hat{x}_t),\\&K^{-1}_{t+1}=H'_{t+1}R^{-1}_{t+1}H_{t+1}+\left(C_t+\varphi_tK_t\varphi'_t\right)^{-1}.\end{aligned}\tag{۱۴}$$

در این حالت، آماره همسان $\hat{x}_t$ است. ماتریس K_t از داده Z_t و کنترل U_{t-1} مستقل است، بنابراین می‌توان آن را به عنوان یک ثابت در نظر گرفت. در این حالت رابطه (۱۱) در قضیه ۲-۲ توسط معادله تفاضلی برای میانگین شرطی (۱۴) محاسبه می‌شود.

این فرمول شامل حالت‌های کنترل غیرخطی است، اما شامل حالت مهمی که در آن خطای مکانیکی w_t به کنترل بستگی داشته باشد نیست.

۳ آماره‌های آگاهی‌بخش

در این قسمت تحت دو کلاس از توابع زیان، آماره آگاهی‌بخش محاسبه می‌شود.

یک آماره $Y_t(Z_t,U_{t-1})$ ، $t=0,\ldots,T$ نسبت به مسئله کنترل تعریف شده توسط L آگاهی‌بخش نامیده می‌شود، هرگاه توابع $L^*_t(Y_t,u_t;\overline{u}_{t+1}(.),\ldots,\overline{u_T}(.))$ و $K^*_t(Z_t,U_{t-1})$ وجود داشته باشند به طوری که:

$$\begin{aligned}&E[L\mid Z_t;u_0(.),\ldots,u_t(.),\overline{u_{t+1}}(.),\ldots,\overline{u_T}(.)]\\&=K^*_t(Z_t,U_{t-1})+L^*_t\left[Y_t(Z_t,U_{t-1}),u_t;\overline{u_{t+1}}(.),\ldots,\overline{u_T}(.)\right],\ t=0,\ldots,T\end{aligned}\tag{۱۵}$$

که در آن U_{t-1} و u_t مقادیری از $u_0(.),\ldots,u_t(.)$ در Z_t هستند. معادله (۱۵) باید برای هر $u_0(.),\ldots,u_t(.)$ و $\overline{u_{t+1}}(.),\ldots,\overline{u_T}(.)$ که تابعی از Y_s هستند برقرار باشد، یعنی:

$$\overline{u_s}\left(Z_s, U_{s-1}\right)=\overline{u_s}(Y_s(Z_s, U_{s-1})),\ s=t+1,\ldots,T. \tag{۱۶}$$

دلیل این تعریف کمی مبهم است. این حقیقت رضایت‌بخش‌تر است، هرگاه Y_s برای مسئله کنترلی آگاهی‌بخش باشد که قاعده کنترل $\hat{u}_0(Y_0),...,\hat{u}_T\left(Y_T\right)$ که از دیدگاه تعریف شده در (۳) بهینه است وجود داشته باشد و به داده‌ها فقط از طریق Y_t بستگی داشته باشد.

طرز ساختن این کنترل بهینه در ذیل شرح داده خواهد شد:

اگر Y_t به معنای تعریف‌شده آگاهی‌بخش باشد، در این صورت یک کنترل بهینه می‌تواند به صورت بازگشتی با شروع از $t=T$ و در هر مرحله تعریف شود:

$$u_t\left(Y_t\right)=u^*_t \tag{۱۷}$$

و مقدار u_t در $\mathcal{U}$ عبارت زیر را مینیمم کند:

$$L^*_t\left(Y_t, u_t; u_{t+1}(.),...,u_T(.)\right). \tag{۱۸}$$

در بیشتر موارد، این روش به صورت نظری انجام می‌شود. برای حالت گاوسی که در آن آماره بسنده از ابعاد کوچک را می‌توان پیدا کرد، این روش کاملاً امکان‌پذیر است. با این حال با در نظر نگرفتن محدودیت روی تابع زیان، این ساخت و ساز را نمی‌توان به طور دقیق توجیه کرد. اکنون سوال برای وجود نقطه u_t^*، اندازه‌پذیری و انتگرال‌پذیری توابع کنترل $u_t\left(Y_t\right)$ و توابع زیان شرطی L_t^* مطرح می‌شود. این نوع مسائل را می‌توان با محدودیت‌های نظم روی تابع زیان و سایر توابع تعریف شده در (۱) حل کرد که در این مقاله به این موارد پرداخته نمی‌شود.

در این بخش فرض می‌شود که $X_t\left(Z_t, U_{t-1}\right)$ با توزیع شرطی x_t به شرط Z_t و U_{t-1} همسان است و از این رو توسط قضیه ۲-۲، یک رابطه بازگشتی (۱۱) وجود دارد.

قضیه ۲-۳-۸ از بلاکول و گیرشیک (۱۹۵۴) که ثابت می‌کند آماره بسنده، آگاهی‌بخش است مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، زیرا در اینجا تابع زیان، نه تنها به عمل و پارامتر، بلکه به متغیرهای تصادفی وابسته است.

قضیه ۳-۱: برای توابع زیان $L(x_{T+1}, U_T)$ آماره $Y_t=\left(x_t, U_{t-1}\right)$ ، $t=0,\ldots,T$ آگاهی‌بخش است.

اثبات: برای $L(x_{T+1}, U_T)$، با در نظر گرفتن $K_t^*=0$ و محاسبه L_t^*، رابطه (۱۵) برقرار است و از این رو حکم اثبات می‌شود. (اگر قضیه به توابع زیان $\sum_{\tau=0}^{T+1} L_\tau\left(x_\tau, u_0,\ldots,u_{\tau-1}\right)$ گسترش یابد، این عبارت وجود دارد.) برای $t=T$:

$$
\begin{aligned}
&E[L(x_{T+1},U_T)\mid Z_T;u_0(.),\dots,u_T(.)]=E\{L[\varphi(x_T,u_T,w_{T+1}),U_T]\mid Z_T;u_0(.),\dots,u_T(.)\}\\
&=\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}} L\left[\varphi\left(x_T,u_T(Z_T),w_{T+1}\right),U_T(Z_T)\right]G(dx_T\mid X_T)P\left(dw_{T+1}\right)\\
&=L^*\left(X_T,U_{T-1},u_T\right).
\end{aligned}
$$

گام دوم به قضیه ۲-۱ و این حقیقت است که Z_T و w_{T+1} مستقل هستند بستگی دارد. به عنوان فرض استقرا فرض کنید که (۱۵) برای $t+1$ برقرار است، و $\overline{u_{t+1}}(.),\dots,\overline{u_T}(.)$ با توجه به تعریف یک آماره آگاهی‌بخش (۱۶) به $Y_s=\left(x_s,U_{s-1}\right)$ بستگی داشته باشند. از این رو

$$
\begin{aligned}
&E[L\mid Z_t;u_0(.),\dots,u_t(.),\overline{u_{t+1}}(.),\dots,\overline{u_T}(.))\\
&=E\{E(L\mid Z_t,z_{t+1};u_0(.),\dots,u_t(.),\overline{u_{t+1}}(.),\dots,\overline{u_T}(.))\mid Z_t;u_0(.),\dots,\overline{u_T}(.)\}.
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

با توجه فرض استقرا، امید شرطی داخلی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$
L^*_{t+1}\left(X_{t+1},U_t,\bar{u}_{t+1}\left(X_{t+1},U_t\right);\bar{u}_{t+2}(.),\dots,\bar{u}_T(.)\right).
\tag{۲۰}
$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۱) در قضیه ۲-۲، X_{t+1} تابعی از X_t، z_{t+1} و u_t است. با استفاده از معادله مشاهدات چهارمین معادله (۱)، z_{t+1} تابعی از x_{t+1} و ϵ_{t+1} است که نظر به معادله سامانه (۱) (دومین معادله)، X_{t+1} می‌تواند به عنوان یک تابع از X_t، u_t، x_t، w_{t+1} و ϵ_{t+1} در نظر گرفته شود:

$$
X_{t+1}\left(X_t,u_t,x_t,w_{t+1},\epsilon_{t+1}\right)=\Phi_t\left(X_t,u_t,z_{t+1}\left(\varphi_t\left(x_t,u_t,w_{t+1}\right),\epsilon_{t+1}\right)\right).
\tag{۲۱}
$$

مشابه با گذشته ϵ_{t+1}، w_{t+1} و Z_t مستقل هستند. با جای‌گذاری (۲۰) به عنوان امید شرطی داخلی در (۱۹) و همچنین استفاده از (۲۱) برای X_{t+1} داریم:

$$
\begin{aligned}
&E(L\mid Z_t;u_0(.),\dots,u_t(.),\bar{u}_{t+1}(.),\dots,\bar{u}_T(.))\\
&=\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}} L^*_{t+1}(X_{t+1}\left(X_t,u_t,x_t,w_{t+1},\epsilon_{t+1}\right),U_t,\bar{u}_{t+1}(X_{t+1}\left(X_t,u_t,x_t,w_{t+1},\epsilon_{t+1}\right),U_t);\bar{u}_{t+2}(.),\dots,\bar{u}_T(.))\\
&\qquad\times P\left(d\epsilon_{t+1}\right)P\left(dw_{t+1}\right)G_t(dx_t\mid X_t)\\
&=L^*_t(X_t,U_{t-1},u_t;\bar{u}_{t+1}(.),\dots,\bar{u}_T(.))
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

که در آن

$$
P[dx_t\mid Z_t;u_0(.),\dots,u_t(.)]=G_t(dx_t\mid X_t).
$$

با توجه به قضیه ۲-۱ و این که X_t یک آماره همسان است، معادله (۱۰) در تعریف همسانی صدق می‌کند و به کمک استقرا حکم ثابت می‌شود. ■

معادله (۲۲) یک روش بازگشتی برای محاسبه L_t^* فراهم می‌کند و یک روش سازنده برای محاسبه کنترل بهینه به عنوان یک تابع از آماره آگاهی‌بخش معرفی می‌کند.

قضیه ۳-۲: برای توابع زیان

$$\mathrm{L}_{\mathrm{T}+1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}\right)+\sum_{\tau=0}^{T}\mathrm{L}_{\tau}\left(\mathrm{u}_{\tau}\right) \tag{۲۳}$$

آماره $\mathrm{Y}_{\mathrm{t}}=\mathrm{X}_{\mathrm{t}}$ ، $t=0,\ldots,T$ آگاهی‌بخش است.

اثبات: برای تمام tها، $K^*_{\mathrm{t}}\left(\mathrm{Z}_{\mathrm{t}},\mathrm{U}_{\mathrm{t}-1}\right)=\sum_{\tau=0}^{t-1}\mathrm{L}_{\tau}\left(\mathrm{u}_{\tau}\right)$. بنابراین L_t^* باید امید شرطی $\mathrm{L}_{\mathrm{T}+1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}\right)+\sum_{\tau=t}^{T}\mathrm{L}_{\tau}\left(\mathrm{u}_{\tau}\right)$ باشد. برای $t=T$ داریم

$$\begin{aligned}&E[\mathrm{L}_{\mathrm{T}+1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}\right)+\mathrm{L}_{\mathrm{T}}\left(\mathrm{u}_{\mathrm{T}}\right)\mid \mathrm{Z}_{\mathrm{T}};\mathrm{u}_0(.),\ldots,\mathrm{u}_{\mathrm{t}}(.)]\\&\quad=\mathrm{L}_{\mathrm{T}}\left(\mathrm{u}_{\mathrm{T}}\right)+\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}}\mathrm{L}_{\mathrm{T}+1}\left(\varphi_{\mathrm{T}}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}},\mathrm{u}_{\mathrm{T}}(\mathrm{Z}_{\mathrm{T}}),w_{\mathrm{T}+1}\right)\right)\mathrm{G}(\mathrm{dx}_{\mathrm{T}}\mid \mathrm{X}_{\mathrm{T}})\mathrm{P}\left(\mathrm{d}w_{\mathrm{T}+1}\right)\\&\quad=\mathrm{L}^*_{\mathrm{T}}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}},\mathrm{u}_{\mathrm{T}}\right).\end{aligned} \tag{۲۴}$$

به عنوان فرض استقرا، فرض کنید که (۱۵) برای $\mathrm{t}+1$ برقرار است و همچنین $\bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)$ توابعی از $\mathrm{Y}_{\mathrm{s}}=X_{\mathrm{s}}$ (۱۶) باشند، از این رو

$$\begin{aligned}&E[\mathrm{L}_{\mathrm{T}+1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}\right)+\sum_{\tau=t}^{T}\mathrm{L}_{\tau}\left(\mathrm{u}_{\tau}\right)\mid \mathrm{Z}_{\mathrm{T}};\mathrm{u}_0(.),\ldots,\mathrm{u}_{\mathrm{t}}(.),\bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)]\\&=\mathrm{L}_{\mathrm{t}}\left(\mathrm{u}_{\mathrm{t}}\right)\\&\quad+E\left\{E\left[\mathrm{L}_{T+1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}\right)+\sum_{\tau=t+1}^{T}\mathrm{L}_{\tau}\left(\mathrm{u}_{\tau}\right)\mid \mathrm{Z}_{\mathrm{T}},z_{t+1};\mathrm{u}_0(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right]\mid \mathrm{Z}_{\mathrm{T}};\mathrm{u}_0(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right\}\end{aligned} \tag{۲۵}$$

با توجه به فرض استقرا، امید شرطی داخلی به صورت

$$\mathrm{L}^*_{\mathrm{t}+1}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{t}+1},\bar{u}_{t+1}(\mathrm{X}_{\mathrm{t}+1}),\bar{u}_{t+2}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right)$$

داده می‌شود. مشابه قبل با جای‌گذاری (۲۱) برای $\mathrm{X}_{\mathrm{t}+1}$ و انتگرال‌گیری از (۲۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
&E[\mathrm{L}_{\mathrm{T}+1}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1})+\sum_{\tau=t}^{T}\mathrm{L}_{\tau}(\mathrm{u}_{\tau}) \mid \mathrm{Z}_{\mathrm{T}};\mathrm{u}_0(.),\ldots,\bar{u}_T(.)] \\
&=\mathrm{L}_{\mathrm{t}}(\mathrm{u}_{\mathrm{t}})+\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}}\mathrm{L}^{*}_{\mathrm{t}+1}\Big(\mathrm{X}_{\mathrm{t}+1}(\mathrm{X}_{\mathrm{t}},\mathrm{u}_{\mathrm{t}},\mathrm{x}_{\mathrm{t}},w_{\mathrm{t}+1},\epsilon_{\mathrm{t}+1}),\bar{u}_{t+1}\big(\mathrm{X}_{\mathrm{t}+1}(\mathrm{X}_{\mathrm{t}},\mathrm{u}_{\mathrm{t}},\mathrm{x}_{\mathrm{t}},w_{\mathrm{t}+1},\epsilon_{\mathrm{t}+1})\big)\Big) \qquad (۲۶)\\
&\qquad \mathrm{P}(d\epsilon_{\mathrm{t}+1})\mathrm{P}(dw_{\mathrm{t}+1})\mathrm{G}_{\mathrm{t}}(d\mathrm{x}_{\mathrm{t}} \mid \mathrm{X}_{\mathrm{t}}) \\
&=\mathrm{L}^{*}_{\mathrm{t}}\big(\mathrm{X}_{\mathrm{t}},\mathrm{u}_{\mathrm{t}};\bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\big).
\end{aligned}
$$

حکم با استفاده از استقرا ثابت می‌شود. ■

همسان قبل (۲۶) یک روش بازگشتی برای محاسبات $\mathrm{L}^{*}_{\mathrm{t}}$ و کنترل بهینه به عنوان تابع X_{t} از روابط (۱۷)، (۱۸)، (۲۴)، (۲۶) و (۲۱) ارائه می‌دهد.

در ادامه بخش به حالت گاوسی که توسط روابط (۱۲) و (۱۳) تعریف شده اختصاص داده شده است. در این حالت با استفاده از قضیه ۳-۱، آماره $\hat{x}_t$ همراه با کنترل‌های قبلی $\mathrm{U}_{\mathrm{t}+1}$ یک آماره آگاهی‌بخش برای تابع زیان عمومی از $L(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1},\mathrm{U}_{\mathrm{T}})$ است و $\hat{x}_t$ برای تابع زیان جمعی (۲۳) آگاهی‌بخش است. با این وجود، در بسیاری از مسائل ایجاد محدودیت بیشتری امکان‌پذیر است. فرض کنید تابع زیان (۲۳) یا $L(\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1},\mathrm{U}_{\mathrm{T}})$، به مقدار نهایی X_{T+1} تنها از طریق $\alpha\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}$ بستگی دارد که در آن α، یک ماتریس $p\times n$ است. کمیت $\alpha\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1}$ فاصله خطا نامیده می‌شود و نشان داده خواهد شد که $\hat{x}_t$ ممکن است جایگزین فاصله خطای برون‌یابی شده شود و داریم $\hat{\alpha}_t=\alpha\varphi_{\mathrm{T}}\varphi_{\mathrm{T}-1}\ldots\varphi_{\mathrm{t}}\hat{x}_t$.

اگر $p<n$، آماره آگاهی‌بخش کاهش پیدا می‌کند و در صورتی که $p=1$، به یک آماره ساده تبدیل می‌شود. به توجه به معادله بازگشتی برای میانگین شرطی $\hat{x}_t$ (۱۴)، اولین معادله سامانه (۱۲) و دومین معادله مشاهده (۱۲) برای حالت گاوسی، α_t در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$
\hat{\alpha}_{t+1}=\hat{\alpha}_t+\psi_{\mathrm{t}}\mathrm{u}_{\mathrm{t}}+\psi_{\mathrm{t}}\mathrm{K}_{\mathrm{t}+1}\mathrm{H}^{*}_{\mathrm{t}+1}\mathrm{R}_{\mathrm{t}+1}^{-1}\left[\mathrm{H}_{\mathrm{t}+1}\varphi_{\mathrm{t}}\left(x_{\mathrm{t}}-\hat{x}_t\right)+\epsilon_{\mathrm{t}+1}+\mathrm{H}_{\mathrm{t}+1}w_{\mathrm{t}+1}\right] \qquad (۲۷)
$$

که در آن ψ_{t} یک ماتریس $p\times n$ است که در رابطه $\psi_{\mathrm{t}}=\alpha\varphi_{\mathrm{T}}\varphi_{\mathrm{T}-1}\ldots\varphi_{\mathrm{t}+1}$ صدق می‌کند.

قضیه ۳-۳: در حالت گاوسی داده شده در (۱۲) و (۱۳) برای توابع زیان $L(\alpha\mathrm{x}_{\mathrm{T}+1},\mathrm{U}_{\mathrm{T}})$ آماره $\mathrm{Y}_{\mathrm{t}}=(\hat{\alpha}_t,\mathrm{U}_{\mathrm{t}-1})$، $\mathrm{t}=0,\ldots,\mathrm{T}$ آگاهی‌بخش است.

اثبات: برای تمام t ها $\mathrm{K}_{\mathrm{t}}^{*}=0$. از معادله سامانه (۱۲) داریم

$$
\alpha\mathrm{x}_{T+1}=\alpha\varphi_{\mathrm{T}}\mathrm{x}_{T}+\alpha\mathrm{u}_{\mathrm{T}}+\alpha w_{\mathrm{T}+1}+\hat{\alpha}_T-\hat{\alpha}_T.
$$

با شرطی کردن روی Z_{T}، $\alpha_T+\alpha\mathrm{u}_{\mathrm{T}}=\alpha_T+\psi_{\mathrm{T}}\mathrm{u}_{\mathrm{T}}$ یک مقدار ثابت و $\eta=\alpha\varphi_{\mathrm{T}}\left(x_T-\hat{x}_T\right)+\alpha w_{\mathrm{T}+1}$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و کوواریانس

$$B_{T+1} = \alpha\varphi_T K_T \varphi^*_T \alpha^* + \alpha C_{T+1}\alpha^* \qquad (۲۸)$$

است، زیرا w_{T+1} و $\left(x_T - \hat{x}_T\right)$ مستقل هستند. بدین ترتیب برای $t = T$:

$$\begin{aligned} E\left(L(\alpha x_{T+1}, U_T) \mid Z_T; u_0(.),\ldots,u_T(.)\right] &= \int_{\mathcal{X}} L(\hat{\alpha}_T + \psi_T u_T + \eta, U_T) f_{T+1}(\eta)\, d\eta \\ &= L^*_t\left(\hat{\alpha}_T, U_{T-1}, u_T\right) \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که در آن $f_{T+1}(\eta)$، چگالی نرمال با میانگین صفر و کوواریانس B_{T+1} است که توسط (۲۸) داده شده است.

به عنوان فرضیه استقرا، اگر (۱۵) برای $t+1$ برقرار باد و $\bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)$ توابع Y_s داده شده در قضیه ۳-۳ باشند، با تکرار همان مراحل (۱۹) و (۲۲) در اثبات قضیه ۳-۳ با این تفاوت که برای نوشتن α_{t+1} به عنوان تابعی از α_t ، u_t از (۲۷) و همچنین از η بجای معادله کاهش برای X_{t+1} (۲۱) استفاده شود، داریم:

$$\begin{aligned} &E[L \mid Z_t; u_0(.),\ldots,u_t(.),\bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)] \\ &= \int_{\mathcal{X}} L^*_{t+1}\left(\hat{\alpha}_t + \psi_t u_t + \eta, U_t, \bar{u}_{t+1}\left(\hat{\alpha}_t + \psi_t u_t + \eta, U_t\right); \bar{u}_{t+2}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right) f_{t+1}(\eta)\, d\eta \\ &= L^*_t\left(\hat{\alpha}_t, U_{t-1}, u_t; \bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right). \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

که در آن از (۲۷) داریم:

$$\eta = \psi_t K_{t+1} H_{t+1}{}^* R_{t+1}{}^{-1}\left[H_{t+1}\varphi_t\left(x_t - \hat{x}_t\right) + \epsilon_{t+1} + H_{t+1} w_{t+1}\right].$$

چگالی شرطی η به شرط Z_t، به $f_{t+1}(\eta)$ وابسته و دارای توزیع نرمال p – بعدی، با میانگین صفر و کوواریانس

$$B_{t+1} = \psi_t K_{t+1} H^*_{t+1} R^{-1}_{t+1}\left[H_{t+1}\varphi_t K_t \varphi^*_t H^*_{t+1} + R_{t+1} + H_{t+1} C_{t+1} H^*_{t+1}\right] \times R^{-1}_{t+1} H_{t+1} K_{t+1} \psi^*_t \qquad (۳۱)$$

است. نتیجه با استفاده از استقرا حاصل می‌شود. ■

کنترل بهینه می‌تواند از (۱۷)، (۱۸)، (۲۸)، (۲۹)، (۳۱) و (۳۰) ساخته شود.

قضیه ۳-۴: در حالت گاوسی داده شده توسط (۱۲) و (۱۳) برای توابع زیان به صورت

$$L_{T+1}\left(\alpha x_{T+1}\right) + \sum_{\tau=0}^{T} L_\tau\left(u_\tau\right)$$

آماره

$$Y_t = \alpha_t,\ t = 0,\ldots,T \qquad (۳۲)$$

آگاهی‌بخش است.

اثبات: همانند قضیه ۳-۲، با جایگزینی (۲۷) توسط (۲۱) داریم:

$$\begin{aligned}&K^{*}_{t}\left(Z_t, U_{t-1}\right)=\sum_{\tau=0}^{t-1} L_\tau\left(u_\tau\right),\\&L^{*}_{T+1}\left(\hat{\alpha}_T, u_T\right)=L_T\left(u_T\right)+\int_{\mathcal{X}} L_{T+1}\left(\hat{\alpha}_T+\psi_T u_T+\eta\right) f_{T+1}(\eta)\, d\eta\end{aligned} \tag{۳۳}$$

که در آن $f_{t+1}(\eta)$ ، چگالی نرمال با میانگین صفر و کوواریانس داده شده توسط (۲۸) است. بنابراین

$$\begin{aligned}&L^{*}_{t}\left(\hat{\alpha}_t, u_t; \bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right)=L_t\left(u_t\right)\\&+\int_{\mathcal{X}} L^{*}_{t+1}\left(\hat{\alpha}_t+\psi_t u_t+\eta, \bar{u}_{t+1}\left(\hat{\alpha}_t+\psi_t u_t+\eta\right); \bar{u}_{t+2}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right)\times f_{t+1}(\eta)\, d\eta\end{aligned}$$

که در آن $f_{t+1}(\eta)$ چگالی نرمال با میانگین صفر و کوواریانس داده شده توسط (۳۱) است. ■

کنترل بهینه در این حالت از (۱۷)، (۱۸)، (۳۲)، (۲۸)، (۳۳) و (۳۱) محاسبه می‌شود.

یک نتیجه دیگر برای حالت گاوسی با تابع زیان $L_{T+1}\left(\alpha x_{T+1}\right)+\sum_{\tau=0}^{T} L_\tau\left(u_\tau\right)$ بررسی می‌شود. در این حالت، محدودیت کنترل خطی، به صورت ویژه مناسب است، یعنی $u_t\left(Z_t\right)=M_t Z_t$ ، $t=0,\ldots,T$ از (۱۲) و (۱۴) دیده می‌شود که تحت این محدودیت، تمام متغیرهای تصادفی شامل x_t ، z_t ، $\hat{x}_t$ و u_t بوده و دارای توزیع نرمال هستند. محاسبات زمانی که توزیع واقعی برای فاصله خطا یا تلاش کل $\sum_\tau L_\tau(u_\tau)$ مورد نیاز باشد، ساده‌تر می‌شود. با توجه به نرمال بودن کنترل خطی عمومی داریم:

$$u_t\left(Z_t\right)=M_t[Z_t-E(Z_t|\hat{\alpha}_t)]+\overline{M}_t\hat{\alpha}_t$$

زیرا برای یک ماتریس N_{st} ، $E\left(z_s|\hat{\alpha}_t\right)=N_{st}\hat{\alpha}_t$. بعد ماتریس M_t ، $n\times n\left(t+1\right)$ و بعد ماتریس‌های $\overline{M}_t$ و N_{st} ، $n\times p$ است. فرض کنید تابع زیان

$$L^{*}_{t}\left(\hat{\alpha}_t, u_t; \bar{u}_{t+1}(.),\ldots,\bar{u}_T(.)\right)$$

در مولفه دوم برای همه کنترل‌های خطی

$$\bar{u}_s\left(\hat{\alpha}_s\right)=\hat{M}_s\hat{\alpha}_s,\ s=t+1,\ldots,T \tag{۳۴}$$

مشتق‌پذیر باشد. اگر کنترل خطی $\hat{u}_t\left(\hat{\alpha}_t\right)=\hat{M}_t\hat{\alpha}_t$ ، $t=0,\ldots,T$ در بین کلاس کنترل‌های خطی در α_t موضعاً بهینه باشد، آن‌گاه در کلاس کنترل‌های خطی $u_t\left(Z_t\right)=M_t Z_t$ ، $t=0,\ldots,T$ موضعاً بهینه است.

زیان مورد انتظار به عنوان تابعی از $(M_t,\overline{M}_t)$ ، $t=0,\ldots,T$ برابر است با

$$\mathrm{E(L)} = L\left(\mathrm{M}_0, \overline{M}_0, \mathrm{M}_1, \overline{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_\mathrm{T}, \overline{M}_T\right)$$

و برای هر (i,j) ، $\mathrm{M_t}$ ، $\overline{M}_t$ ، $t = 0,\ldots,\mathrm{T}$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial(\mathrm{M_t})_{\mathrm{ij}}} \mathrm{L}\left(\mathrm{M}_0, \overline{M}_0, \ldots, \mathrm{M_T}, \overline{M}_T\right) = 0 \qquad (۳۵)$$

که در آن $(\mathrm{M_t})_{\mathrm{ij}}$ نشان‌دهنده عنصر (i,j)ام ماتریس $\mathrm{M_t}$ است. همچنین داریم:

$$E\left[\mathrm{L_{T+1}}\left(\mathrm{X_{T+1}}\right) + \sum_{\tau=t}^{T} \mathrm{L_t}\left(\mathrm{u_t}\right)\right] = E\{E[E(L \mid \mathrm{Z_t}) \mid \hat{\alpha}_t]\}$$
$$= \mathrm{E}\{\mathrm{E}[\mathrm{L}^*_{\mathrm{t}}(\hat{\alpha}_t, \mathrm{M_t}\left(\mathrm{Z_t} - \mathrm{E}(\mathrm{Z_t} \mid \hat{\alpha}_t)\right) + \overline{M}_t \hat{\alpha}_t; \bar{u}_{t+1}(.), \ldots, \bar{u}_T(.))] \mid \hat{\alpha}_t\}$$

که در آن $\bar{u}_{t+1}(.), \ldots, \bar{u}_T(.)$ در (۳۴) صدق می‌کند. بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\left(\mathrm{M_t}\right)_{\mathrm{ij}}} \mathrm{E}\left(\mathrm{L}\right) = \mathrm{E}\{\mathrm{E}[\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_i} \mathrm{L}^*_{\mathrm{t}}(\hat{\alpha}_t, \mathrm{M_t}(\mathrm{Z_t} - \mathrm{E}(\mathrm{Z_t} \mid \hat{\alpha}_t))$$
$$+ \overline{M}_t \hat{\alpha}_t; \bar{u}_{t+1}(.), \ldots, \bar{u}_T(.))(\mathrm{Z_t} - \mathrm{E}(\mathrm{Z_t} | \hat{\alpha}_t))_{\mathrm{ij}} \mid \hat{\alpha}_t]\}.$$

برای $\mathrm{M_t} = 0$ ، امید شرطی در داخل $\{\ \}$ ، صفر است و در پی آن (۳۵) برقرار است.

بحث و نتیجه‌گیری

ویژگی وجود تابع کنترل بهینه که تنها از طریق آماره بسنده به داده‌ها وابسته است برای یک کلاس بزرگ از توابع زیان نیز برقرار است. در این مقاله روشی برای محاسبه آماره همسان ارائه شد. در حالتی که مدل گاوسی است، خطاهای مشاهدات دارای توزیع نرمال بوده و سامانه خطی است و در این حالت آماره آگاهی‌بخش که تقریباً همسان معیار ارائه شده برای آماره بسنده است و به تابع زیان اشاره دارد محاسبه شدند که در این مقاله دو کلاس از توابع زیان مورد بررسی قرار گرفتند. بررسی بسندگی به طور غیرمستقیم برای مشخص کردن دو ویژگی، همسانی و آگاهی‌بخشی به کار گرفته شد و ثابت شد اگر تابع زیان به آخرین مقدار بردار وضعیت بستگی داشته باشد، در این صورت براوردهای برون‌یابی شده از این مولفه‌ها آگاهی‌بخش هستند.

مراجع:

Blackwell, D. and Girshick, M. A. 1954, *Theory of Games and Statistical Decisions*, Wiley, New York.

Dassios, I. K. and Szajowski, K. J. 2016, Applied Mathematics and Computation, *Bayesian optimal control for a non-autonomous stochastic discrete time system, Appl. Math. Comput.*, 274, 556-564.

Deistler, M. and Scherrer, W. 2022, Time Series Models. Springer, Berlin.

Do, K. D. 2019, Inverse optimal control of stochastic systems driven by Lévy processes, *Automatica,* 107, 539-550.

Dynkin, E. B. 1961, Necessary and sufficient statistics for a family of probability distributions, *Selected Transl. Math. Statist. Probab.* 1, 17-40 (from Uspehi. Mat. Nauk., 1951).

Florentin, J. J. 1961, Optimal control of continuous time, Markov, stochastic systems, *J. Electron. Control* , 10, 473-488.

Girardin, V and Limnios, N. 2018, Applied Probability: from Random Sequences to Stochastic Processes, Springer, New York.

Ho, Y. C. and Chu, K. C. 1972, Team decision theory and information structures in optimal control problems: Part I, *IEEE T. Automat. contr.*, 17, 15-22.

Kalman, R. E. 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng.* 82, 35-45.

Lehmann, E. L., and Casella, G. 1998, Theory of Point Estimation, 2nd edition, Springer-Verlag, New York.

Loeve, M. 1955, *Probability Theory,* Van Nostrand, Princeton, New Jersey.

Mahajan, A. and Nayyar, A. 2015, Sufficient Statistics for Linear Control Strategies in Decentralized Systems with Partial History Sharing, *IEEE T. Automat. contr.*, 60, 2046-2056.

Ross, S. 2018, A First Course in Probability, 10th Edition, Verlag: Pearson.

Qing-Lai, W., Zhang, H. and Li-Li, C. 2009, Data-based Optimal Control for Discrete-time Zero-sum Games of 2-D Systems Using Adaptive Critic Designs, *Acta Automat. Sin.*, 35, 682-692.

Vassilina, G. K. 2021, Optimal Control Problem of Stochastic Systems, *Lobachevskii J. Math.*, 42, 641-648.

Xie, Q. Qi, L. and Zhang, H. 2020, Optimal Control for Stochastic Systems with Multiple Controllers of Different Information Structures, *IEEE T. Automat. contr.*, 1-1.

Zoppoli, R. 1977, Team Decision Theory in the Optimal Control of a Communication Network, *Aspects of Signal Processing With Emphasis on Underwater Acoustics,* 33, 631-638.

Similar and informative statistics and its applications

Shams[1]**, M., Hesamian, Gh.**[2]
[1]Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran,
[2]Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran 193953697, Iran.

Abstract: In the case of large amounts of information, the data should be summarized in such a way that no valuable information is lost. Sufficient statistics are used for this purpose. In this paper, by defining similar statistics, a method for calculating these statistics is presented. Informative statistics are then defined under several different loss functions. The concept of sufficiency is used to identify two characteristics, similarity and informativeness. Finally, under several different loss functions, in the case of Gaussian observation errors and linear systems, informative statistics are found.

Keywords: Similar statistics, informative statistics, time series.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10, 93C05, 62Bxx.