



Similar and Informative Statistics and Its Applications

M. Shams¹ *, Gh. Hesamian² 

1. Corresponding Author, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran,
* E-mail: mehdishams@kashanu.ac.ir
2. Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran 193953697, Iran, E-mail: gh.hesamian@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 7 May 2023

Received in revised form:

14 July 2023

Accepted: 19 August 2023

Published online:

10 July 2024

Keywords:

Similar statistics,
informative statistics,
time series.

ABSTRACT

Introduction

In the case of large amounts of information, the data should be summarized in such a way that no valuable information is lost. Sufficient statistics are used for this purpose.

Material and Methods

In this paper, after mentioning the history of the research done, first the necessary prerequisites, such as random variable, multivariate normal distribution, independence, conditional expectation, stochastic process, Markov process w.r.t. a natural filtration, time series analysis, minimal sufficient statistic, complete sufficient statistic, decision rule, loss function, risk function, classical and Bayesian methods were introduced. Then, similar and informative statistics were introduced in two sections. At the end, the results were summarized.

Results and discussion

In this paper, by defining similar statistics, a method for calculating these statistics is presented. Informative statistics are then defined under several different loss functions. The concept of sufficiency is used to identify two characteristics, similarity and informativeness. Finally, under several different loss functions, in the case of Gaussian observation errors and linear systems, informative statistics are found.

Conclusion

In this paper, the estimation problem under the specified loss function was analyzed using the concepts of similar and informative statistics. In the special case, the similar statistic will lead to the classic and usual definition of sufficiency.

How to cite: Shams, Mehdi, & Hesamian, Gholamreza, (2024). Similar and informative statistics and its applications. *Mathematical Researches*, **10** (2), 1 – 20.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



آماره‌های همسان و آگاهی‌بخش و کاربردهای آن

مه‌دی شمس^۱ *، غلام‌رضا حسامیان^۲

۱. نویسنده مسؤل، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران. * رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir
۲. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: gh.hesamian@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در حالتی که حجم اطلاعات زیاد است، داده‌ها باید به نحوی خلاصه شوند که هیچ اطلاعات ارزشمندی از دست نرفته باشد. برای این منظور از آماره بسنده استفاده می‌شود. در این مقاله با تعریف آماره همسان، روشی برای محاسبه این آماره‌ها ارائه شده است. سپس تحت چند تابع زیان مختلف، آماره‌های آگاهی‌بخش تعریف می‌شوند. برای مشخص کردن دو ویژگی، همسانی و آگاهی‌بخشی از مفهوم بسندگی استفاده می‌شود. در پایان تحت چند تابع زیان مختلف، در حالتی که خطاهای مشاهدات گاوسی و سامانه خطی است، آماره‌های آگاهی‌بخش پیدا می‌شوند.
تاریخ دریافت: 1402/2/17	
تاریخ بازنگری: 1402/4/23	
تاریخ پذیرش: 1402/5/28	
تاریخ انتشار: 1403/04/20	

واژه‌های کلیدی:

آماره همسان،
آماره آگاهی‌بخش،
سری‌های زمانی.

استناد: شمس، مه‌دی؛ و حسامیان، غلام‌رضا (1403). آماره‌های همسان و آگاهی‌بخش و کاربردهای آن. پژوهش‌های ریاضی، 10 (2)، 1 - 20.



مقدمه

جستجو برای یافتن آماره بسنده در درجه اول یک مسئله کاهش داده است که منجر به خلاصه کردن داده‌ها در یک آماره به گونه‌ای می‌شود که هیچ اطلاعاتی راجع به پارامتر مجهول مفقود نشود. یک تابع کنترل بهینه که تنها از طریق آماره بسنده به داده‌ها وابسته است وجود دارد و در عمل، این ویژگی باید برای یک رده بزرگ از توابع زیان برقرار باشد. در این مقاله تحلیل‌ها تحت رده گسترده‌ای از توابع زیان مورد بررسی قرار خواهد گرفت که از بین این توابع زیان، خواص مشخصی مانند معنی‌داری و وجود مینی‌موم مورد نیاز خواهد بود.

مسئله کنترل در سامانه‌های تصادفی در تحقیقات زیادی از جمله دُو (2019)، شی و ژانگ (2020) و واسیلینا (2021) مورد بررسی قرار گرفته است. کاربرد نظریه تصمیم برای کنترل سامانه‌های تصادفی توسط فلورنتین (1961) پیشنهاد شده و در تحقیقاتی نظیر زُپولی (1977) و هُو و چو (1972) مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت واضح‌ترین تفاوت با نظریه تصمیم، عدم وجود فضای پارامتر در مسئله کنترل است. به منظور تبدیل مسئله کنترل به یک مسئله نظریه تصمیم استاندارد، از دیدگاه بیز استفاده می‌شود و پارامتر به عنوان یک متغیر تصادفی با یک توزیع پیشین در نظر گرفته می‌شود که از جمله این تحقیقات می‌توان به داسیوس و زاجوفسکی (2016) اشاره کرد. یکی از مسائل مورد علاقه در این بحث مسئله برآورد است. در این راستا بسندگی در راهبردهای کنترل خطی در ماهاجان و نایار (2015) مورد بررسی قرار گرفته است. در کالمن (1960) مسئله پالایش خطی و پیش‌بینی مورد مطالعه قرار گرفته شده است. یکی از دلایل عدم تمایل محققان در این شاخه این است که ماهیت یک تابع کنترل منجر به سردرگمی خواهد شد. به عنوان مثال، در کار بر روی کنترل فرایند مارکف در فلورنتین (1961)، لازم است نتیجه بگیریم که بردار کنترل باید یک تابع از بردار وضعیت لحظه‌ای باشد، چون در غیر این صورت فرایند دیگر دارای خاصیت مارکف نیست. برای رفع این مشکل از دیدگاه نظریه تصمیم، استفاده از توابع کنترل تصادفی پیشنهاد می‌شود. مسئله کنترل می‌تواند به عنوان یک بازی دو نفره مجموع صفر نیز در نظر گرفته شود که در آن راهبرد تصادفی طبیعت شناخته شده است. با این حال، یک شناخت مقدماتی در مورد این نوع از بازی می‌تواند به طور موثر در مسئله کنترل موثر باشد (کین-لای و همکاران، 2009).

در این مقاله، پس از ارائه مقدمه و اهداف و پیش‌نیازها، در بخش اول، مسئله برآورد مورد بحث قرار گرفته است که کاملاً از تابع زیان مستقل است. بعد از تعریف آماره همسان، روشی برای محاسبه آن ارائه شده است. در پایان بخش اول، حالت گاوسی معرفی شده است، که در آن خطاهای مشاهدات دارای توزیع نرمال بوده و سامانه خطی است. در بخش دوم، دو رده از توابع زیان و همچنین آماره آگاهی‌بخش تعریف شده است. این تعریف به تابع زیان اشاره دارد و تقریباً همسان معیاری است که برای آماره بسنده ارائه شده است. اصطلاح آماره بسنده به طور غیرمستقیم برای مشخص کردن دو ویژگی، همسانی و آگاهی‌بخشی استفاده می‌شود. در نهایت نشان داده می‌شود اگر تابع زیان به آخرین مقدار بردار وضعیت بستگی داشته باشد، در این صورت برآوردهای برون‌یابی شده از این مولفه‌ها آگاهی‌بخش هستند.

اکنون مفاهیم و اصطلاحات مورد نیاز در مقاله تعریف می‌شود.

هر تابع اندازه‌پذیر از فضای نمونه به اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گویند که برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته به ترتیب تابع جرم احتمال و تابع چگالی تعریف می‌شود. لذا برای متغیر تصادفی پیوسته X ، تابع نامنفی f را یک تابع چگالی گویند، هرگاه برای هر دو عدد حقیقی $a < b$ در شرط

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

صدق کند. در حالت‌هایی که با بیش از یک متغیر تصادفی سروکار داریم، از تابع جرم احتمال توأم و تابع چگالی توأم یاد می‌کنیم. تابع چگالی گاوسی (نرمال) چندمتغیره به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\mathbf{S}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

و توزیع آن را توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس-کواریانس \mathbf{S} نامند. برای متغیرهای تصادفی پیوسته، تابع چگالی احتمال شرطی Y به شرط $X = x$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

که در آن $f_X(x)$ و $f_{X,Y}(x,y)$ را به ترتیب تابع چگالی توأم و حاشیه‌ای (کناری) گویند. دو متغیر تصادفی را مستقل گویند، هرگاه تابع احتمال توأم آن‌ها را بتوان به صورت حاصل ضرب توابع حاشیه‌ای آن‌ها نوشت، یا به طور معادل متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند، هرگاه برای هر x و y ، $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$. امید شرطی Y به شرط $X = x$ نیز به صورت $E(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y) dy$ تعریف می‌شود (راس، 2018).

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی که با یک اندیس (گسسته یا پیوسته) مشخص شده باشند را فرایند تصادفی نامند. در حالتی که مجموعه اندیس یک فرایند تصادفی پیوسته باشد و مقادیر آینده فرایند با توجه به گذشته و حال، فقط به زمان حال بستگی داشته باشد، آن را فرایند مارکف گویند. به عبارت دیگر فرایند تصادفی $\{X_t\}_{t \in \mathbb{I}_+}$ با فضای حالت E را فرایند مارکف نسبت به پالایش طبیعی $\{\mathbf{F}_t\}_{t \in \mathbb{I}_+}$ گویند، هرگاه برای اعداد حقیقی و نامنفی s و t و هر $j \in E$ ، تقریباً همه‌جا تساوی $P(X_{s+t} = j | \mathbf{F}_s) = P(X_{s+t} = j | X_s)$ برقرار باشد. به عنوان مثال، فرایندهای تصادفی با نموای مستقل نظیر حرکت براونی و فرایند پواسون، فرایند مارکف هستند. در یک فرایند مارکف همگن $\{X_t\}_{t \in \mathbb{I}_+}$ ، احتمال تغییر وضعیت (انتقال) از حالت $i \in E$ به $j \in E$ در زمان t را به صورت

$$P_t(i, j) = P(X_{t+h} = j | X_h = i)$$

تعریف می‌کنند (گیراردین و لیمنیوس، 2018). تحلیل سری‌های زمانی معمولاً به داده‌هایی مرتبط می‌شود که به طور متوالی به هم وابسته‌اند و از این رو این شاخه در پیش‌بینی کاربرد داشته و همچنین ترتیب مشاهدات دارای اهمیت است. به طور خلاصه، یک سری زمانی مجموعه مشاهداتی است که بر حسب زمان مرتب شده باشند (دیستلر و شرر، 2022).

آماره، تابعی از نمونه تصادفی است که اطلاعات مربوط به چند متغیر تصادفی را در یک متغیر تصادفی فشرده می‌سازد. آماره بسنده، به گونه‌ای داده‌ها را خلاصه و فشرده می‌کند که تمام اطلاعات نمونه پیرامون پارامتر حفظ شده و اطلاعی از دست نرود. آماره T که تابعی از نمونه تصادفی (دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع) X_1, \dots, X_n است را برای q بسنده گویند، هرگاه به ازای هر q ، توزیع شرطی $X_1, \dots, X_n | T = t$ برای همه مقادیر t به پارامتر q بستگی نداشته باشد. خلاصه کردن داده‌ها زمانی مجاز است که اطلاعات در آنها حفظ شود که آن تابع را آماره بسنده مینیمال نامند. در حقیقت آماره بسنده T را بسنده مینیمال نامند، هرگاه تابعی از هر آماره بسنده دیگر باشد. بیشترین فشرده‌سازی توسط آماره کامل انجام می‌شود. آماره S را G -کامل (G یک خانواده از توابع با مقادیر حقیقی است) گویند، هرگاه برای هر تابع G $E_q(g(S)) = 0$ ، $q \hat{A} Q$ ، اگر به ازای هر Q $E_q(g(S)) = 0$ ، $q \hat{A} Q$ ، آن‌گاه به ازای هر Q $E_q(g(S)) = 0$ ، $q \hat{A} Q$ ، $P_q[g(S) = 0] = 1$ (لی‌من و کسلا، 1998).

قاعده تصمیم، تابعی اندازه‌پذیر از فضای نمونه به فضای عمل است، به طوری که به یک مشاهده نمونه تصادفی عملی را نسبت می‌دهد. فضای عمل معین می‌کند که مسئله تصمیم مورد مطالعه یک مسئله برآورد نقطه‌ای و یا فاصله اطمینان و یا آزمون فرض است. برای مثال، در برآورد نقطه‌ای، عمل‌ها، حدس نقاط و در آزمون فرض، دو عمل، پذیرش فرض صفر یا رد آن هستند. همچنین در مسئله برآورد نقطه‌ای، تابع تصمیم همان برآوردگر و در آزمون فرض، تابع تصمیم همان تابع آزمون است. تابع نامنفی $L(q, a)$ از فضای حاصل ضرب دکارتی فضای پارامتر در فضای عمل به اعداد حقیقی مثبت را تابع زیان می‌نامند که نشان‌دهنده زیان ناشی از اخذ تصمیم a است هنگامی که در حالت واقعی q باشد (لی‌من و کسلا، 1998). انتخاب تابع زیان بستگی به مسئله مورد نظر دارد و یکی از متداول‌ترین آن‌ها تابع زیان توان دوم خطا است. تابع زیان ملاکی برای ارزیابی یک تصمیم است. رویکرد کلاسیک برای اخذ چنین تصمیمی، مینیمم‌سازی متوسط زیان است که این متوسط زیان را تابع مخاطره تصمیم $d(X)$ می‌نامند و به صورت $R(q, d(X)) = E(L(q, d(X)))$ تعریف می‌شود (لی‌من و کسلا، 1998). در روش‌های کلاسیک پارامتر θ یک مقدار ثابت و نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و یک نمونه تصادفی جمع‌آوری می‌شود تا بر اساس آن در مورد پارامتر تصمیم‌گیری شود. در روش بی‌زی θ کمیتی در نظر گرفته می‌شود که خود یک متغیر تصادفی، با مقدار مشاهده شده θ است و تغییرات آن توسط یک توزیع پیشین مشخص می‌شود. این توزیع پیشین بر اساس اعتقادات و تجربیات قبلی آزمایش‌گر یا اطلاعاتی در مورد توزیع پیشین (مانند گشتاورها) و یا ساختار مشاهدات و... تعیین می‌شود.

1. آماره‌های همسان

در این بخش، آماره همسان تعریف شده و روشی برای محاسبه آن ارائه شده است. در پایان حالت گاوسی معرفی شده که در آن خطاهای مشاهدات دارای توزیع نرمال بوده و سامانه خطی است.

فرض کنید فضای حالت، یک فضای برداری اقلیدسی n -بعدی مثل \mathbf{X} باشد. متغیرهای X_t ، یک سری زمانی تصادفی به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\begin{aligned} x_0(w_0) &= x_0 \\ x_{t+1} &= \varphi_t(x_t, u_t, w_{t+1}), t = 0, \dots, T \\ u_t &= u_t(z_0, \frac{1}{4}, z_t; u_0, \frac{1}{4}, u_{t-1}), t = 0, \dots, T \\ z_t &= z_t(x_t, \hat{\theta}_t), t = 0, \dots, T \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن w_t ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های معلوم هستند که خطاهای مکانیکی نامیده می‌شود، $\hat{\theta}_t$ ها خطای مشاهدات مستقل با توزیع معلوم، Z_t ها مشاهدات و u_t ها بردار کنترل هستند. توابع φ_t و Z_t معلوم و توابع یا راهبردهای کنترل $u_t(\cdot)$ در فضای برداری کنترل یعنی U_t (فضای عمل یا تصمیم) هستند. برای راحتی فرض کنید $\omega = (w_0, \frac{1}{4}, w_{T+1}; \hat{\theta}_0, \frac{1}{4}, \hat{\theta}_T)$.

حرف بزرگ $Z_t = z_0, \frac{1}{4}, z_t$ و $U_t = u_0, \frac{1}{4}, u_t$ برای نشان دادن به ترتیب مشاهدات و بردارهای کنترل تا جمله t و شامل آن است. یک قاعده کنترل $\{u\} = \{u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_T(\cdot)\}$ شامل $T+1$ تابع کنترل $u_t(Z_t, U_{t-1})$ است که برای تمام مقادیر ممکن (Z_t, U_{t-1}) تعریف می‌شوند. البته این فرض ضروری نیست، چون U_{t-1} به وسیله Z_{t-1} و $\{u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot)\}$ تعیین شده است. اگر $u_t(\cdot)$ فقط تابعی از X_t یا Z_t باشد، دومین معادله سامانه (1) یک فرایند مارکف است، ولی در حالت کلی X_t یک فرایند مارکف نیست. ساختار مسئله به وسیله تعریف تابع زیان $L(x_{T+1}, u_0, \frac{1}{4}, u_T) = L(x_{T+1}, U_T)$ کامل می‌شود. نتیجه اصلی بیان شده در قضیه 3.2 به راحتی می‌تواند برای تابع زیان $\hat{a} \sum_{\tau=0}^{T+1} L_\tau(x_\tau, u_0, \frac{1}{4}, u_{\tau-1})$ گسترش یابد که برای مثال مسئله سوخت محدود شده

$$L_\tau(x_\tau, u_0, \frac{1}{4}, u_{\tau-1}) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\tau-1} |x_s|^2 \\ \sum_{s=0}^{\tau-1} |u_s| \leq c \end{cases} \quad (2)$$

را می‌توان در نظر گرفت. این روش برای تابع زیان مربعی تعمیم یافته

$$\hat{a} \sum_{\tau} x_\tau^2 + \hat{a} \sum_{\tau} u_\tau$$

صادق نیست که در اینجا Q_{TS} یک ماتریس $n \times n$ است که برای $t = 1, \dots, T$ ، $Q_{TS}^{-1} \mathbf{0}$. در این حالت توزیع شرطی بردار وضعیت بسنده نیست. در واقع باید قبل از هر نقطه کنترل، همه بردارهای قبلی را مجدداً برآورد کنیم. به راحتی می‌توان آماره‌ای که برای این توابع زیان بسنده است را حدس زد. با این حال، از آنجا که این نوع توابع زیان در عمل کاربرد ندارند، محققان علاقه‌ای به بررسی آن‌ها ندارند.

توجه داشته باشید که فضای کنترل محدود شده می‌تواند مانند (2)، با قرار دادن مقادیر مثبت بینهایت برای تابع زیان بر روی مقادیر کنترل که مجاز نیست، استفاده شود. برای راحتی فرض کنید فضای کنترل برابر است با $\mathbf{U}_t = \mathbf{U}$ ، $t = 0, 1/4, T$

قاعده کنترل $\{\hat{u}\}$ برای L بهینه است، هرگاه

$$E(L(\omega; \{\hat{u}\})) = \inf_{\{u\}} E(L(\omega; \{u\})). \quad (3)$$

علامت $L(\omega; \{u\})$ نشان می‌دهد که تابع زیان $L(x_{T+1}, u_0, 1/4, u_T) = L(x_{T+1}, U_T)$ به صورت یک تابع از ω تبدیل شده و نماد جایگزین آن $L(\omega; \{u\}) = L(\omega; u_0(\cdot), 1/4, u_T(\cdot))$ است. این نماد به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته و نشان می‌دهد L در واقع یک تابع وابسته به توابع $u_0(\cdot), 1/4, u_T(\cdot)$ است و به مقادیر محاسبه شده در نقاط مشخص بستگی ندارد و این حقیقت در اصل برنامه‌نویسی پویا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. همچنین در نظریه تصمیم به کمیت $E(L(\omega; \{u\}))$ تابع مخاطره قاعده کنترل $\{u\}$ گویند و از این رو طبق (3)، قاعده کنترل $\{\hat{u}\}$ یک قاعده کنترل با کمترین مخاطره است.

توزیع شرطی x_t به شرط Z_t به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$P(x_t \in A | Z_t; u_0(\cdot), 1/4, u_{t-1}(\cdot)) \quad (4)$$

که در آن A یک مجموعه بورل در فضای برداری \mathbf{X} است. توابع کنترل $u_0(\cdot), 1/4, u_{t-1}(\cdot)$ باید مشخص باشند، چون در غیر این صورت توزیع x_t و $Z_t, 1/4, Z_0$ تعریف نخواهد شد. در قضیه 1.1، ثابت می‌شود، توزیع شرطی (4) به قاعده کنترل $\{u_0(\cdot), 1/4, u_{t-1}(\cdot)\}$ تنها از طریق مقدار U_{t-1} در Z_{t-1} بستگی دارد. اگر چه در این روش سومین معادله (1) تعریف نمی‌شود، ولی قاعده کنترل $u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot)$ همیشه می‌تواند توسط جایگزین کردن به صورت بازگشتی، به عنوان یک تابع $U_t(Z_t)$ از Z_t نوشته شود.

دومین معادله سامانه (1) به همراه با توزیع w_{t+1} ، احتمال تغییر وضعیت زیر را تعریف می‌کند:

$$P[x_{t+1} \in A | x_t, Z_t; u_0(\cdot), 1/4, u_{t-1}(\cdot)] = P_t(A | x_t, u_t(Z_t)). \quad (5)$$

توزیع $\hat{\theta}_t$ با معادله مشاهدات چهارمین معادله (1) تعریف می‌شود:

$$P[z_t \hat{=} B | x_t, Z_{t-1}; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)] = Q_t(B | x_t). \quad (6)$$

معادله توزیع شرطی (4) در زمان $t + 1$ با استفاده از مقادیر (5)، (6) و توزیع شرطی (4) در زمان t حاصل می‌شود. توزیع x_{t+1} به شرط Z_t به وسیله انتگرال‌گیری روی x_t از توزیع توأم x_t و x_{t+1} به شرط Z_t از فرمول (4) و (5) محاسبه می‌شود:

$$P[x_{t+1} \hat{=} A | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot)] = \int_{\mathcal{X}} P_t \hat{=} A | x_t, u_t(Z_t) P(dx_t | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot)).$$

توزیع توأم x_{t+1} و Z_{t+1} به شرط Z_t از حاصل ضرب توزیع شرطی Z_{t+1} به شرط x_{t+1} و Z_t در (6) در توزیع حاشیه‌ای x_{t+1} به شرط Z_t محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P[x_{t+1} \hat{=} A, z_{t+1} \hat{=} B | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)] &= \int_{\mathcal{X}} Q_{t+1}(B | x_{t+1}) P(dx_{t+1} | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)) \\ &= \int_{\mathcal{X}} Q_{t+1}(B | x_{t+1}) \int_{\mathcal{X}} P_t(dx_{t+1} | x_t, u_t(Z_t)) P(dx_t | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)). \end{aligned} \quad (7)$$

توزیع شرطی x_{t+1} به شرط Z_{t+1} ، توسط توزیع توأم به عنوان یک مشتق رادون-نیکودیم تصادفی تعیین می‌شود (برای مثال ر.ک. لواو، 1955، ص 341):

$$\begin{aligned} P[x_{t+1} \hat{=} A | Z_{t+1}; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)] \\ = \frac{P[x_{t+1} \hat{=} A, dz_{t+1} | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)]}{P[x_{t+1} \hat{=} X, dz_{t+1} | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)]}. \end{aligned} \quad (8)$$

در حالتی که توزیع شرطی مشاهدات Z_{t+1} به شرط وضعیت x_{t+1} دارای چگالی نسبت به اندازه لبگ باشد که در برابری

$$Q_{t+1}(z_{t+1} \hat{=} B | x_{t+1}) = \int_{\mathcal{Z}} q_{t+1}(z_{t+1} | x_{t+1}) dz_{t+1}$$

صدق کند، معادله $\{u\} = \{u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_T(\cdot)\}$ در (19) جایگزین می‌شود و داریم:

$$\begin{aligned} P[x_{t+1} \hat{=} A | Z_{t+1}; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)] \\ = \frac{\int_{\mathcal{Z}} q_{t+1}(z_{t+1} | x_{t+1}) \int_{\mathcal{X}} P_t(dx_{t+1} | x_t, u_t(Z_t)) P(dx_t | Z_t; u_0(\cdot), \dots, u_t(\cdot))}{\int_{\mathcal{Z}} q_{t+1}(z_{t+1} | x_{t+1}) \int_{\mathcal{X}} P_t(dx_{t+1} | x_t, u_t(z_t)) P(dx_t | z_t; u_0(\cdot), \dots, u_t(\cdot))}. \end{aligned} \quad (9)$$

این یک رابطه بازگشتی برای به‌روز رسانی با یک گام زمانی توزیع شرطی x_t به شرط Z_t را فراهم می‌کند و به مشاهدات جدید Z_{t+1} و مقدار کنترل $u_t(Z_t)$ در Z_t و نه کل تابع کنترل $u_t(\cdot)$ نیاز دارد. در ادامه فرض کنید توزیع P_t و q_{t+1} معلوم هستند. رابطه (9) از نظر مسئله کنترل بسیار مهم است. برای یک سامانه تصادفی که در این مقاله در نظر گرفته می‌شود، توابع کنترل ثابت یا معلوم هستند و مسئله برآورد بردار وضعیت از داده‌های موجود با محاسبه توزیع شرطی x_t به شرط Z_t و u_{t-1} حل می‌شود. رابطه (9) یک روش برای محاسبه این توزیع فراهم می‌کند. اگر تاریخچه بردار وضعیت از

داده‌ها بازسازی شود، باید توزیع‌های شرطی x_t به شرط Z_T و U_{T-1} ، $t = 0, \dots, T$ بدست آید. در قضیه 1.1، ثابت می‌شود، توزیع شرطی (4) به قاعده کنترل $\{u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot)\}$ تنها از طریق مقدار U_{t-1} در Z_{t-1} بستگی دارد.

قضیه 1.1. توابع $G_t(A | Z_t, U_{t-1})$ ، $t = 0, \dots, T$ وجود دارند به طوری که برای همه توابع کنترل $\{u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot)\}$ داریم

$$P[x_t \hat{=} A | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot)] = G_t(A | Z_t, U_{t-1}(Z_{t-1})) \quad \text{a.s. } Z_t.$$

اثبات: برای $t = 0$ ، توزیع توأم x_0 و Z_0 به قاعده کنترل بستگی ندارد:

$$P(x_0 \hat{=} A, Z_0 \hat{=} B) = \dot{Q}_0(B | x_0) P_0(dx_0)$$

و توزیع شرطی $G_0(A | Z_0)$ را می‌توان به این صورت تعریف کرد. اگر فرض استقرای این باشد که حکم قضیه برای t برقرار باشد، از این رو $G_{t+1}(A | Z_{t+1}, U_t)$ از $G_t(A | Z_t, U_{t-1})$ ، Z_{t+1} و u_t با روابط بازگشتی داده شده در (8)، (7) و یا (9) ساخته می‌شود و در پی آن حکم اثبات می‌شود. ■

از این که توزیع Z_t و x_t به طور کامل مشخص نیستند، توابع $G_t(x_t \hat{=} A | Z_t, U_{t-1})$ به صورت احتمال شرطی قابل محاسبه نیستند.

اگر در هر مرحله تمام داده‌ها در دسترس نباشند، قضیه 1.1 به کار نمی‌رود و توزیع شرطی x_t به شرط آماره $Y_t(Z_t)$ یعنی

$$P(x_t \hat{=} A | Y_t(Z_t); u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_{t-1}(\cdot))$$

به توابع کنترل و نه تنها به مقادیرشان در Z_t بستگی دارد.

آماره $X_t(Z_t, U_{t-1})$ که یک تابع از داده‌های موجود در زمان t است را همسان با توزیع $G_t(A | Z_t, U_{t-1})$ نامند، هرگاه توزیع تنها از طریق X_t به داده‌ها بستگی داشته باشد، یعنی

$$G_t(A | Z_t, U_{t-1}) = G_t(A | X_t(Z_t, U_{t-1})) \quad (10)$$

و علاوه بر این، $X_t(Z_t, U_{t-1})$ را می‌توان از اطلاعات راجع به توزیع $G_t(\cdot | Z_t, U_{t-1})$ بدست آورد. به عنوان مثال، در حالت گاوسی، توزیع شرطی $G_t(A | Z_t, U_{t-1})$ ، نرمال با میانگین \hat{x}_t و کوواریانس K_t است که کوواریانس به داده‌ها بستگی ندارد. بنابراین میانگین $\hat{x}_t(Z_t, U_{t-1})$ همسان با توزیع G_t است که در آن:

$$G_t(A) = \dot{Q}_{x_t \hat{=} A} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |K_t|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_t - \hat{x}_t) \mathcal{C} K_t^{-1} (x_t - \hat{x}_t) \right\} dx_t$$

و البته می‌توان میانگین را دوباره به صورت $\hat{x}_t = \int x G_t(dx)$ بازیابی کرد.

یافتن یک آماره همسان X_t که تا حد امکان ساده باشد، یک مزیت به حساب می‌آید. با این حال در صورت قادر نبودن به یافتن این آماره، توزیع $G_t(A)$ همیشه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و از این رو با این دیدگاه یک آماره همسان X_t همیشه وجود دارد.

این تعریف از آماره همسان، می‌تواند به آماره بسنده کامل از دینکین (1951) و آماره بسنده مینیمال از بلاکول و گیرشیک (1954) مرتبط باشد. به منظور انجام این کار لازم است که X_t را به عنوان پارامتر θ مشخص کنیم. توزیع X_t ممکن است به عنوان یک توزیع پیشین بیز در نظر گرفته شود که با توجه به بستگی داشتن آن به توابع کنترل (یا راهبردهای) $u_0(\cdot), \dots, u_T(\cdot)$ رضایت‌بخش نیست. با این وجود اگر توزیع‌ها دارای چگالی باشند و فضای پارامتر روی مقادیر X_t که $P(X_t) > 0$ تعریف شده باشد، در این صورت چگالی مشاهدات در شرط زیر صدق می‌کند:

$$P(Z_t, U_{t-1} | x_t) = \frac{g_t(x_t | X_t)}{p(x_t)} p(Z_t, U_{t-1})$$

که تعریف معمول از بسندگی است. شرط برقراری لزوم، معادل با این است که X_t تابعی از $(\cdot | X_t)$ ، چگالی توزیع $G_t(A | X_t)$ باشد.

قضیه 2.1. اگر $X_t(Z_t, U_{t-1})$ همسان با توزیع شرطی $G_t(A | Z_t, U_{t-1})$ باشد، پس X_t در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$X_{t+1} = f_t(X_t, u_t, z_{t+1}). \quad (11)$$

اثبات: توزیع $G_{t+1}(A | Z_{t+1}, U_t)$ را می‌توان از روابط بازگشتی برای توزیع‌های شرطی داده‌شده در (7)، (8) یا (9) که در آن

$$G_t(A | Z_t, U_{t-1}) = G_t(A | X_t)$$

پیدا کرد. بنابراین $G_{t+1}(A)$ یک تابع از X_t ، u_t و z_{t+1} است. با استفاده از فرض همسانی، X_{t+1} توسط $G_{t+1}(\cdot)$ محاسبه خواهد شد. ■

به عنوان مثال در حالت خاص گاوسی، ϕ_t و z_t خطی هستند:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \phi_t x_t + u_t + w_{t+1}, \quad t = 0, \dots, T \\ z_t &= H_t x_t + \hat{\theta}_t, \quad t = 0, \dots, T \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن w_t و $\hat{\theta}_t$ بردارهای گاوسی مستقل با میانگین صفر و ماتریس‌های کوواریانس

$$\begin{aligned} E(w_t w_t^T) &= C_t, \\ E(\hat{\theta}_t \hat{\theta}_t^T) &= R_t \end{aligned} \quad (13)$$

هستند. در فرمول‌های اخیر H_t و ϕ_t به ترتیب ماتریس‌های $n \times m$ و $n \times n$ و x_0 دارای توزیع $N(\hat{x}_0, K_0)$ هستند. در مورد توابع کنترل $u_t(\cdot)$ نیاز به در نظر گرفتن هیچ فرضی نیست. با توجه به (12) داریم:

$$P(x_{t+1} | x_t, u_t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|C_t|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_{t+1} - \phi_t x_t - u_t)^T C_t^{-1} (x_{t+1} - \phi_t x_t - u_t) \right\}$$

و از تعریف مشاهدات در معادله دوم (12) داریم:

$$q_t(z_t | x_t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{|R_t|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_t - H_t x_t)^T R_t^{-1} (z_t - H_t x_t) \right\}$$

با استفاده از این توابع در روابط بازگشتی برای G_t در (9)، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $g_t(x_t | Z_t, U_{t-1})$ یک چگالی گاوسی با میانگین

$$\hat{x}_t = \int x_t g(x_t | Z_t, U_{t-1}) dx_t$$

و کوواریانس

$$K_t = \int (x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T g(x_t | Z_t, U_{t-1}) dx_t$$

است. طبق (9)، روابط زیر برقرار هستند (کالمن، 1960):

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= \phi_t \hat{x}_t + u_t + K_{t+1} H_{t+1}^T R_{t+1}^{-1} (z_{t+1} - H_{t+1} u_t - H_{t+1} \phi_t \hat{x}_t), \\ K_{t+1}^{-1} &= H_{t+1}^T R_{t+1}^{-1} H_{t+1} + (C_t + \phi_t K_t \phi_t^T)^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

در این حالت، آماره همسان \hat{x}_t است. ماتریس K_t از داده Z_t و کنترل U_{t-1} مستقل است، بنابراین می‌توان آن را به عنوان یک ثابت در نظر گرفت. در این حالت رابطه (11) در قضیه 2.1 توسط معادله تفاضلی برای میانگین شرطی (14) محاسبه می‌شود.

این فرمول شامل حالت‌های کنترل غیرخطی است، اما شامل حالت مهمی که در آن خطای مکانیکی w_t به کنترل بستگی داشته باشد نیست.

2. آماره‌های آگاهی‌بخش

در این قسمت تحت دو رده از توابع زیان، آماره آگاهی‌بخش محاسبه می‌شود.

یک آماره $Y_t(Z_t, U_{t-1})$ ، $t = 0, 1/4, T$ نسبت به مسئله کنترل تعریف شده توسط L آگاهی‌بخش نامیده می‌شود، هرگاه توابع $K_t^*(Z_t, U_{t-1})$ و $L_t^*(Y_t, u_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot))$ وجود داشته باشند به طوری که:

$$\begin{aligned} & E[L | Z_t; u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot), \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)] \\ & = K_t^*(Z_t, U_{t-1}) + L_t^* \hat{E} Y_t(Z_t, U_{t-1}), u_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot) \Big|_{t=0, 1/4, T} \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن U_{t-1} و u_t مقادیری از $u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot)$ در Z_t هستند. معادله (15) باید برای هر $u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot)$ و $\bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)$ که تابعی از Y_s هستند برقرار باشد، یعنی:

$$\bar{u}_s(Z_s, U_{s-1}) = \bar{u}_s(Y_s(Z_s, U_{s-1})), s = t+1, 1/4, T. \quad (16)$$

دلیل این تعریف کمی مبهم است. این حقیقت رضایت‌بخش‌تر است، هرگاه Y_s برای مسئله کنترلی آگاهی‌بخش باشد که قاعده کنترل $\hat{u}_0(Y_0), \dots, \hat{u}_T(Y_T)$ که از دیدگاه تعریف شده در (3) بهینه است وجود داشته باشد و به داده‌ها فقط از طریق Y_t بستگی داشته باشد.

طرز ساختن این کنترل بهینه در ذیل شرح داده خواهد شد:

اگر Y_t به معنای تعریف‌شده آگاهی‌بخش باشد، در این صورت یک کنترل بهینه می‌تواند به صورت بازگشتی با شروع از $t = T$ و در هر مرحله تعریف شود:

$$\hat{u}_t^*(Y_t) = u_t^* \quad (17)$$

و مقدار u_t در U عبارت زیر را مینیمم کند:

$$L_t^*(Y_t, u_t; \hat{u}_{t+1}^*(\cdot), \dots, \hat{u}_T^*(\cdot)). \quad (18)$$

در بیشتر موارد، این روش به صورت نظری انجام می‌شود. برای حالت گاوسی که در آن آماره بسنده از ابعاد کوچک را می‌توان پیدا کرد، این روش کاملاً امکان‌پذیر است. با این حال با در نظر نگرفتن محدودیت روی تابع زیان، این ساخت و ساز را نمی‌توان به طور دقیق توجیه کرد. اکنون سوال برای وجود نقطه u_t^* ، اندازه‌پذیری و انتگرال‌پذیری توابع کنترل $\hat{u}_t^*(Y_t)$ و توابع زیان شرطی L_t^* مطرح می‌شود. این نوع مسائل را می‌توان با محدودیت‌های نظم روی تابع زیان و سایر توابع تعریف شده در (1) حل کرد که در این مقاله به این موارد پرداخته نمی‌شود.

در این بخش فرض می‌شود که $X_t(Z_t, U_{t-1})$ با توزیع شرطی x_t به شرط Z_t و U_{t-1} همسان است و از این رو توسط قضیه 2.1، یک رابطه بازگشتی (11) وجود دارد.

قضیه 2-3-8 از بلاکول و گیرشیک (1954) که ثابت می‌کند آماره بسنده، آگاهی‌بخش است مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، زیرا در اینجا تابع زیان، نه تنها به عمل و پارامتر، بلکه به متغیرهای تصادفی وابسته است.

قضیه 1.2. برای توابع زیان $L(x_{T+1}, U_T)$ آماره $Y_t = (x_t, U_{t-1})$ ، $t = 0, 1/4, T$ آگاهی‌بخش است.

اثبات: برای $L(x_{T+1}, U_T)$ ، با در نظر گرفتن $K_t^* = 0$ و محاسبه L_t^* ، رابطه (15) برقرار است و از این رو حکم اثبات

می‌شود. (اگر قضیه به توابع زیان $\int_{\tau=0}^{T+1} L_\tau(x_\tau, u_0, 1/4, u_{\tau-1})$ گسترش یابد، این عبارت وجود دارد.) برای $t = T$:

$$\begin{aligned} E[L(x_{T+1}, U_T) | Z_T; u_0(\cdot), 1/4, u_T(\cdot)] &= E\{L[\varphi(x_T, u_T, w_{T+1}), U_T] | Z_T; u_0(\cdot), 1/4, u_T(\cdot)\} \\ &= \int \int L[\varphi(x_T, u_T(Z_T), w_{T+1}), U_T(Z_T)] G(dx_T | X_T) P(dw_{T+1}) \\ &= L^*(X_T, U_{T-1}, u_T). \end{aligned}$$

گام دوم به قضیه 1.1 و این حقیقت است که Z_T و w_{T+1} مستقل هستند بستگی دارد. به عنوان فرض استقرا فرض کنید که (15) برای $t+1$ برقرار است، و $\bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)$ با توجه به تعریف یک آماره آگاهی‌بخش (16) به $Y_s = (x_s, U_{s-1})$ بستگی داشته باشند. از این رو

$$\begin{aligned} E[L | Z_t; u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot), \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)] \\ = E\{E(L | Z_t, z_{t+1}; u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot), \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)) | Z_t; u_0(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

با توجه فرض استقرا، امید شرطی داخلی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$L_{t+1}^*(X_{t+1}, U_t, \bar{u}_{t+1}(X_{t+1}, U_t); \bar{u}_{t+2}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)). \quad (20)$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (11) در قضیه 2.1، X_{t+1} تابعی از X_t و Z_{t+1} ، u_t است. با استفاده از معادله مشاهدات چهارمین معادله (1)، Z_{t+1} تابعی از X_{t+1} و $\dot{\theta}_{t+1}$ است که نظر به معادله سامانه (1) (دومین معادله)، X_{t+1} می‌تواند به عنوان یک تابع از X_t, u_t, X_t, w_{t+1} و $\dot{\theta}_{t+1}$ در نظر گرفته شود:

$$X_{t+1}(X_t, u_t, x_t, w_{t+1}, \dot{\theta}_{t+1}) = \Phi_t(X_t, u_t, z_{t+1}(\varphi_t(x_t, u_t, w_{t+1}), \dot{\theta}_{t+1})). \quad (21)$$

مشابه با قبل $\dot{\theta}_{t+1}$ ، w_{t+1} و Z_t مستقل هستند. با جای‌گذاری (20) به عنوان امید شرطی داخلی در (19) و همچنین استفاده از (21) برای X_{t+1} داریم:

(22)

$$\begin{aligned}
& E(L | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot), \bar{u}_{t+1}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot)) \\
&= \int \int \int L_{t+1}^*(X_{t+1}(X_t, u_t, x_t, w_{t+1}, \delta_{t+1}), U_t, \bar{u}_{t+1}(X_{t+1}(X_t, u_t, x_t, w_{t+1}, \delta_{t+1}), U_t); \bar{u}_{t+2}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot)) \\
&\quad \cdot P(d\delta_{t+1}) P(dw_{t+1}) G_t(dx_t | X_t) \\
&= L_t^*(X_t, U_{t-1}, u_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot))
\end{aligned}$$

که در آن

$$P(dx_t | Z_t; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)) = G_t(dx_t | X_t).$$

با توجه به قضیه 1.1 و این که X_t یک آماره همسان است، معادله (10) در تعریف همسانی صدق می‌کند و به کمک استقرا حکم ثابت می‌شود. ■

معادله (22) یک روش بازگشتی برای محاسبه L_t^* فراهم می‌کند و یک روش سازنده برای محاسبه کنترل بهینه به عنوان یک تابع از آماره آگاهی‌بخش معرفی می‌کند.

قضیه 2.2. برای توابع زیان

$$L_{T+1}(x_{T+1}) + \mathring{a} \sum_{\tau=0}^T L_{\tau}(u_{\tau}) \quad (23)$$

آماره $Y_t = X_t$ ، $t = 0, \frac{1}{4}, T$ آگاهی‌بخش است.

اثبات: برای تمام t ها، $\mathring{a} \sum_{\tau=0}^{t-1} L_{\tau}(u_{\tau}) = K_t^*(Z_t, U_{t-1})$. بنابراین L_t^* باید امید شرطی

$$L_{T+1}(x_{T+1}) + \mathring{a} \sum_{\tau=t}^T L_{\tau}(u_{\tau})$$

باشد. برای $t = T$ داریم

$$\begin{aligned}
& E[L_{T+1}(x_{T+1}) + L_T(u_T) | Z_T; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot)] \\
&= L_T(u_T) + \int \int L_{T+1}(\varphi_T(x_T, u_T(Z_T), w_{T+1})) G(dx_T | X_T) P(dw_{T+1}) \\
&= L_T^*(X_T, u_T).
\end{aligned} \quad (24)$$

به عنوان فرض استقرا، فرض کنید که (15) برای $t+1$ برقرار است و همچنین $\bar{u}_{t+1}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot)$ توابعی از $Y_s = X_s$ (16) باشند، از این رو

$$E[L_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{\tau=1}^T \dot{\mathbf{a}} L_{\tau}(u_{\tau}) | Z_T; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, u_t(\cdot), \bar{u}_{t+1}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot)] = L_t(u_t) \quad (25)$$

$$+ E \int_{\hat{\mathbf{I}}} \dot{\mathbf{e}} E \dot{\mathbf{e}} L_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{\tau=t+1}^T \dot{\mathbf{a}} L_{\tau}(u_{\tau}) | Z_T, z_{t+1}; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot) \Big| Z_T; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot) \Big| \dot{\mathbf{u}} \Big| \dot{\mathbf{p}}.$$

با توجه به فرض استقرا، امید شرطی داخلی به صورت

$$L_{t+1}^*(X_{t+1}, \bar{u}_{t+1}(X_{t+1}), \bar{u}_{t+2}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot))$$

داده می‌شود. مشابه قبل با جای گذاری (21) برای X_{t+1} و انتگرال گیری از (25) داریم:

$$E[L_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{\tau=1}^T \dot{\mathbf{a}} L_{\tau}(u_{\tau}) | Z_T; u_0(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot)]$$

$$= L_t(u_t) + \int \dot{\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} L_{t+1}^*(X_{t+1}(X_t, u_t, x_t, w_{t+1}, \dot{\mathbf{0}}_{t+1}), \bar{u}_{t+1}(X_{t+1}(X_t, u_t, x_t, w_{t+1}, \dot{\mathbf{0}}_{t+1}))) \quad (26)$$

$$P(d\dot{\mathbf{0}}_{t+1}) P(dw_{t+1}) G_t(dx_t | X_t)$$

$$= L_t^*(X_t, u_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot)).$$

حکم با استفاده از استقرا ثابت می‌شود. ■

همسان قبل (26) یک روش بازگشتی برای محاسبات L_t^* و کنترل بهینه به عنوان تابع X_t از روابط (17)، (18)، (24)، (26) و (21) ارائه می‌دهد.

در ادامه بخش به حالت گاوسی که توسط روابط (12) و (13) تعریف شده اختصاص داده شده است. در این حالت با استفاده از قضیه 1.2، آماره \hat{X}_t همراه با کنترل‌های قبلی U_{t+1} یک آماره آگاهی‌بخش برای تابع زیان عمومی از $L(x_{T+1}, U_T)$ است و \hat{X}_t برای تابع زیان جمعی (23) آگاهی‌بخش است. با این وجود، در بسیاری از مسائل ایجاد محدودیت بیشتری امکان‌پذیر است. فرض کنید تابع زیان (23) یا $L(x_{T+1}, U_T)$ ، به مقدار نهایی X_{T+1} تنها از طریق αx_{T+1} بستگی دارد که در آن α ، یک ماتریس $p \times n$ است. کمیت αx_{T+1} فاصله خطا نامیده می‌شود و نشان داده خواهد شد که \hat{X}_t ممکن است جایگزین فاصله خطای برون‌یابی شده شود و داریم $\hat{\alpha}_t = \alpha \phi_T \phi_{T-1} \frac{1}{4} \phi_t \hat{X}_t$.

اگر $p < n$ ، آماره آگاهی‌بخش کاهش پیدا می‌کند و در صورتی که $p = 1$ ، به یک آماره ساده تبدیل می‌شود. به توجه به معادله بازگشتی برای میانگین شرطی \hat{X}_t (14)، اولین معادله سامانه (12) و دومین معادله مشاهده (12) برای حالت گاوسی، $\hat{\alpha}_t$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\hat{\alpha}_{t+1} = \hat{\alpha}_t + \psi_t u_t + \psi_t K_{t+1} H_{t+1}^* R_{t+1}^{-1} \dot{\mathbf{e}} H_{t+1} \phi_t (x_t - \hat{x}_t) + \dot{\mathbf{0}}_{t+1} + H_{t+1} w_{t+1} \dot{\mathbf{e}} \quad (27)$$

که در آن Ψ_t یک ماتریس $p \times n$ است که در رابطه $\Psi_t = \alpha \varphi_T \varphi_{T-1}^{-1/4} \varphi_{t+1}$ صدق می‌کند.

قضیه 3.2. در حالت گاوسی داده شده در (12) و (13) برای توابع زیان $L(\alpha x_{T+1}, U_T)$ آماره $Y_t = (\hat{\alpha}_t, U_{t-1})$ ، $t = 0, 1/4, T$ آگاهی‌بخش است.

اثبات: برای تمام t ها $K_t^* = 0$. از معادله سامانه (12) داریم

$$\alpha x_{T+1} = \alpha \varphi_T x_T + \alpha u_T + \alpha w_{T+1} + \hat{\alpha}_T - \hat{\alpha}_T.$$

با شرطی کردن روی Z_T ،

$$\hat{\alpha}_T + \alpha u_T = \hat{\alpha}_T + \Psi_T u_T$$

یک مقدار ثابت و

$$\eta = \alpha \varphi_T (x_T - \hat{x}_T) + \alpha w_{T+1}$$

دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و کوواریانس

$$B_{T+1} = \alpha \varphi_T K_T \varphi_T^* \alpha^* + \alpha C_{T+1} \alpha^* \quad (28)$$

است، زیرا w_{T+1} و $(x_T - \hat{x}_T)$ مستقل هستند. بدین ترتیب برای $t = T$:

$$\begin{aligned} E(L(\alpha x_{T+1}, U_T) | Z_T; u_0(\cdot), 1/4, u_T(\cdot)) &= \int \varphi(\hat{\alpha}_T + \Psi_T u_T + \eta, U_T) f_{T+1}(\eta) d\eta \\ &= L_t^*(\hat{\alpha}_T, U_{T-1}, u_T) \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن $f_{T+1}(\eta)$ چگالی نرمال با میانگین صفر و کوواریانس B_{T+1} است که توسط (28) داده شده است.

به عنوان فرضیه استقرار، اگر (15) برای $t+1$ برقرار باد و $\bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)$ توابع Y_s داده شده در قضیه 3.2 باشند، با تکرار همان مراحل (19) و (22) در اثبات قضیه 3.2 با این تفاوت که برای نوشتن $\hat{\alpha}_{t+1}$ به عنوان تابعی از u_t ، $\hat{\alpha}_t$ از (27) و همچنین از η بجای معادله کاهش برای X_{t+1} (21) استفاده شود، داریم:

(30)

$$\begin{aligned} &E[L | Z_t; u_0(\cdot), 1/4, u_t(\cdot), \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)] \\ &= \int \varphi L_{t+1}^*(\hat{\alpha}_t + \Psi_t u_t + \eta, U_t, \bar{u}_{t+1}(\hat{\alpha}_t + \Psi_t u_t + \eta, U_t); \bar{u}_{t+2}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)) f_{t+1}(\eta) d\eta \\ &= L_t^*(\hat{\alpha}_t, U_{t-1}, u_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)). \end{aligned}$$

که در آن از (27) داریم:

$$\eta = \psi_t K_{t+1} H_{t+1}^* R_{t+1}^{-1} \hat{G} H_{t+1} \varphi_t (x_t - \hat{x}_t) + \hat{u}_{t+1} + H_{t+1} w_{t+1} \hat{\xi}_t$$

چگالی شرطی η به شرط Z_t ، به $f_{t+1}(\eta)$ وابسته و دارای توزیع نرمال ρ -بعدی، با میانگین صفر و کوواریانس

$$B_{t+1} = \psi_t K_{t+1} H_{t+1}^* R_{t+1}^{-1} \hat{G} H_{t+1} \varphi_t K_t \varphi_t^* H_{t+1}^* + R_{t+1} + H_{t+1} C_{t+1} H_{t+1}^* \hat{\xi}_t' R_{t+1}^{-1} H_{t+1} K_{t+1} \psi_t^* \quad (31)$$

است. نتیجه با استفاده از استقرا حاصل می‌شود. ■

کنترل بهینه می‌تواند از (17)، (18)، (28)، (29)، (31) و (30) ساخته شود.

قضیه 4.2. در حالت گاوسی داده شده توسط (12) و (13) برای توابع زیان به صورت

$$L_{T+1}(\alpha x_{T+1}) + \sum_{\tau=0}^T L_{\tau}(u_{\tau})$$

آماره

$$Y_t = \hat{y}_t, \quad t = 0, 1/4, T \quad (32)$$

آگاهی‌بخش است.

اثبات: همانند قضیه 3.2، با جایگزینی (27) توسط (21) داریم:

$$K_t^*(Z_t, U_{t-1}) = \sum_{\tau=0}^{t-1} L_{\tau}(u_{\tau}), \quad (33)$$

$$L_{T+1}^*(\hat{\alpha}_T, u_T) = L_T(u_T) + \int \hat{Q} L_{T+1}(\hat{\alpha}_T + \psi_T u_T + \eta) f_{T+1}(\eta) d\eta$$

که در آن $f_{t+1}(\eta)$ چگالی نرمال با میانگین صفر و کوواریانس داده شده توسط (28) است. بنابراین

$$L_t^*(\hat{\alpha}_t, u_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot)) = L_t(u_t) + \int \hat{Q} L_{t+1}^*(\hat{\alpha}_t + \psi_t u_t + \eta; \bar{u}_{t+2}(\cdot), 1/4, \bar{u}_T(\cdot))' f_{t+1}(\eta) d\eta$$

که در آن $f_{t+1}(\eta)$ چگالی نرمال با میانگین صفر و کوواریانس داده شده توسط (31) است. ■

کنترل بهینه در این حالت از (17)، (18)، (32)، (28)، (33) و (31) محاسبه می‌شود.

یک نتیجه دیگر برای حالت گاوسی با تابع زیان

$$L_{T+1}(\alpha X_{T+1}) + \overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{\tau=0}^T L_{\tau}(u_{\tau})$$

بررسی می‌شود. در این حالت، محدودیت کنترل خطی، به صورت ویژه مناسب است، یعنی $u_{\tau}(Z_{\tau}) = M_{\tau} Z_{\tau}$ ، $t = 0, 1/4, T$ از (12) و (14) دیده می‌شود که تحت این محدودیت، تمام متغیرهای تصادفی شامل X_{τ} ، Z_{τ} ، \hat{X}_{τ} و u_{τ} بوده و دارای توزیع نرمال هستند. محاسبات زمانی که توزیع واقعی برای فاصله خطا یا تلاش کل $\overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{\tau} L_{\tau}(u_{\tau})$ مورد نیاز باشد، ساده‌تر می‌شود. با توجه به نرمال بودن کنترل خطی عمومی داریم:

$$u_{\tau}(Z_{\tau}) = M_{\tau}[Z_{\tau} - E(Z_{\tau}|\hat{\alpha}_{\tau})] + \overline{M}_{\tau}\hat{\alpha}_{\tau}$$

زیرا برای یک ماتریس N_{st} ، $E(Z_s|\hat{\alpha}_t) = N_{st}\hat{\alpha}_t$ ، بعد ماتریس M_t ، $n \times n(t+1)$ و بعد ماتریس‌های \overline{M}_t و N_{st} ، $n \times p$ است. فرض کنید تابع زیان

$$L_t^*(\hat{\alpha}_t, u_t; \overline{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \overline{u}_T(\cdot))$$

در مولفه دوم برای همه کنترل‌های خطی

$$\overline{u}_s(\hat{\alpha}_s) = \hat{M}_s \hat{\alpha}_s, \quad s = t+1, 1/4, T \quad (34)$$

مشتق‌پذیر باشد. اگر کنترل خطی $\hat{u}_t(\hat{\alpha}_t) = \hat{M}_t \hat{\alpha}_t$ ، $t = 0, 1/4, T$ در بین رده کنترل‌های خطی در $\hat{\alpha}_t$ موضعاً بهینه باشد، آن‌گاه در رده کنترل‌های خطی $u_t(Z_t) = M_t Z_t$ ، $t = 0, 1/4, T$ موضعاً بهینه است.

زیان مورد انتظار به عنوان تابعی از (M_t, \overline{M}_t) ، $t = 0, 1/4, T$ برابر است با

$$E(L) = L(M_0, \overline{M}_0, M_1, \overline{M}_1, 1/4, M_T, \overline{M}_T)$$

و برای هر (i, j) ، M_t ، \overline{M}_t ، $t = 0, 1/4, T$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial (M_t)_{ij}} L(M_0, \overline{M}_0, 1/4, M_T, \overline{M}_T) = 0 \quad (35)$$

که در آن $(M_t)_{ij}$ نشان‌دهنده عنصر (i, j) ام ماتریس M_t است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} E \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{\tau=1}^T L_{\tau+1}(X_{\tau+1}) + \overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{\tau=1}^T L_{\tau}(u_{\tau}) \right\} &= E \{ E[E(L|Z_t) | \hat{\alpha}_t] \} \\ &= E \{ E[L_t^*(\hat{\alpha}_t, M_t(Z_t - E(Z_t | \hat{\alpha}_t)) + \overline{M}_t \hat{\alpha}_t; \overline{u}_{t+1}(\cdot), 1/4, \overline{u}_T(\cdot)) | \hat{\alpha}_t] \} \end{aligned}$$

که در آن $\bar{u}_T(\cdot)$, $\frac{1}{4}$, $\bar{u}_{t+1}(\cdot)$ در (34) صدق می‌کند. بنابراین

$$\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}(M_t)_{ij}} E(L) = E\left\{E\left[\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}u_i} L_t^*(\hat{\alpha}_t, M_t(Z_t - E(Z_t | \hat{\alpha}_t))) + \bar{M}_t \hat{\alpha}_t; \bar{u}_{t+1}(\cdot), \frac{1}{4}, \bar{u}_T(\cdot))(Z_t - E(Z_t | \hat{\alpha}_t))_{ij} | \hat{\alpha}_t\right]\right\}.$$

برای $M_t = 0$ ، امید شرطی در داخل $\{ \}$ ، صفر است و در پی آن (35) برقرار است.

3. بحث و نتیجه‌گیری

ویژگی وجود تابع کنترل بهینه که تنها از طریق آماره بسنده به داده‌ها وابسته است برای یک رده بزرگ از توابع زیان نیز برقرار است. در این مقاله روشی برای محاسبه آماره همسان ارائه شد. در حالتی که مدل گاوسی است، خطاهای مشاهدات دارای توزیع نرمال بوده و سامانه خطی است و در این حالت آماره آگاهی‌بخش که تقریباً همسان معیار ارائه شده برای آماره بسنده است و به تابع زیان اشاره دارد محاسبه شدند که در این مقاله دو رده از توابع زیان مورد بررسی قرار گرفتند. بررسی بسندگی به طور غیرمستقیم برای مشخص کردن دو ویژگی، همسانی و آگاهی‌بخشی به کار گرفته شد و ثابت شد اگر تابع زیان به آخرین مقدار بردار وضعیت بستگی داشته باشد، در این صورت برآوردهای برون‌یابی شده از این مولفه‌ها آگاهی‌بخش هستند.

References

- D. Blackwell and M. A. Girshick, Theory of Games and Statistical Decisions, Wiley, New York (1954).
- I. K. Dassios and K. J. Szajowski, Applied Mathematics and Computation, Bayesian optimal control for a non-autonomous stochastic discrete time system, Appl. Math. Comput., **274** (2016), 556-564.
- M. Deistler and W. Scherrer, Time Series Models. Springer, Berlin (2022).
- K. D. Do, Inverse optimal control of stochastic systems driven by Lévy processes, Automatica, **107** (2019) 539-550.
- E. B. Dynkin, Necessary and sufficient statistics for a family of probability distributions, Selected Transl. Math. Statist. Probab. **1** (1961) 17-40 (from Uspehi. Mat. Nauk., 1951).
- J. J. Florentin, Optimal control of continuous time, Markov, stochastic systems, J. Electron. Control, **10** (1961), 473-488.
- V. Girardin and N. Limnios, Applied Probability: from Random Sequences to Stochastic Processes, Springer, New York (2018).
- Y. C. Ho and K. C. Chu, Team decision theory and information structures in optimal control problems: Part I, IEEE T. Automat. contr., **17** (1972), 15-22.
- R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng. **82** (1960), 35-45.
- E. L. Lehmann and G. Casella, Theory of Point Estimation, 2nd edition, Springer-Verlag, New York (1998).
- M. Loeve, Probability Theory, Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1955).

-
- A. Mahajan and A. Nayyar, Sufficient Statistics for Linear Control Strategies in Decentralized Systems with Partial History Sharing, *IEEE T. Automat. contr.*, **60** (2015), 2046-2056.
- S. Ross, *A First Course in Probability*, 10th Edition, Verlag: Pearson (2018).
- W. Qing-Lai, H. Zhang, and C. Li-Li, Data-based Optimal Control for Discrete-time Zero-sum Games of 2-D Systems Using Adaptive Critic Designs, *Acta Automat. Sin.*, **35** (2009), 682-692.
- G. K. Vassilina, Optimal Control Problem of Stochastic Systems, *Lobachevskii J. Math.*, **42** (2021), 641-648.
- Q. Xie, L. Qi and H. Zhang, Optimal Control for Stochastic Systems with Multiple Controllers of Different Information Structures, *IEEE T. Automat. contr.*, (2020) 1-1.
- R. Zoppoli, Team Decision Theory in the Optimal Control of a Communication Network, *Aspects of Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics*, **33** (1977) 631-638.