




Exact Simultaneous Confidence Intervals for Normal Quantiles and Its Applications

M. Kharrati-Kopaie¹ , A. Malekzadeh² 

1. Corresponding Author, Department of Statistics, College of Science, Shiraz University, Shiraz, Iran E-mail: mkharati@shirazu.ac.ir
2. Department of Mathematics, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.  E-mail: malekzadeh@kntu.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 13 May 2023

Received in revised form:

20 July 2023

Accepted: 8 August 2023

Published online:

9 June 2024

Keywords:

Goodness of fit test,
Normal distribution,
Order statistics,
Simultaneous confidence intervals

ABSTRACT

Introduction

In practice, inferences on a quantile or several quantiles of a normal population may be more informative than inferences on the mean or variance of the population. Some researchers discussed the problem of making inferences on several quantiles when the underlying population has a normal distribution. They described that constructing a set of simultaneous confidence intervals (SCI) for several normal quantiles may be of interest in medicine or engineering studies (e.g. in the body weight or blood pressure or drug-drug interaction studies or in measuring the reliability of systems). We consider the problem of constructing SCI for all quantiles of a normal population. We propose an exact set of SCI for all normal quantiles. We also propose two algorithms for calculating the required critical values. Then, we illustrate and discuss the performance of the methods with two real examples and a simulation study.

Material and Methods

Suppose that X_1, \dots, X_n is a random sample of size $n \geq 2$ from a normal population with mean μ and variance σ^2 . Let Z_p denote the p -th quantile of the standard normal distribution and let $q_p = \mu + Z_p\sigma$ denote the p -th quantile of a normal population. If \bar{X} and S^2 are the sample mean and variance, $\hat{q}_p = \bar{X} + aSZ_p$ is the uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE) of q_p where $a = \sqrt{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2) / \Gamma(n/2)$. The UMVUE of $V_p = var(\hat{q}_p) = b_p\sigma^2$ is $\hat{V}_p = b_pS^2$ where $b_p = 1/n + Z_p^2(a^2 - 1)$. We propose $T = \max_{p \in (0,1)} |T_p|$ where $T_p = (\hat{q}_p - q_p) / \hat{V}_p^{1/2}$ as a pivotal quantity for constructing SCI for q_p for all $p \in (0,1)$. We derived the maximum value of T in a closed form and consequently, we could provide two numerical algorithms to calculate the required critical values of T .

Results and discussion

Rosenkrantz [3] proposed a conservative set of SCI for q_p for all $p \in (0,1)$. Rosenkrantz proposed to draw the graph of the empirical quantile along with the corresponding simultaneous upper and lower bounds for these quantiles. He mentioned that "the more the parent distribution of the data departs from the normal, the more likely the empirical quantile plot will have points that lie outside these bounds." Although the proposed bands by Rosenkrantz are easily computable, they are not optimal (they are conservative). Our proposed SCI

are exact and thus these bands are narrower than those of Rosenkrantz. Therefore, our proposed set of SCI performs better than the one proposed by Rosenkrantz in terms of the volume of the SCI. Liu et al. [4] also proposed SCI for several normal quantiles. Although the proposed SCI by Liu et al. is exact, they are not for all normal quantiles. Our proposed SCI is also applicable for several normal quantiles and in this case, our SCI will be conservative. However, the performance of our SCI is comparable with that of Liu et al. when the number of considered quantiles and sample sizes are increased. Our findings are valid when the underlying population is normally distributed; however, these results can be extended to the log-normal populations. When the population distribution is not known, constructing a set of non-parametric SCI for all quantiles is a complicated task. One can refer to [4] for more discussion.

Conclusion

We proposed an exact set of SCI for all normal quantiles. We could derive a closed form of the pivotal quantity and its distribution function. Therefore, we could calculate the required critical values. Our proposed SCI performs better than or comparable with the existing methods in terms of the volume of SCI. Therefore, our proposed SCI can be recommended in practice for making simultaneous inferences on several normal quantiles.

How to cite: Kharrati-Kopaei, M., & Malekzadeh, A. (2024). An exact simultaneous confidence intervals for normal quantiles and its applications. *Mathematical Researches*, **10** (1), 18 – 32.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

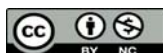
بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای چندک‌های توزیع نرمال و کاربردهای آن

محمود خراتی کوپایی^۱، احد ملک زاده^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه آموزشی آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران. رایانامه: mkharati@shirazu.ac.ir
۲. گروه آموزشی علوم رایانه و آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. رایانامه: malekzadeh@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای همه چندک‌های توزیع نرمال ارایه شده است. همچنین دو الگوریتم جهت محاسبه نقاط بحرانی بازه‌های اطمینان همزمان بیان گردیده است. با استفاده از دو مجموعه داده واقعی و شبیه‌سازی، کاربردهای مجموعه بازه‌های اطمینان دقیق در عمل تشریح گردیده و عملکرد بازه‌های اطمینان ارایه شده از لحاظ احتمال پوشش و متوسط حجم با دو روش موجود مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که متوسط حجم بازه‌های اطمینان همزمان دقیق ارایه شده از یکی روش‌های موجود کمتر هست و با روش ارایه شده دیگری رقابت نزدیکی دارد. در نهایت می‌توان روش پیشنهادی جدید را به‌عنوان روشی برای استنباط‌های همزمان راجع به چندک‌های نرمال توصیه نمود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۲۳	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۴/۲۹	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۱۷	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰	
واژه‌های کلیدی: آماره‌های ترتیبی، آزمون نیکویی برازش، توزیع نرمال، بازه‌های اطمینان همزمان.	

استناد: خراتی کوپایی، محمود؛ و ملک زاده، احد (۱۴۰۳). بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای چندک‌های توزیع نرمال و کاربردهای آن. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۱)، ۱۸ - ۳۲.



مقدمه

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی به اندازه $n \geq 2$ از یک جامعه با توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است. همچنین فرض کنید که $q_p = \mu + Z_p \sigma$ نشان دهنده چندک $1-p$ م توزیع نرمال است که در آن Z_p چندک p -م توزیع نرمال استاندارد است. در متون آماری به اندازه کافی راجع به استنباط درباره میانه جامعه نرمال، یا همان میانگین جامعه نرمال ($q_{0.5} = \mu$)، پرداخته شده است. ولی در عمل استنباط درباره سایر چندک‌ها و یا استنباط‌های همزمان درباره چندک‌ها، دارای کاربردهای متعددی می‌باشند. به‌عنوان مثال چاکرابورتی و لی [۱] به مساله ساختن بازه اطمینان برای یک چندک از توزیع نرمال پرداخته‌اند. در این پژوهش ذکر شده است که معمولاً چندک 70 -م از نمرات استاندارد شده یک آزمون جهت بررسی عملکرد آزمودنی‌ها استفاده می‌شود و یا چندک‌های بالاتر مثلاً 95 -م در مهندسی در سنجش قابلیت اعتماد یک سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین در پزشکی معمولاً چارک‌های اول و سوم در بررسی رشد کودکان استفاده می‌گردد. بنابراین تشکیل یک بازه اطمینان برای چندک توزیع نرمال امری ضروری است. چاکرابورتی و لی [۱] شش روش برای ساختن یک بازه اطمینان برای q_p ارائه کرده‌اند. ژانگ و ناداراجا [۲] به بهبود بازه‌های اطمینان برای q_p ارائه شده توسط چاکرابورتی و لی [۱] پرداختند. روسنکرانتز [۳] به مساله تشکیل بازه‌های اطمینان همزمان^۲ برای q_p برای تمام نقاط مقادیر p متعلق به بازه $(0,1)$ پرداخته است. روسنکرانتز [۳] پیشنهاد نمود که بازه‌های اطمینان همزمان محافظه‌کارانه^۳ ایجاد شده را در نمودار مقادیر $(k - 0.5)/n$ برای $k = 1, \dots, n$ ، در مقابل آماره ترتیبی k -م مشاهدات رسم کنید. روسنکرانتز از این نمودار جهت آزمون نیکویی برازش برای آزمون اینکده داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند، استفاده نمود. لیو و همکاران [۴] به مساله ساختن بازه‌های اطمینان همزمان برای چند چندک خاص پرداخته‌اند. آنها اشاره می‌کنند که بازه‌های اطمینان همزمان برای چند چندک خاص در مطالعه تداخل دارو-دارو^۴ بر روی بیماران روماتیسم مفصلی^۵ می‌تواند کاربرد داشته باشد. مطالعات دیگری در زمینه تشکیل بازه‌های اطمینان همزمان برای تابع توزیع نرمال انجام شده است که علاقه‌مندان می‌توانند به [۵] مراجعه کنند. همچنین برای مقایسه دو به دو چندک‌های چند جامعه مستقل می‌توان به [۶] و [۷] مراجعه نمود.

در این مقاله، ما به مساله ساختن بازه‌های اطمینان همزمان برای q_p برای تمام $p \in (0,1)$ می‌پردازیم. از خصوصیات روش پیشنهادی ما این است که بازه‌های اطمینان همزمان ایجاد شده بر خلاف روش پیشنهادی روسنکرانتز [۳] دقیق است و بنابراین دارای حجم کمتری است و کران‌های باریکتری در مقایسه با روش روسنکرانتز [۳] ارائه می‌نماید. همچنین به دلیل اینکه روش ما بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای q_p برای تمام $p \in (0,1)$ ارائه می‌کند، بازه‌های ایجاد شده می‌توانند برای استنباط همزمان برای چند چندک خاص نیز استفاده شوند. البته واضح است که در این صورت استنباط همزمان برای چند چندک خاص محافظه‌کارانه خواهد بود. بخش‌بندی این مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم،

¹ Quantile² Simultaneous confidence intervals³ Conservative⁴ Drug-drug interaction⁵ Rheumatoid arthritis

روش پیشنهادی جهت تشکیل بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای q_p برای تمام $p \in (0,1)$ ارائه می‌شود. در بخش سوم کاربردهای روش پیشنهادی و موجود با استفاده از دو مثال واقعی شرح داده می‌شود و نتایج روش جدید پیشنهادی با روش‌های موجود با استفاده از شبیه‌سازی مقایسه می‌گردند. در بخش چهارم نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۱. بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای تمام چندک‌ها

فرض کنید $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ و $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ نشان دهنده میانگین و واریانس نمونه‌ای بر اساس نمونه تصادفی به اندازه $n \geq 2$ از یک جامعه نرمال با توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است. به راحتی می‌توان تحقیق کرد که $\hat{q}_p = \bar{X} + aSZ_p$ یک برآوردگر ناریب با کمترین واریانس برای q_p است جایی که S نشان دهنده انحراف معیار نمونه‌ای و $a = \sqrt{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2) / \Gamma(n/2)$ که در آن $\Gamma(\cdot)$ نشان دهنده تابع گاما است. می‌توان نشان داد که واریانس \hat{q}_p بصورت $V_p = \text{Var}(\hat{q}_p) = \sigma^2 b_p$ محاسبه می‌شود که در آن $b_p = 1/n + Z_p^2(a^2 - 1)$ است. دقت شود که چون $\text{Var}(S) \geq 0$ بنابراین همیشه $a \geq 1$ است. یک برآوردگر ناریب با کمترین واریانس برای V_p بصورت $\hat{V}_p = S^2 b_p$ است. کمیت تصادفی $T_p = (\hat{q}_p - q_p) / \hat{V}_p^{1/2}$ برای یک مقدار ثابت از p کمیت محوری است زیرا به راحتی می‌توان تحقیق کرد که این کمیت تصادفی را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$T_p = \left(\frac{Z}{\sqrt{n}} + Z_p \left(a \sqrt{\frac{U}{n-1}} - 1 \right) \right) / \sqrt{\frac{U}{n-1} b_p}, \quad (1)$$

که در آن Z نشان دهنده متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و U متغیر تصادفی دارای توزیع کای اسکور با $n-1$ درجه آزادی و مستقل از Z است. کمیت محوری زیر را برای تشکیل بازه‌های اطمینان همزمان برای q_p برای تمام $p \in (0,1)$ ارائه می‌دهیم

$$T = \max_{p \in (0,1)} |T_p|. \quad (2)$$

لم زیر به بررسی خواص کمیت محوری T می‌پردازد.

لم ۱. مقدار بیشینه در کمیت محوری (۲) متناهی است و

$$T = \max_{p \in (0,1)} |T_p| = \sqrt{\max_{p \in (0,1)} T_p^2} = \left(\frac{Z^2}{Y_n} + \frac{(a\sqrt{Y_n} - 1)^2}{Y_n(a^2 - 1)} \right)^{1/2},$$

که در آن $Y_n = U/(n-1)$

اثبات. دقت کنید که T_p^2 بر حسب p تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر بر بازه $(0,1)$ است. بنابراین برای یافتن مقدار بیشینه

مطلق T_p^2 می‌بایست نخست نقاط بحرانی آن را مورد بررسی قرار داد. برای این منظور، با توجه به اجزای T_p معرفی شده در (۱)، قرار دهید $Y_n = U/(n-1)$ ، $A_n = Z/\sqrt{n}$ ، $B_n = a\sqrt{Y_n} - 1$ ، $C_n = Y_n/n$ و $D_n = Y_n(a^2 - 1)$ با تعریف تابع g بصورت زیر

$$g(p) = \frac{(A_n + Z_p B_n)^2}{C_n + Z_p^2 D_n},$$

و با توجه به صعودی بودن تابع \sqrt{x} ، داریم

$$\begin{aligned} \max_{p \in (0,1)} |T_p| &= \max_{p \in (0,1)} \sqrt{T_p^2} \\ &= \sqrt{\max_{p \in (0,1)} T_p^2} = \sqrt{\max_{p \in (0,1)} g(p)}. \end{aligned}$$

برای تابع $g(p)$ معرفی شده، خواص زیر به راحتی تحقیق می‌شود.

الف) $g(p) \geq 0$ زیرا $D_n \geq 0$ به دلیل اینکه $a \geq 1$.

ب) اگر $Z_{p^*} = -A_n/B_n$ و یا بطور معادل $p^* = \Phi(-A_n/B_n)$ که نشان دهنده تابع توزیع نرمال استاندارد است، داریم $g(p^*) = 0$.

$$\lim_{p \rightarrow 1} g(p) = \lim_{p \rightarrow 0} g(p) = B_n^2/D_n \quad (\text{پ})$$

ت) مشتق تابع g نسبت به p برابر است با

$$\partial g(p)/\partial p = 2(\partial Z_p/\partial p)(A_n + Z_p B_n)(B_n C_n - A_n D_n Z_p)/(C_n + Z_p^2 D_n)^2,$$

که در آن $\partial Z_p/\partial p = 1/\phi(Z_p) > 0$ جاییکه $\phi(\cdot)$ نشان دهنده تابع چگالی نرمال استاندارد است. بنابراین $\partial g(p)/\partial p$ در دو نقطه $p^* = \Phi(B_n C_n/(A_n D_n))$ و $p^{**} = \Phi(-A_n/B_n)$ دارای ریشه است.

با توجه به خواص الف)، ب) و ت) نتیجه می‌شود که $p^* = \Phi(-A_n/B_n)$ نقطه کمینه مطلق تابع g است. همچنین داریم $g(p^{**}) = \frac{A_n^2}{C_n} + \frac{B_n^2}{D_n} \geq \frac{B_n^2}{D_n}$ بنابراین با توجه به خواص پ) و ت) نتیجه می‌شود که p^{**} نقطه بیشینه مطلق تابع g است و نتیجه می‌گیریم

$$T = \max_{p \in (0,1)} |T_p| = \sqrt{\max_{p \in (0,1)} g(p)} = \sqrt{\frac{A_n^2}{C_n} + \frac{B_n^2}{D_n}} = \left(\frac{Z^2}{Y_n} + \frac{(a\sqrt{Y_n}-1)^2}{Y_n(a^2-1)} \right)^{1/2}. \quad (۳)$$

در اینجا اثبات لم کامل می‌شود.

با توجه به نتایج لم ۱ و براساس کمیت محوری معرفی شده در (۱) می‌توان بازه‌های اطمینان همزمان دقیق را در قضیه زیر ارایه نمود.

قضیه ۱. فرض کنید $t_{1-\alpha}$ نقطه‌ای هست که

$$Pr \left\{ \left(\frac{Z^2}{Y_n} + \frac{(a\sqrt{Y_n} - 1)^2}{Y_n(a^2 - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq t_{1-\alpha} \right\} = 1 - \alpha,$$

یعنی $t_{1-\alpha}$ چندک $(1 - \alpha)$ ام توزیع T است. در این صورت $(\hat{q}_p - t_{1-\alpha}\sqrt{\hat{V}_p}, \hat{q}_p + t_{1-\alpha}\sqrt{\hat{V}_p})$ برای تمام $p \in (0, 1)$ مجموعه بازه‌های اطمینان همزمان دقیق $100(1 - \alpha)\%$ برای q_p هستند.

اثبات. با توجه به تعریف بازه‌های اطمینان همزمان و نتایج لم ۱ داریم

$$\begin{aligned} Pr \left\{ q_p \in \left(\hat{q}_p - t_{1-\alpha}\sqrt{\hat{V}_p}, \hat{q}_p + t_{1-\alpha}\sqrt{\hat{V}_p} \right) \text{ تمام } p \in (0, 1) \right\} \\ = Pr \left\{ |T_p| \leq t_{1-\alpha} \text{ تمام } p \in (0, 1) \right\} \\ = Pr \left\{ \max_{p \in (0, 1)} |T_p| \leq t_{1-\alpha} \right\} = Pr \left\{ \left(\frac{Z^2}{Y_n} + \frac{(a\sqrt{Y_n} - 1)^2}{Y_n(a^2 - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq t_{1-\alpha} \right\} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.

سوال مهمی در قضیه ۱ وجود دارد این است که مقدار بحرانی $t_{1-\alpha}$ چگونه محاسبه می‌شود. در ادامه به معرفی دو روش جهت محاسبه مقدار بحرانی $t_{1-\alpha}$ می‌پردازیم. روش اول که بسیار ساده است، استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای تخمین $t_{1-\alpha}$ است. دقت کنید که بر اساس لم ۱، توزیع T به پارامتر مجهول وابسته نیست و بنابراین می‌توان به دفعات زیاد از توزیع T داده تصادفی تولید کرد و چندک تجربی $(1 - \alpha)$ ام داده‌های تولید شده را می‌توان به‌عنوان تقریبی از $t_{1-\alpha}$ استفاده کرد. الگوریتم زیر مراحل تخمین $t_{1-\alpha}$ با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو توضیح می‌دهد.

الگوریتم ۱. تخمین $t_{1-\alpha}$ به روش شبیه‌سازی مونت کارلو

گام یک. به ازای n داده شده، M داده تصادفی از توزیع نرمال استاندارد و توزیع کای اسکور با $n - 1$ درجه آزادی تولید کنید.

گام دو. با جایگذاری داده‌های تولید شده در رابطه (۳)، تعداد M داده تصادفی از توزیع T تولید کنید.
 گام سه. چندک تجربی $(1 - \alpha)$ ام از داده‌های تصادفی تولید شده در گام دو، تقریبی برای $t_{1-\alpha}$ است.
 فرض کنید $\hat{t}_{1-\alpha}$ نشان دهنده تخمین $t_{1-\alpha}$ به روش شبیه‌سازی مونت کارلو با استفاده از الگوریتم ۱ است. با استفاده از توزیع مجانبی مربوط به چندک تجربی داریم

$$Pr \left\{ |\hat{t}_{1-\alpha} - t_{1-\alpha}| \leq z_{1-\gamma} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{f_T(t_{1-\alpha})\sqrt{M}} \right\} = 1 - \gamma,$$

که $z_{1-\gamma}$ چندک $(1 - \gamma)$ ام توزیع نرمال استاندارد و $f_T(\cdot)$ تابع چگالی T هست. بنابراین در روش مونت کارلو حداکثر خطای تخمین $t_{1-\alpha}$ با اطمینان $1 - \gamma$ برابر با $z_{1-\gamma} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{f_T(t_{1-\alpha})\sqrt{M}}$ است. تابع چگالی T را می‌توان به‌کارگیری از داده‌های تولید شده از توزیع T در گام دوم الگوریتم ۱ در روش‌های عددی همانند برآورد تابع چگالی به روش کرنل^۱، برآورد نمود. جدول ۱ نشان دهنده تخمین‌های $t_{1-\alpha}$ برای مقادیر متفاوت n و $1 - \alpha$ با استفاده از الگوریتم ۱ و با $M = 10^7$ تکرار است. در این جدول مقادیر داخل پرانتز نشان دهنده حداکثر خطای مونت کارلو در تخمین $t_{1-\alpha}$ با اطمینان $1 - \gamma = 0.99$ است.

جدول ۱. تخمین‌های $t_{1-\alpha}$ و حداکثر خطای مونت کارلو در تخمین با اطمینان ۹۹ درصد (مقادیر داخل پرانتز) برای مقادیر متفاوت n و $1 - \alpha$ با استفاده از الگوریتم ۱ و با $M = 10^7$ تکرار.

$1 - \alpha$	n						
	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۵۰	۱۰۰
۰/۹۰	۳/۱۹۸ (۰/۰۰۳۶)	۲/۵۳۱ (۰/۰۰۲۱)	۲/۳۶۸ (۰/۰۰۱۷)	۲/۲۹۸ (۰/۰۰۱۵)	۲/۲۳۸ (۰/۰۰۱۳)	۲/۱۹۷ (۰/۰۰۱۲)	۲/۱۷۰ (۰/۰۰۱۱)
۰/۹۵	۴/۴۲۳ (۰/۰۰۶۱)	۳/۲۲۴ (۰/۰۰۳۳)	۲/۹۲۵ (۰/۰۰۲۶)	۲/۷۸۸ (۰/۰۰۲۳)	۲/۶۵۹ (۰/۰۰۲۰)	۲/۵۶۴ (۰/۰۰۱۷)	۲/۵۰۳ (۰/۰۰۱۵)
۰/۹۹	۸/۲۰۵ (۰/۰۲۰۴)	۵/۰۱۷ (۰/۰۰۸۸)	۴/۲۹۶ (۰/۰۰۶۳)	۳/۹۷۷ (۰/۰۰۵۵)	۳/۶۷۱ (۰/۰۰۴۶)	۳/۴۱۳ (۰/۰۰۳۸)	۳/۲۲۲ (۰/۰۰۳۲)

فرض کنید $F_T(\cdot)$ نشان دهنده تابع توزیع T است. روش دوم برای محاسبه $t_{1-\alpha}$ استفاده از $F_T(\cdot)$ و حل معادله $F_T(t) = 1 - \alpha$ به روش‌های عددی همانند روش نیوتن است. در این صورت با دقت دلخواه ϵ می‌توان چندک‌های توزیع T را به‌دست آورد. الگوریتم عددی زیر نحوه محاسبه $t_{1-\alpha}$ با بهره از روش نیوتن را شرح می‌دهد.

^۱ Kernel density estimation

الگوریتم عددی ۲. محاسبه $t_{1-\alpha}$ به روش عددی نیوتن با دقت ϵ

گام یک. به ازای n و α داده شده، نقطه شروع $x_\alpha^{(0)}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از نتایج لم ۱ داریم $T \geq \sqrt{\frac{Z^2}{Y_n}}$ که Z^2/Y_n دارای توزیع F با یک و $n-1$ درجه آزادی است. بنابراین همواره $t_{1-\alpha}$ بزرگتر از $\sqrt{q_{1-\alpha}^{1,(n-1)}}$ است که $q_{1-\alpha}^{1,(n-1)}$ نشان دهنده چندک $(1-\alpha)$ ام توزیع F با یک و $n-1$ درجه آزادی است. با این توضیحات می‌توان نقطه شروع $x_\alpha^{(0)}$ را مقدار $\sqrt{q_{1-\alpha}^{1,(n-1)}}$ در نظر گرفت.

گام دو. برای i -ام مرحله، نقطه جدید $x_\alpha^{(i)}$ را به روش زیر به دست آورید

$$x_\alpha^{(i)} = x_\alpha^{(i-1)} - \frac{F_T(x_\alpha^{(i-1)}) - 1 + \alpha}{f_T(x_\alpha^{(i-1)})}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $f_T(\cdot)$ نشان دهنده تابع چگالی T است.

گام سوم. تازمانی گام دوم را اجرا کنید که $|x_\alpha^{(i)} - x_\alpha^{(i-1)}| < \epsilon$ نباشد. باید توجه داشت به دلیل اینکه تابع توزیع T تابعی پیوسته و صعودی است پس معادله $F_T(t) = 1 - \alpha$ حتما تنها دارای یک جواب است.

برای به کارگیری الگوریتم ۲ نیاز به توابع توزیع و چگالی T است که در لم زیر بحث شده‌اند.

لم ۲. اگر $g_1(t) = (\sqrt{t^2(a^2-1)} + a)^{-2}$ و $g_2(t) = (\sqrt{t^2(a^2-1)} - a)^{-2}$ و همچنین $F_{\chi^2(1)}(\cdot)$ نشان دهنده تابع توزیع کای اسکور با یک درجه آزادی باشد، آنگاه

$$F_T(t) = \begin{cases} \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} F_{\chi^2(1)}\left(\left(t^2 - \frac{(a\sqrt{y}-1)^2}{y(a^2-1)}\right)y\right) f_{Y_n}(y) dy; & t < \sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}} \\ \int_{g_1(t)}^{+\infty} F_{\chi^2(1)}\left(\left(t^2 - \frac{(a\sqrt{y}-1)^2}{y(a^2-1)}\right)y\right) f_{Y_n}(y) dy; & t > \sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}}, \end{cases}$$

جاییکه $f_{Y_n}(\cdot)$ تابع چگالی متغیر تصادفی Y_n است و این متغیر تصادفی دارای توزیع گاما با پارامترهای $(n-1)/2$ و $(n-1)/2$ است. تابع چگالی T با مشتق‌گیری از $F_T(t)$ نسبت به t به دست می‌آید.

اثبات. با توجه به استقلال متغیرهای تصادفی Z و Y_n و اینکه Z^2 دارای توزیع کای اسکور با یک درجه آزادی است، برای $t > 0$ داریم

$$F_T(t) = Pr\{T \leq t\}$$

$$\begin{aligned}
 &= Pr \left\{ \frac{Z^2}{Y_n} + \frac{(a\sqrt{Y_n} - 1)^2}{Y_n(a^2 - 1)} \leq t^2 \right\} = \int_0^\infty Pr \left\{ \frac{Z^2}{y} + \frac{(a\sqrt{y} - 1)^2}{y(a^2 - 1)} \leq t^2 \right\} f_{Y_n}(y) dy \\
 &= \int_0^\infty Pr \left\{ Z^2 \leq \left(t^2 - \frac{(a\sqrt{y} - 1)^2}{y(a^2 - 1)} \right) y \right\} f_{Y_n}(y) dy.
 \end{aligned}$$

از آنجاییکه $t^2 - \frac{(a\sqrt{y}-1)^2}{y(a^2-1)}$ می‌بایست مقداری مثبت اختیار کند، به سادگی می‌توان تحقیق نمود که اگر $t < \sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}}$ آنگاه $g_1(t) \leq y \leq g_2(t)$ و اگر $t > \sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}}$ آنگاه $y \geq g_1(t)$ است. برای تابع چگالی T کافی است از تابع توزیع آن نسبت به t با استفاده از قاعده لایبنیتس^۱ مشتق گرفته شود. این اثبات را تکمیل می‌کند.

جدول ۲ مقادیر محاسبه شده برای مقادیر متفاوت n و $1 - \alpha$ (از جدول ۱) با استفاده از الگوریتم عددی ۲ با خطای $\epsilon = 10^{-4}$ را نمایش می‌دهد. همان طور که دیده می‌شود مقادیر جدول ۲ نزدیک به مقادیر جدول ۱ هستند.

جدول ۲. مقادیر $t_{1-\alpha}$ برای مقادیر متفاوت n و $1 - \alpha$ با استفاده از الگوریتم عددی ۲ با خطای $\epsilon = 10^{-4}$.

$1 - \alpha$	n						
	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۵۰	۱۰۰
۰/۹۰	۳/۱۹۸	۲/۵۳۱	۲/۳۶۷	۲/۲۹۸	۲/۲۳۸	۲/۱۹۷	۲/۱۷۰
۰/۹۵	۴/۴۲۳	۳/۲۲۴	۲/۹۲۵	۲/۷۸۷	۲/۶۵۸	۲/۵۶۵	۲/۵۰۳
۰/۹۹	۸/۱۸۹	۵/۰۰۹	۴/۲۹۹	۳/۹۷۷	۳/۶۶۵	۳/۴۱۵	۳/۲۲۳

۲. کاربردهای بازه‌های اطمینان همزمان ارایه شده

در این قسمت نتایج به دست آمده را با دو مثال واقعی تشریح و نتایج روش‌های قبلی را با روش جدید ارایه شده مقایسه می‌نماییم. همچنین با استفاده از یک شبیه‌سازی مختصر به اجمال به بررسی عملکرد روش جدید و دو روش‌های قبلی می‌پردازیم.

مثال ۱. لیو و همکاران [۴] بازه‌های اطمینان همزمان برای چند چندک توزیع نرمال ارایه کردند. واضح است که روش پیشنهادی ما برای چند چندک خاص نیز قابل استفاده است. در این صورت احتمال پوشش حداقل $1 - \alpha$ خواهد بود. لیو همکاران وزن بدن (بر حسب کیلوگرم) ۱۲۰ نوزاد دختر ۲۴ ماهه در یک مرکز سلامت را مورد بررسی قرار دارند. در این مطالعه میانگین و انحراف معیار نمونه‌ای به ترتیب ۱۱/۴۸ و ۱/۴۵ کیلوگرم به دست آمده است. لیو و همکاران اذعان داشته‌اند

^۱ Leibniz

که شواهد نشان می‌دهد که داده‌ها از توزیع نرمال تبعیت می‌کنند. در این مطالعه بازه‌های اطمینان همزمان برای چندک‌های ۲/۵، ۲۵، ۷۵ و ۹۷/۵ درصد مورد علاقه هستند. ليو و همکاران بیان کردند که زمانی که وزن نوزاد دختری کمتر از چندک ۲/۵ درصد است (به‌عنوان کم وزن) و یا بیشتر از ۹۷/۵ درصد است (به‌عنوان اضافه وزن)، نوزادان ممکن است به مراقبت‌های خاص پزشکی نیاز داشته باشند. بر اساس اطلاعات داده شده برای $n = 120$ و $\alpha = 0.05$ داریم $t_{0.95} = 2.493$. نتایج بازه‌های اطمینان همزمان ۹۵ درصدی روش پیشنهادی جدید و روش ليو و همکاران در جدول ۳ ارائه شده است. همان طور که از جدول ۳ دیده می‌شود، طول بازه‌های روش پیشنهادی جدید کمی از طول بازه‌های ارائه شده توسط ليو و همکاران بزرگتر است. البته این مورد منطقی است زیرا که روش پیشنهادی در این مقاله مجموعه بازه‌های اطمینان برای تمام چندک‌های جامعه بطور همزمان ارائه می‌کند ولی روش ليو و همکاران فقط برای چند چندک خاص. بدین ترتیب طول بازه‌های اطمینان پیشنهادی ما کمی بزرگتر در مقایسه با روش ليو همکاران خواهد بود. مزیت روش پیشنهادی جدید این است که برای هر تعداد چندک می‌توان به راحتی بطور همزمان راجع به آنها استنباط انجام داد و سطح اطمینان $1 - \alpha$ باقی بماند.

جدول ۳. نتایج بازه‌های اطمینان همزمان ۹۵ درصدی برای چهار چندک وزن نوزادان دختر بر اساس روش‌های پیشنهادی جدید و ليو و همکاران.

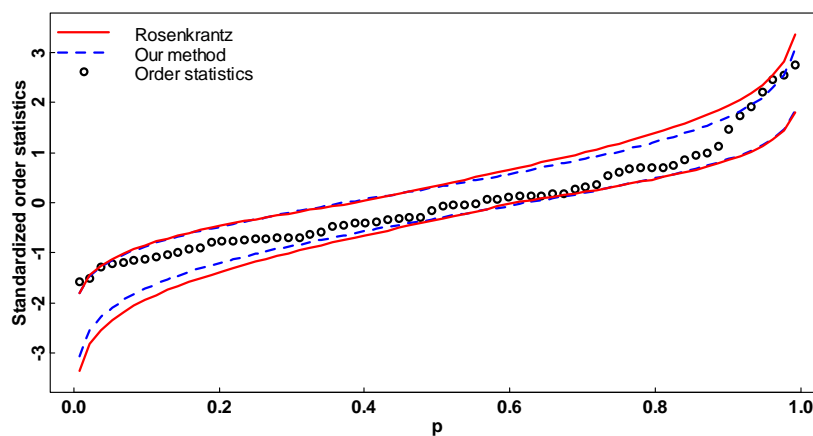
پارامترها	روش پیشنهادی جدید		روش ليو و همکاران	
	بازه اطمینان	طول بازه	بازه اطمینان	طول بازه
$q_{0.025}$	(۸/۰۶۶، ۹/۱۹۸)	۱/۱۳۲	(۸/۰۳۸، ۹/۱۲۴)	۱/۰۸۶
$q_{0.25}$	(۱۰/۱۳۴، ۱۰/۸۶۶)	۰/۷۳۲	(۱۰/۱۲۸، ۱۰/۸۳۱)	۰/۷۰۳
$q_{0.75}$	(۱۲/۰۹۴، ۱۲/۸۲۶)	۰/۷۳۲	(۱۲/۱۱۲، ۱۲/۸۲۵)	۰/۷۰۳
$q_{0.975}$	(۱۳/۷۶۲، ۱۴/۸۹۴)	۱/۱۳۲	(۱۳/۸۲۸، ۱۴/۹۱۵)	۱/۰۸۷

مثال ۲. روسنکرانتز [۳] مجموعه بازه‌های اطمینان محافظه‌کارانه‌ای برای چندک‌های توزیع نرمال ارائه نموده است. روسنکرانتز پیشنهاد رسم نمودار مقادیر $(k - 0.5)/n$ ، برای $k = 1, \dots, n$ ، در مقابل آماره ترتیبی k -ام مشاهدات و نمایش کران‌های اطمینان همزمان به‌دست آمده برای چندک‌های $(k - 0.5)/n$ -ام جامعه کرده است. او بیان می‌کند که این نمودار روشی ساده برای آزمون نیکویی برازش جهت آزمون اینکه داده‌ها دارای توزیع نرمال هستند یا خیر، هست. بدین صورت که اگر آماره‌های ترتیبی مشاهدات همگی داخل کران‌های اطمینان همزمان رسم شده باشند، داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. در این قسمت می‌خواهیم برای یک مجموعه داده واقعی به تشریح و مقایسه روش پیشنهادی با روش ارائه شده توسط روسنکرانتز بپردازیم. داده‌های جدول ۴ گرفته شده از [۸] صفحه ۱۴۸ است (همچنین [۳] را ببینید). داده‌ها راجع به زمان سپری شده بعد از ۶۶ موج بلند در سواحل سانفرانسیسکو است. میانگین داده‌ها ۳/۷۹ با انحراف معیار ۲/۳۹ است. [۳] با رسم مقادیر $(k - 0.5)/n$ ، برای $k = 1, \dots, n$ ، در مقابل آماره ترتیبی k -ام مشاهدات و همچنین نمایش کران‌های اطمینان همزمان برای چندک‌های نرمال، در سطح ۱۰٪ نتیجه گرفته است که داده‌ها از توزیع نرمال پیروی

نمی‌کنند. در شکل ۱ کران‌های اطمینان همزمان پیشنهادی جدید و روسنکراتز برای آماره‌های ترتیبی استاندارد شده رسم شده‌اند. لازم به ذکر است که مقدار $t_{0.95}$ برای ۶۶ نمونه برابر ۲/۵۳۴ است. همان‌طور که از شکل ۱ مشاهده می‌شود روش پیشنهادی کران‌های باریکتری نسبت به روش روسنکراتز ارائه می‌کند بطوریکه روش پیشنهادی دارای حجم (حاصلضرب طول بازه‌های اطمینان به دست آمده) 1.81×10^{-9} است ولی روش روسنکراتز دارای حجم 2.32×10^{-4} (یعنی حجمی معادل ۱/۱۹۵ برابر روش جدید ارائه شده) است. همچنین روش ما نشان می‌دهد چند نقطه در نزدیکی $p = 1$ از کران‌های ایجاد شده خارج هستند ولی روش روسنکراتز این موضوع را نشان نمی‌دهد. بنابراین در سطح ۵٪، روش جدید برخلاف روش روسنکراتز توصیه می‌کند که داده‌ها دارای توزیع نرمال نیستند.

جدول ۴. داده‌های زمان سپری شده بعد از ۶۶ موج بلند در سواحل سانفرانسیسکو.

۹/۶۶۵	۱/۰۷۱	۱/۱۸۲	۳/۳۹۱	۱/۹۵۸	۲/۹۶۸	۶/۱۵۶	۸/۳۹۳	۴/۱۳۱	۲/۰۹۳	۱/۹۷۱
۵/۵۶۴	۴/۴۵۵	۴/۱۱۴	۲/۰۹۳	۴/۰۵۸	۲/۰۹۷	۲/۰۳۹	۰/۹۱۶	۰/۰۲۰	۰/۷۰۳	۱۰/۳۷۹
۳/۵۹۹	۳/۶۷۶	۲/۰۷۵	۶/۰۵۳	۳/۹۱۸	۱/۶۱۱	۳/۷۱۶	۵/۳۹۲	۵/۱۰۰	۰/۸۶۰	۲/۲۷۴
۲/۷۲۳	۲/۶۶۶	۲/۸۳۴	۴/۱۹۶	۲/۰۱۹	۳/۰۳۸	۴/۰۹۱	۳/۰۶۴	۵/۲۴۹	۵/۸۵۶	۴/۶۹۹
۲/۸۷۰	۵/۴۵۷	۳/۹۶۸	۲/۷۸۸	۳/۶۸۹	۷/۹۲۱	۵/۴۵۳	۱/۹۰۸	۲/۳۶۰	۷/۳۰۰	۴/۲۲۹
۱/۵۸۲	۱/۰۴۶	۶/۴۸۰	۴/۵۱۱	۳/۰۸۱	۵/۴۷۶	۹/۸۵۸	۱/۳۹۷	۰/۱۵۵	۱/۳۰۱	۹/۰۵۴



شکل ۱. آماره‌های ترتیبی مشاهدات استاندارد شده در جدول ۴ همراه با کران‌های اطمینان همزمان ارائه شده توسط روش پیشنهادی (خط چین) و روش روسنکراتز (خط ممتد).

مثال ۳. در این قسمت قصد داریم با استفاده از شبیه‌سازی عملکرد روش جدید ارائه شده را از لحاظ احتمال پوشش و متوسط حجم با دو روش ارائه شده توسط روسنکراتز و لیو و همکاران مقایسه کنیم. مراحل شبیه‌سازی به صورت زیر است. برای حجم نمونه n و سطح اطمینان اسمی $1 - \alpha$ داده شده، نمونه‌ای به اندازه n از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 گرفته می‌شود. برای هر سه روش بازه‌های اطمینان همزمان $100(1 - \alpha)$ درصدی برای n چندک‌های

هستند یا خیر، ثبت می‌شود. همچنین حاصلضرب طول بازه‌های ایجاد شده به توان $1/n$ (یعنی متوسط هندسی طول بازه‌های ایجاد شده) به‌عنوان حجم یک روش در نظر گرفته می‌شود. مرحله فوق $Nsim$ بار تکرار می‌شود و نسبت تعداد دفعاتی که n چندک خاص در بازه‌های اطمینان همزمان تشکیل شده هستند، به‌عنوان برآوردی برای احتمال پوشش و میانگین حجم‌های ثبت شده یک روش، به‌عنوان متوسط حجم آن روش ارائه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی برای $\mu = 0$ ، $\sigma^2 = 1, 5$ ، $n = 5, 10, 15, 20, 30, 50$ و $1 - \alpha = 0.95$ و $Nsim = 10000$ در جدول ۵ ارائه شده است. لازم به توضیح است که برآورد احتمال پوشش و متوسط حجم‌های محاسبه شده به مقدار میانگین جامعه وابسته نیستند و لذا بدون کم شدن از کلیت مساله آن را صفر در نظر گرفتیم. گرچه برآورد احتمال پوشش به مقدار واریانس جامعه وابسته نیست ولی متوسط حجم‌ها به مقدار واریانس جامعه وابسته است. بنابراین دو مقدار کوچک و بزرگ برای واریانس جامعه در نظر گرفتیم.

لازم به ذکر است که از لحاظ تئوری روش جدید ارائه شده در مقایسه با روش روسنکرانتز دارای احتمال پوشش نزدیکتری به سطح اطمینان اسمی $1 - \alpha$ است و بنابراین متوسط حجم کمتری دارد (روش جدید در مقایسه با روش روسنکرانتز، روشی دقیق است). زمانی که علاقه‌مند به تشکیل بازه‌های اطمینان همزمان برای چند چندک خاص هستیم، روش ارائه شده توسط لیو و همکاران دارای احتمال پوشش دقیقاً برابر با سطح اطمینان اسمی است (روش جدید ارائه شده دارای احتمال پوشش حداقل $1 - \alpha$ خواهد بود) و لذا در این حالت روش لیو و همکاران دارای متوسط حجم کمتری نسبت به روش جدید است.

جدول ۵. نتایج شبیه‌سازی برای مقایسه عملکرد روش‌های لیو و همکاران، روسنکرانتز و روش جدید ارائه شده زمانی $\mu = 0$ ، $\sigma^2 = 1, 5$ ، $n = 5, 10, 15, 20, 30, 50$ و $1 - \alpha = 0.95$ و $Nsim = 10000$ است.

σ^2	n	برآورد احتمال پوشش روش‌ها			متوسط حجم روش‌ها		
		لیو و همکاران	روسنکرانتز	جدید	لیو و همکاران	روسنکرانتز	جدید
۱	۵	۰/۹۵۰	۰/۹۸۴	۰/۹۵۶	۳/۴۰۸	۶/۷۷۱	۴/۴۴۷
	۱۰	۰/۹۵۰	۰/۹۷۷	۰/۹۵۲	۲/۰۳۴	۳/۰۶۰	۲/۳۵۴
	۱۵	۰/۹۴۹	۰/۹۷۳	۰/۹۵۴	۱/۵۷۷	۲/۲۰۳	۱/۷۵۵
	۲۰	۰/۹۵۳	۰/۹۷۷	۰/۹۵۷	۱/۳۵۱	۱/۸۰۸	۱/۴۶۳
	۳۰	۰/۹۵۲	۰/۹۷۴	۰/۹۵۴	۱/۰۸۰	۱/۳۸۶	۱/۱۳۸
	۵۰	۰/۹۴۶	۰/۹۷۰	۰/۹۵۲	۰/۸۲۰	۱/۰۲۵	۰/۸۵۳
۵	۵	۰/۹۵۳	۰/۹۸۵	۰/۹۵۸	۷/۶۸۵	۱۵/۲۷۱	۱۰/۰۳۰
	۱۰	۰/۹۵۲	۰/۹۷۶	۰/۹۵۷	۴/۵۷۲	۶/۸۸۰	۵/۲۹۳
	۱۵	۰/۹۵۲	۰/۹۷۸	۰/۹۵۹	۳/۵۴۵	۴/۹۵۱	۳/۹۴۴
	۲۰	۰/۹۵۲	۰/۹۷۵	۰/۹۵۷	۳/۰۱۲	۴/۰۳۱	۳/۲۶۱
	۳۰	۰/۹۵۰	۰/۹۷۴	۰/۹۵۵	۲/۴۱۳	۳/۰۹۶	۲/۵۴۳
	۵۰	۰/۹۵۰	۰/۹۷۳	۰/۹۵۵	۱/۸۳۶	۲/۲۹۵	۱/۹۱۰

همان‌طور که از جدول ۵ مشاهده می‌شود، روش جدید عملکرد بهتری نسبت به روش ارایه شده توسط روستکرانتز از لحاظ متوسط حجم و نزدیکی به سطح اطمینان اسمی ۰/۹۵ دارد. همان‌طور که انتظار می‌رفت روش ارایه شده توسط لیو و همکاران در این شبیه‌سازی دارای بهترین عملکرد است ولی زمانی که حجم نمونه از ۱۰ بیشتر باشد این روش تفاوت زیادی با روش جدید ارایه شده از لحاظ متوسط حجم ندارد. بنابراین می‌توان روش جدید را به‌عنوان روشی کارا برای استنباط‌های همزمان راجع به چندک‌های یک جامعه نرمال توصیه نمود. زمانی که واریانس جامعه افزایش می‌یابد، متوسط حجم روش‌ها افزایش می‌یابد ولی همان‌طور که قبلاً ذکر شده احتمالات پوشش تغییرات کمی دارند (تغییرات به دلیل تغییرات نمونه‌ای شبیه‌سازی است).

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای تمام چندک‌های جامعه نرمال ارایه شده است. جهت محاسبه نقاط بحرانی مورد نیاز، الگوریتم‌هایی کارایی معرفی شدند. با استفاده از داده‌های دو مثال واقعی، کاربردهای روش جدید و دو روش موجود تشریح شدند و روش‌ها با یکدیگر مقایسه گردیدند. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی روش جدید با روش موجود از لحاظ احتمال پوشش و متوسط حجم مقایسه شدند. مزیت روش جدید نسبت به روش پیشنهادی [۳] این است که مجموعه بازه‌های اطمینان همزمان پیشنهادی بر خلاف روش [۳] دقیق و بنابراین دارای حجم کمتری هستند. بنابراین در مقایسه با روش [۳]، روش پیشنهادی توصیه می‌شود. اگر صرفاً بخواهیم استنباط همزمان راجع به چند چندک خاص از قبل تعیین شده، داشته باشیم، روش پیشنهاد شده توسط [۴] توصیه می‌شود گرچه روش جدید از لحاظ مقدار متوسط حجم تفاوت زیادی با روش [۴] ندارد زمانی که حجم نمونه بیش از ۱۰ است و تعداد چندک‌ها مورد علاقه جهت استنباط افزایش می‌یابد. مزیت روش جدید این است که فارغ از تعداد چندک‌های مورد علاقه همواره می‌تواند استنباط همزمان با ضمانت سطح اطمینان حداقل $1 - \alpha$ داشته باشد. لازم به ذکر است که نتایج به‌دست آمده را می‌توان به زمانی که جامعه دارای توزیع لگ-نرمال است نیز تعمیم داد (زیرا لگاریتم داده‌ها دارای توزیع نرمال هستند). ولی زمانی که توزیع جامعه مشخص نیست، تشکیل بازه‌های اطمینان همزمان دقیق برای تمام چندک‌ها چالشی بزرگ است. برای بحث بیشتر در این زمینه و بررسی عملکرد بازه‌های اطمینان همزمان ارایه شده در حالت جامعه غیرنرمال به [۳] مراجعه کنید. در این منبع بیان می‌شود که اگر توزیع جامعه نزدیک به نرمال شود، مانند توزیع تی با درجه آزادی بالا، نتایج تقریباً معتبر هستند.

References

1. S. Chakraborti and J. Li, Confidence interval estimation of a normal percentile, *The American Statistician*, **61**(4) (2007), 331 - 336.
2. Z. Zhang and S. Nadarajah, On confidence interval estimation of normal percentiles, *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **1**(2) (2018), 373-393.
3. W.A. Rosenkrantz, Confidence Bands for Quantile Functions: A Parametric and Graphic Alternative for Testing Goodness of Fit, *The American Statistician*, **54**(3) (2000), 185-190.
4. W. Liu and F. Bretz and A.J. Hayter and E. Glimm, Simultaneous inference for several quantiles of a normal population with applications, *Biometrical journal*, **55**(3) (2013), 360-369.
5. A.J. Hayter and S. Kiatsupaibul and P. Napalai and W. Liu, Simultaneous Inferences on the

Cumulative Distribution Function of a Normal Distribution, Communications in Statistics - Theory and Methods, **44**(24) (2015), 5136-5145.

6. L.S. Segbehoe and F. Schaarschmidt Fand G.D. Djira, Simultaneous confidence intervals for contrasts of quantiles, Biometrical Journal, **64**(1) (2022), 7-19.
7. A. Malekzadeh and M. Kharrati-Kopae, Simultaneous confidence intervals for quantile differences of several heterogeneous normal populations: With application to vitamin D supplement treatment on colorectal cancer patients, Biometrical Journal, **65** (2023), 200083.
8. P.J. Bickel and K.A. Doksum, Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topic. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, Inc; 1977.