Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Some Results on the Signed Complete Graphs

F. Heydari

Department of Mathematics, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran. E-mail: f-heydari@kiau.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 10 June 2023
Received in revised form: 17 August 2024
Accepted: 19 August 2024
Published online: 10 November 2024

Keywords:
Index,
Characteristic polynomial,
Signed graph,
Complete graph,
Cactus.

ABSTRACT

Introduction

Let G be a simple graph, $V(G)$ and $E(G)$ be its vertex set and edge set, respectively. Then $n = |V(G)|$ is called the order of G. By K_n, we denote the complete graph of order n. The disjoint union of t complete graphs K_2 is denoted by tK_2. Also, $K_{1,n}$ denotes the star graph of order $n + 1$. A cactus is a connected graph in which no edge lies on more than one cycle. The cactus graph with k edges and t cycles (triangles), depicted in Fig. 1, is denoted by G_t (G_0 is the star graph $K_{1,k}$).

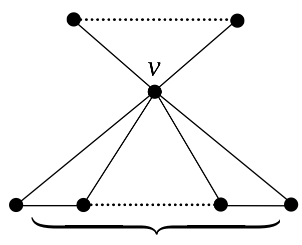


Figure 1: The cactus graph G_t

A simple graph G (underlying graph) with a sign function $\sigma : E(G) \to \{-, +\}$ is called a signed graph and denoted by $\Gamma = (G, \sigma)$. If all edges of Γ are positive (resp. negative), then Γ is denoted by $(G, +)$ (resp. $(G, -)$). By $\Gamma[X]$,we denote the subgraph induced by X, where X is a subset of $V(\Gamma)$. Let (K_n, H^-) be a signed complete graph whose negative edges induce a subgraph H. If H is a disjoint union of two graphs H_1 and H_2, then (K_n, H^-) is denoted by $(K_n, H_1^- \cup H_2^-)$. The characteristic polynomial of a matrix A is denoted by $\varphi(A)$. We denote the adjacency matrix of a signed graph Γ by $A(\Gamma)$. The characteristic polynomial of $A(\Gamma)$ is called the characteristic polynomial of Γ and is denoted by $\varphi(\Gamma, \lambda)$. Also, the eigenvalues of $A(\Gamma)$ are called the eigenvalues of Γ. The largest eigenvalue of Γ is called the index and denoted by $\lambda_1(\Gamma)$. There are many papers on the characteristic polynomials and eigenvalues of signed graphs, for instance [3, 13, 14, 15].

In [2], the characteristic polynomial of (K_n, G_0^-) was computed. In [12], the authors determined the characteristic polynomial of (K_n, G_1^-). In this paper, we study the characteristic polynomial of the signed complete graph $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$, where H is an arbitrary subgraph of K_n. As a corollary, we find the characteristic polynomial of $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ for every $t \geq 0$, and provide a sharp bound for the index of Γ.

Characteristic polynomial

The matrix J_s is all-one matrix of order s, and $j_s = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$.

Theorem 1. *Let $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ be a signed complete graph, where $t \geq 1$ and H is a subgraph of K_n. Then*

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} \varphi\left(\begin{bmatrix} 2t - 3 & j_{n-2t}^T \\ 2t j_{n-2t} & A(K_{n-2t}, H^-) \end{bmatrix}\right).$$

Definition 3 [12]. Let $\Gamma = (K_n, \sigma)$ be a signed graph and $\sqcap = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ be a partition of $V(\Gamma)$ such that all edges between X_i and X_j have the same sign, for each i, j. Also, $\Gamma[X_i] = (K_{n_i}, +)$ for $i = 1, \dots, p$, and $\Gamma[X_i] = (K_{n_i}, -)$ for $i = p + 1, \dots, p + q$, where $|X_i| = n_i$ for $i = 1, \dots, p + q$. Obviously, $\sqcap$ is an equitable partition of $V(\Gamma)$. The partition $\sqcap$ is called a special partition of $V(\Gamma)$.

Theorem 4. *Let $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ be a signed complete graph, where $t \geq 1$ and H is a subgraph of K_n. Let $\sqcap = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ be a special partition of $V(K_{n-2t}, H^-)$, $m_1 = \sum_{i=1}^{p} n_i$ and $m_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i$. If B is the quotient matrix of $A(\Gamma)$ related to $\{V(tK_2)\} \cup \sqcap$, then*

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{m_1 - p} (\lambda - 1)^{t + m_2 - q} (\lambda + 3)^{t-1} \varphi(B).$$

Corollary 5. *Let $\Gamma = (K_n, H^-)$ be a signed complete graph, where H is a subgraph of K_n. Let $\sqcap = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ be a special partition of $V(K_n, H^-)$, $m_1 = \sum_{i=1}^{p} n_i$ and $m_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i$. If B is the quotient matrix of $A(\Gamma)$ related to $\sqcap$, then*

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{m_1 - p} (\lambda - 1)^{m_2 - q} \varphi(B).$$

Theorem 6. *Let $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ be a signed complete graph, where G_t is the cactus graph with k edges and $t \geq 1$ cycles, depicted in Fig. 1. If $u = |V(K_n) \backslash V(G_t)| \geq 1$, then*

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-2t-3} (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} (\lambda^4 + (6 - n)\lambda^3 + (12 + 4t - 5n)\lambda^2 + (10 + 8t - 7n + 4ku - 4tu)\lambda + 3 + 4t - 3n + 12ku - 28tu).$$

Remark 9. By [1, Theorem 2] and [2, Lemma 3], Theorem 6 holds for $u = 0$ and $t = 0$.

A Sharp Bound for the Index

In this section, by using the Interlacing Theorem, we find a sharp lower bound for the index of $\Gamma = (K_n, G_t^-)$.

Theorem 11. *Let $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ be a signed complete graph, where G_t is the cactus graph with k edges and t cycles, depicted in Fig. 1. Then*

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n + 1)^2 - 16t}}{2} \leq \lambda_1(\Gamma).$$

Moreover, if $n = 4t$ and $k = 3t$, then $\lambda_1(\Gamma) = n - 3$ and the equality holds.

Conclusion

In this paper, we investigated the characteristic polynomial of the signed complete graph $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$, where H is an arbitrary subgraph of K_n. Furthermore, the characteristic polynomial of $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ is computed and

a sharp bound for the index of Γ is provided, where G_t is the cactus graph depicted in Fig. 1. In [12], the authors conjectured that among all signed complete graphs of order $n > 5$ whose negative edges induce a cactus graph with k edges and t cycles, the signed graph $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ has the maximum index. The findings related to Γ provide a foundation for examining the proposed conjecture.

How to cite: Heydari, F. (2024). Some results on the signed complete graphs. *Mathematical Researches*, **10** (3), 18 – 32.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نتایجی در باب گراف‌های کامل علامت‌دار

فریده حیدری

گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران. رایانامه: f-heydari@kiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۵/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۵/۲۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰

واژه‌های کلیدی:
اندیس،
چندجمله‌ای ویژه،
گراف علامت‌دار،
گراف کامل،
کاکتوس.

چکیده

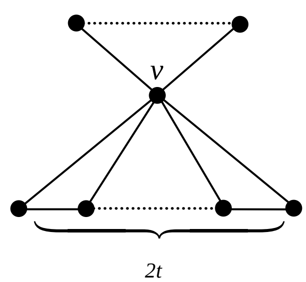
فرض کنید $\Gamma = (K_n, H^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار n رأسی باشد که یال‌های منفی آن زیر گراف H را القا می‌کنند. اگر H اجتماع مجزای دو گراف G_1 و G_2 باشد، در این صورت (K_n, H^-) با نماد $(K_n, G_1^- \cup G_2^-)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید $A(\Gamma)$ ماتریس مجاورت Γ باشد. چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه $A(\Gamma)$، به ترتیب، چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه Γ نامیده می‌شوند. بزرگترین مقدار ویژه $A(\Gamma)$ نیز اندیس گراف Γ نامیده می‌شود. در این مقاله، به مطالعه چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$ می‌پردازیم که در آن tK_2 اجتماع مجزای t گراف کامل K_2، و H یک زیرگراف دلخواه K_n است. همچنین، برای یک خانواده از کاکتوس‌های H، چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $\Gamma = (K_n, H^-)$ را محاسبه نموده و یک کران دقیق برای اندیس این گراف ارائه می‌دهیم.

استناد: حیدری، فریده (۱۴۰۳). نتایجی در باب گراف‌های کامل علامت‌دار. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۳)، ۱۸ – ۳۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. در این صورت $n=|V(G)|$ را مرتبه G گویند. برای هر $v\in V(G)$، مجموعه همه همسایه‌های v در G را با نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. گراف کامل n رأسی با نماد K_n و اجتماع مجزای t گراف کامل K_2 با نماد tK_2 نشان داده می‌شود. همچنین $K_{1,n}$ نشان دهنده یک ستاره $n+1$ رأسی است. مسیر و دور n رأسی به ترتیب، با P_n و C_n نمایش داده می‌شوند. گراف همبندی که هر دو دور آن (در صورت وجود)، حداکثر یک رأس مشترک داشته باشند، کاکتوس نامیده می‌شود. کاکتوس نمایش داده شده در شکل ۱ را که شامل k یال و t دور (مثلث) است، با نماد G_t نشان می‌دهیم (منظور از G_0 گراف ستاره $K_{1,k}$ است.).



شکل ۱: گراف کاکتوس G_t

گراف ساده $G=(V(G),E(G))$ به همراه تابع $\sigma: E(G)\to\{-,+\}$ را یک گراف علامت‌دار می‌نامیم و با نماد $\Gamma=(G,\sigma)$ نشان می‌دهیم. در این صورت G را گراف زمینه Γ گویند. اگر همه یال‌های G مثبت باشند یا همه یال‌های G منفی باشند، Γ را به ترتیب، با نماد $(G,+)$ یا $(G,-)$ نمایش می‌دهند. برای هر $X\subseteq V(\Gamma)$ ، زیرگراف القا شده توسط X را بانماد $\Gamma[X]$ نشان می‌دهیم. گراف‌های علامت‌دار در سال ۱۹۵۳ توسط هراری[۹]، در راستای مطالعه نظریه تعادل مطرح شده توسط هیدر[۱۱] در روان‌شناسی اجتماعی، معرفی شدند. گراف‌های علامت‌دار و در حالت خاص، گراف‌های کامل علامت‌دار، کاربردهای فراوانی داشته و مورد علاقه و توجه شمار زیادی از محققان شبکه‌های اجتماعی [۸، ۱۶] و همچنین محققان در سایر حوزه‌های علمی، از جمله تحلیل پورتفولیو در مدیریت ریسک [۱۰] و سیستم‌های زیستی [۷] است.

اگر Γ یک گراف علامت‌دار با گراف زمینه K_n باشد به طوری که یال‌های منفی آن زیر گرافی به نام H را القا کنند، در این صورت Γ با نماد (K_n,H^-) نشان داده می‌شود. اگر H اجتماع مجزای دو گراف H_1 و H_2 باشد، در این صورت (K_n,H^-) با نماد $(K_n,H_1^-\cup H_2^-)$ نمایش داده می‌شود.

ماتریس مجاورت گراف علامت‌دار $\Gamma=(G,\sigma)$، ماتریس $A(\Gamma)=\left(a_{ij}^{\sigma}\right)$ است که در آن $a_{ij}^{\sigma}=\sigma\left(v_iv_j\right)a_{ij}$ و $A(G)=(a_{ij})$ ماتریس مجاورت G است. منظور از $\sigma\left(v_iv_j\right)$ نیز علامت یال v_iv_j است.

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، چندجمله‌ای ویژه A با نماد $\varphi(A)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید Γ یک گراف

علامت‌دار و $A(\Gamma)$ ماتریس مجاورت Γ باشد. در این صورت چندجمله‌ای ویژه ماتریس $A(\Gamma)$، چندجمله‌ای ویژه گراف Γ نامیده شده و با نماد $\varphi(\Gamma,\lambda)$ نمایش داده می‌شود. همچنین مقادیر ویژه $A(\Gamma)$، مقادیر ویژه Γ نامیده می‌شوند. واضح است که چون $A(\Gamma)$ یک ماتریس متقارن حقیقی است، مقادیر ویژه $A(\Gamma)$ همگی حقیقی هستند. بزرگترین مقدار ویژه $A(\Gamma)$، اندیس Γ نامیده می‌شود.

ماتریس $S(G) = J - I - 2A(G)$، ماتریس سایدل گراف G نامیده می‌شود که در آن I ماتریس همانی و J ماتریس مربعی است که همه درایه‌های آن ۱ است. به مقادیر ویژه $S(G)$، مقادیر ویژه سایدل G گویند. واضح است که اگر G یک گراف n رأسی و فاقد رأس تنها باشد، آنگاه ماتریس سایدل گراف G و ماتریس مجاورت گراف علامت‌دار (K_n, G^-) یکی هستند. لذا مقادیر ویژه گراف علامت‌دار (K_n, G^-) همان مقادیر ویژه سایدل گراف G است.

فرض کنید $\Gamma = (G,\sigma)$ یک گراف علامت‌دار n رأسی باشد و $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$. منظور از سوئیچ روی یک رأس مانند v_i، تغییر علامت همه یال‌های متصل به v_i است. علاوه بر این، گراف علامت‌دار Γ' را سوئیچی از Γ گوییم هرگاه Γ' با به کاربردن تعداد متناهی عمل سوئیچ روی گراف علامت‌دار Γ حاصل شده باشد. در این صورت Γ' و Γ را هم‌ارز سوئیچی نامیده و می‌نویسیم $\Gamma \sim \Gamma'$. اگر دو گراف علامت‌دار Γ' و Γ هم ارز سوئیچی باشند، آنگاه ماتریس‌های مجاورت آن‌ها متشابه‌اند. زیرا فرض کنید $\mathrm{S} = diag(s_1, \dots, s_n)$ یک ماتریس قطری باشد به‌طوری که برای هر i، $1 \le i \le n$، اگر روی v_i سوئیچ شده باشد، $s_i = -1$ و در غیر این صورت $s_i = 1$. به سادگی دیده می‌شود که $\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}$ و $A(\Gamma') = SA(\Gamma)S$. بنابراین دو گراف علامت‌دار که هم ارز سوئیچی هستند، چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه یکسان دارند [۱۷].

مقالات زیادی در باب چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه گراف‌ها نوشته شده است که برای نمونه می‌توان به مقالات [۱۳،۳، ۱۴، ۱۵] اشاره نمود. در [۲]، چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار (K_n, G_0^-) محاسبه شده است. در [۱۲] نیز، نویسندگان چندجمله‌ای ویژه (K_n, G_1^-) را به دست آورده‌اند. در این مقاله، ابتدا به مطالعه چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$ می‌پردازیم که در آن H یک زیرگراف دلخواه K_n است. سپس به کمک آن، چندجمله‌ای ویژه گراف $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ را برای هر $t \ge 0$ محاسبه نموده و در نهایت، یک کران دقیق برای اندیس Γ ارائه می‌نماییم.

۱. چندجمله‌ای ویژه

در[۶]، لم‌های ۱، ۲ و ۳، چندجمله‌ای‌های ویژه گراف‌های کامل علامت‌دار $(K_n, P_4^- \cup tK_2^-)$، $(K_n, C_3^- \cup tK_2^-)$ و $(K_n, C_5^- \cup tK_2^-)$ محاسبه شده است. در قضیه ۱، با ایده‌ای مشابه، این نتایج را تعمیم می‌دهیم. قابل ذکر است که ماتریس مربعی از مرتبه s که همه درایه های آن 1 است، با نماد J_s نمایش داده می‌شود. همچنین، تعریف می‌کنیم:

$$j_s = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s.$$

قضیه ۱. *فرض کنید $t \ge 1$ و $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن H یک زیرگراف*

K_n است. در این صورت داریم:

$$\varphi(\Gamma,\lambda) = (\lambda-1)^t(\lambda+3)^{t-1}\varphi\left(\begin{bmatrix} 2t-3 & j_{n-2t}^T \\ 2tj_{n-2t} & A(K_{n-2t},H^-) \end{bmatrix}\right).$$

اثبات: با حذف همه $2t$ رأس tK_2 از Γ، داریم: $\Gamma\backslash V(tK_2) = (K_{n-2t},H^-)$. اگر ابتدا رئوس H و سپس رئوس tK_2 را به ترتیب برچسب گذاری کنیم، می‌توان ماتریس $\lambda I - A(\Gamma)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A(K_{n-2t},H^-) & \mathbf{-1} & \cdots & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \lambda I_2 - A(K_2,-) & & \mathbf{-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & & \lambda I_2 - A(K_2,-) \end{bmatrix}.$$

اکنون، روی ماتریس $\lambda I - A(\Gamma)$، تعدادی اعمال سطری و ستونی مقدماتی را به‌کار می‌بریم. ابتدا، به‌ازای $i = 1,\ldots,t$، $(n-2t+2i)$-امین سطر را از $(n-2t+2i-1)$-امین سطر کم می‌کنیم.

بعد، به ازای $i = 1,\ldots,t$، $(n-2t+2i)$-امین ستون را به $(n-2t+2i-1)$-امین ستون اضافه می‌کنیم. سپس، با استفاده از جایگشت روی اندیس تعدادی از سطرها و ستون‌ها، ماتریس D_1 به صورت زیر به دست خواهد آمد (درایه‌هایی که تأثیری در محاسبات ندارند، با نماد $\star$ نشان داده شده‌اند.):

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A(K_{n-2t},H^-) & \mathbf{-2} & \star \\ \mathbf{-1} & (\lambda+3)I_t - 2J_t & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\lambda-1)I_t \end{bmatrix}.$$

با توجه به بلوک‌های صفر ایجاد شده، با نوشتن بسط همسازه‌ای دترمینان به ترتیب نسبت به t سطر آخر، خواهیم داشت:

$$\varphi(\Gamma,\lambda) = (\lambda-1)^t \det D_2.$$

که در آن

$$D_2 = \begin{bmatrix} \lambda I - A(K_{n-2t},H^-) & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & (\lambda+3)I_t - 2J_t \end{bmatrix}.$$

حال، آخرین سطر D_2 را از همه سطرهای بالاتر به جز $n-2t$ سطر اول کم کنید و بعد $(n-2t+1)$-امین ستون الی $(n-t-1)$-امین ستون را به آخرین ستون اضافه کنید. سپس، جایگشت دوری روی اندیس تعدادی از سطرها و ستون‌ها به‌کار ببرید تا ماتریس D_3 به شکل زیر پدید آید:

$$\begin{bmatrix} \lambda-2t+3 & -j_{n-2t}^{T} & -\mathbf{2} \\ -2tj_{n-2t} & \lambda I-A(K_{n-2t},H^{-}) & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\lambda+3)I_{t-1} \end{bmatrix}.$$

فرض کنید

$$D_4=\begin{bmatrix} \lambda-2t+3 & -j_{n-2t}^{T} \\ -2tj_{n-2t} & \lambda I-A(K_{n-2t},H^{-}) \end{bmatrix}.$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda-1)^{t}(\lambda+3)^{t-1}\det D_4,$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. ■

تعریف ۲ [۴، صفحه ۲۸]. فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی از مرتبه n باشد که سطرها و ستون‌های A با $X=\{1,\dots,n\}$ اندیس گذاری شده‌اند. همچنین فرض کنید $\{X_1,\dots,X_m\}$ یک افراز روی مجموعه X باشد به طوری که برای هر i، $|X_i|=n_i$ و $X_1=\{1,\dots,n_1\}$، ...، $X_m=\{n_1+\cdots+n_{m-1},\dots,n\}$. ماتریس A را مطابق با $\{X_1,\dots,X_m\}$، به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix},$$

به طوری که $A_{i,j}$ زیر ماتریس A است متشکل از سطرهای X_i و ستون‌های X_j. اگر در هر زیر ماتریس $A_{i,j}$، مجموع درایه‌های هر سطر برابر با مقدار ثابت $b_{i,j}$ باشد، آنگاه به این افراز، افراز متعادل گفته می‌شود و ماتریس $B=(b_{i,j})$، ماتریس خارج قسمتی (یا مقسوم علیه) وابسته به افراز $\{X_1,\dots,X_m\}$ A نامیده می‌شود. دقت کنیدکه بنا به [۴، لم۲-۳-۱] چندجمله‌ای ویژه B، چندجمله‌ای ویژه A را عاد می‌کند.

فرض کنید $\Gamma=(K_n,\sigma)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد. در[۱۲]، افراز خاص $V(\Gamma)$ به صورت زیر تعریف شده که می‌تواند در محاسبه چندجمله‌ای ویژه Γ در برخی علامت دهی‌های σ به کار برده شود.

تعریف ۳ [۱۲]. فرض کنید $\Gamma=(K_n,\sigma)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد و $\sqcap=\{X_1,\dots,X_p,X_{p+1},\dots,X_{p+q}\}$ یک افراز برای $V(\Gamma)$ باشد به طوری که برای هر i,j یال‌های بین X_i و X_j هم‌علامت باشند.

به‌علاوه، برای $i=1,\dots,p$ ، داشته باشیم: $\Gamma[X_i]=(K_{n_i},+)$ و برای $i=p+1,\dots,p+q$ ، داشته باشیم: $\Gamma[X_i]=(K_{n_i},-)$، که در آن برای هر i ، $|X_i|=n_i$. به وضوح، $\sqcap$ یک افراز متعادل برای $V(\Gamma)$ است. افراز $\sqcap$ را افراز خاص $V(\Gamma)$ گویند.

قضیه ۴. *فرض کنید* $t\geq 1$ *و* $\Gamma=(K_n,H^{-}\cup tK_2^{-})$ *یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن* H *یک زیرگراف*

K_n است. همچنین فرض کنید افراز $\Pi=\{X_1,\dots,X_p,X_{p+1},\dots,X_{p+q}\}$ یک افراز خاص برای $V(K_{n-2t},H^-)$ باشد، $m_1=\sum_{i=1}^{p}n_i$ و $m_2=\sum_{i=p+1}^{p+q}n_i$. اگر B ماتریس خارج قسمتی $A(\Gamma)$ وابسته به افراز $\Pi\cup\{V(tK_2)\}$ باشد، آنگاه

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{m_1-p}(\lambda-1)^{t+m_2-q}(\lambda+3)^{t-1}\varphi(B).$$

اثبات: با توجه به قضیه ۱، داریم

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda-1)^{t}(\lambda+3)^{t-1}\det D_4,$$

که در آن

$$D_4=\begin{bmatrix}\lambda-2t+3 & -j_{n-2t}^{T}\\ -2tj_{n-2t} & \lambda I-A(K_{n-2t},H^-)\end{bmatrix}.$$

اگر رئوس $V(K_{n-2t},H^-)$ را با توجه به افراز $\Pi=\{X_1,\dots,X_p,X_{p+1},\dots,X_{p+q}\}$، به ترتیب برچسب گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$D_4=\begin{bmatrix}\lambda-2t+3 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-2t} & \lambda I-A\left(K_{n_1},+\right) & \star\\ \mathbf{-2t} & \star & \star\end{bmatrix}.$$

حال روی ماتریس D_4، با تمرکز روی بلوک $\lambda I-A\left(K_{n_1},+\right)$، تعدادی اعمال سطری و ستونی مقدماتی را به‌کار می‌بریم. ابتدا، (n_1+1)-امین سطر را از همه سطرهای بالاتر به‌جز سطر اول کم می‌کنیم که در نتیجه ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\lambda-2t+3 & \mathbf{-1} & & -1 & \mathbf{-1}\\ & \lambda+1 & \mathbf{0} & -\lambda-1 & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots & \mathbf{0}\\ & \mathbf{0} & \lambda+1 & -\lambda-1 & \\ -2t & \mathbf{-1} & & \lambda & \star\\ \mathbf{-2t} & \star & & \star & \star\end{bmatrix}.$$

اکنون دومین ستون الی n_1-امین ستون را به ستون (n_1+1)-ام اضافه می‌کنیم تا ماتریس زیر پدید آید:

$$\begin{bmatrix}\lambda-2t+3 & \mathbf{-1} & & -n_1 & \mathbf{-1}\\ & \lambda+1 & \mathbf{0} & 0 & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots & \mathbf{0}\\ & \mathbf{0} & \lambda+1 & 0 & \\ -2t & \mathbf{-1} & & \lambda+1-n_1 & \star\\ \mathbf{-2t} & \star & & \star & \star\end{bmatrix}.$$

با توجه به بلوک‌های صفر ایجاد شده، با نوشتن بسط همسازه‌ای دترمینان به ترتیب نسبت به دومین سطر الی n_1-امین سطر، داریم:

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda-1)^t(\lambda+3)^{t-1}(\lambda+1)^{n_1-1}\det\begin{bmatrix}\lambda-2t+3 & -n_1 & \mathbf{-1}\\ -2t & \lambda+1-n_1 & \star\\ \mathbf{-2t} & \star & \star\end{bmatrix}.$$

با تکرار این فرآیند به ترتیب روی سایر بلوک‌های D_4 حاصل از افراز $\sqcap$، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.■

با برهانی مشابه با برهان قضیه ۴، نتیجه زیر که در [۱۲، قضیه۳] نیز به اثبات رسیده است، حاصل می‌شود.

نتیجه ۵. *فرض کنید $\Gamma=(K_n,H^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن H یک زیرگراف K_n است. همچنین فرض کنید افراز $\sqcap=\{X_1,\dots,X_p,X_{p+1},\dots,X_{p+q}\}$ یک افراز خاص برای $V(K_n,H^-)$ باشد ، به‌علاوه $m_1=\sum_{i=1}^{p}n_i$ و $m_2=\sum_{i=p+1}^{p+q}n_i$. اگر B ماتریس خارج قسمتی $A(\Gamma)$ وابسته به افراز $\sqcap$ باشد، آنگاه*

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{m_1-p}(\lambda-1)^{m_2-q}\varphi(B).$$

کاکتوس G_t در شکل ۱، با k یال و t دور را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه قبل، چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $\Gamma=(K_n,G_t^-)$ قابل محاسبه است.

قضیه ۶. *فرض کنید $\Gamma=(K_n,G_t^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن G_t کاکتوس رسم شده در شکل ۱ با k یال و $t\geq 1$ دور است. اگر $u=|V(K_n)\backslash V(G_t)|\geq 1$، آنگاه*

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{n-2t-3}(\lambda-1)^t(\lambda+3)^{t-1}(\lambda^4+(6-n)\lambda^3+(12+4t-5n)\lambda^2$$
$$+(10+8t-7n+4ku-4tu)\lambda+3+4t-3n+12ku-28tu).$$

اثبات: در گراف علامت‌دار $\Gamma=(K_n,G_t^-)$، با سوئیچ روی رأس v (شکل ۱ را ببینید.)، داریم:

$$(K_n,G_t^-)\sim\left(K_n,K_{1,u}^-\cup tK_2^-\right).$$

در گراف علامت‌دار $\Gamma'=\left(K_n,K_{1,u}^-\cup tK_2^-\right)$، تعریف می‌کنیم: $X_1=\{v\}$، $X_2=V(K_n)\backslash V\left(K_{1,u}\cup tK_2\right)$ و $X_3=N_{K_{1,u}}(v)$. واضح است که $|X_2|=k-3t$ و $|X_3|=u$. حال اگر $\sqcap=\{X_1,X_2,X_3\}$ و B ماتریس خارج قسمتی $A(\Gamma')$ وابسته به افراز $\sqcap\cup\{V(tK_2)\}$ باشد، آنگاه بنابر قضیه ۴،

$$\varphi(\Gamma',\lambda)=(\lambda+1)^{n-2t-3}(\lambda-1)^t(\lambda+3)^{t-1}\varphi(B).$$

از تعریف ۲، داریم:

$$B=\begin{bmatrix}2t-3 & 1 & k-3t & u\\ 2t & 0 & k-3t & -u\\ 2t & 1 & k-3t-1 & u\\ 2t & -1 & k-3t & u-1\end{bmatrix}.$$

با محاسبه چند جمله‌ای ویژه ماتریس B که یک ماتریس مربعی مرتبه ۴ است، خواهیم داشت:

$$\varphi(B)=\lambda^4+(6-n)\lambda^3+(12+4t-5n)\lambda^2+(10+8t-7n+4ku-4tu)\lambda$$

$$+3+4t-3n+12ku-28tu,$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.■

قضیه ۷ [۲، لم ۳]. *فرض کنید $\Gamma=\left(K_n,K_{1,k}^-\right)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد. در این صورت داریم:*

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{n-3}(\lambda^3+(3-n)\lambda^2+(3-2n)\lambda+1-n+4k(n-k-1)).$$

قضیه ۸ [۱، قضیه ۲]. *فرض کنید $\Gamma=(K_n,H^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که یال‌های منفی آن گراف r-منظم H از مرتبه k را القا می‌کند و $k<n$. در این صورت -1 یک مقدار ویژه Γ با تکرر حداقل $n-k-1$ است. همچنین اگر $\lambda_0=r\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\ \lambda_{k-1}$ مقادیر ویژه H باشند، آنگاه $-1-2\lambda_i$ به ازای $i=1,\ldots,k-1$ یک مقدار ویژه Γ می‌باشد. علاوه بر این، سایر مقادیر ویژه Γ عبارتند از:*

$$\frac{n-2r-2\pm\sqrt{(n+2r)^2-8rk}}{2}.$$

تذکر ۹. الف) بنا به قضیه ۷، قضیه ۶ برای $t=0$ برقرار است. زیرا قرار دهید:

$$\Gamma=(K_n,G_0^-)=\left(K_n,K_{1,k}^-\right).$$

از آنجا که $u=|V(K_n)\backslash V\left(K_{1,k}\right)|=n-k-1$ و

$$\begin{aligned}\lambda^4+(6-n)\lambda^3+(12-5n)\lambda^2+(10-7n+4ku)\lambda+3-3n+12ku\\=(\lambda+3)(\lambda^3+(3-n)\lambda^2+(3-2n)\lambda+1-n+4ku),\end{aligned}$$

پس

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{n-3}(\lambda^3+(3-n)\lambda^2+(3-2n)\lambda+1-n+4k(n-k-1)).$$

ب) بنا به قضیه ۸، قضیه ۶ برای $u=0$ برقرار است. دقت کنید که در این صورت:

$$\Gamma=(K_n,G_t^-)\sim\ (K_n,tK_2^-)$$

و

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{n-2t-3}(\lambda-1)^t(\lambda+3)^{t-1}(\lambda^4+(6-n)\lambda^3+(12+4t-5n)\lambda^2$$
$$+(10+8t-7n)\lambda+3+4t-3n).$$

حال چون

$$\begin{aligned}\lambda^4+(6-n)\lambda^3+(12+4t-5n)\lambda^2+(10+8t-7n)\lambda+3+4t-3n\\=(\lambda+1)^2(\lambda^2+(4-n)\lambda+3+4t-3n),\end{aligned}$$

لذا

$$\varphi(\Gamma,\lambda)=(\lambda+1)^{n-2t-1}(\lambda-1)^t(\lambda+3)^{t-1}(\lambda^2+(4-n)\lambda+3+4t-3n).$$

۲. کرانی دقیق برای اندیس

در این بخش، به کمک قضیه در هم بافنده، یک کران دقیق برای اندیس گراف علامت‌دار $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ ارائه می‌دهیم. برای انجام این کار، به معرفی یک مفهوم دیگر نیاز داریم. فرض کنید $\Gamma = (G, \sigma)$ یک گراف علامت‌دار از مرتبه n و λ یک مقدار ویژه آن باشد. علاوه بر این فرض کنید $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ یک بردار ویژه متناظر با λ باشد. در این صورت تساوی $A(\Gamma)X = \lambda X$ در سطر i ام، نتیجه می‌دهد:

$$\lambda x_i = \sum_{v_j \in N_\Gamma(v_i)} \sigma(v_j v_i) x_j.$$

معادله فوق را معادله مقدار ویژه برای v_i گویند. در سراسر این بخش اگر $v = v_i$، x_i را با x_v نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰. (قضیه در هم بافنده برای گراف‌های علامت‌دار) [۵، قضیه ۱-۳-۱۱] . *فرض کنید $\Gamma = (G, \sigma)$ یک گراف علامت‌دار n رأسی باشد. اگر v یک رأس دلخواه از Γ و λ_i ها مقادیر ویژه باشند، آنگاه*

$$\lambda_n(\Gamma) \le \lambda_{n-1}(\Gamma \setminus v) \le \cdots \le \lambda_2(\Gamma) \le \lambda_1(\Gamma \setminus v) \le \lambda_1(\Gamma).$$

قضیه ۱۱. *فرض کنید $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن G_t کاکتوس رسم شده در شکل ۱ با k یال و t دور است. اگر $\lambda_1(\Gamma)$ نشان دهنده اندیس Γ باشد، آنگاه*

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n+1)^2 - 16t}}{2} \le \lambda_1(\Gamma).$$

به‌علاوه، اگر $n = 4t$ و $k = 3t$، آنگاه $\lambda_1(\Gamma) = n - 3$ و در نامساوی فوق، تساوی رخ می‌دهد.

اثبات: با توجه به شکل ۱، اگر $t = 0$، آنگاه $\Gamma = (K_n, G_0^-) = (K_n, K_{1,k}^-)$ و $\Gamma \setminus v = (K_{n-1}, +)$. در نتیجه بنا به قضیه در هم بافنده، $n - 2 = \lambda_1(\Gamma \setminus v) \le \lambda_1(\Gamma)$. پس فرض کنیم $1 \le t$. اگر $n = 3$، آنگاه $t = 1$ و به وضوح $-1 \le \lambda_1(\Gamma)$. لذا فرض کنیم $1 \le t$ و $4 \le n$. داریم:

$$\Gamma \setminus v = (K_{n-1}, tK_2^-).$$

از طرف دیگر، بنا به قضیه ۸ و [۵، صفحه ۵] ، $\lambda_1(\Gamma \setminus v)$ برابر است با:

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n+1)^2 - 16t}}{2}$$

و از قضیه در هم بافنده،

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n+1)^2 - 16t}}{2} \le \lambda_1(\Gamma).$$

توجه شود که همواره داریم:

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n+1)^2 - 16t}}{2} \ge n - 4.$$

حال فرض کنید $n = 4t$ و $k = 3t$. نشان می‌دهیم در کران پایین به دست آمده برای $\lambda_1(\Gamma)$، تساوی رخ می‌دهد یعنی:

$$\lambda_1(\Gamma)=\frac{n-5+\sqrt{(n+1)^2-16t}}{2}=n-3.$$

برای $n=4$ ($t=1$)، چون $\Gamma=(K_4,K_3^-)\sim(K_4,-)$ پس $\lambda_1(\Gamma)=1$ و تساوی برقرار است. لذا فرض کنید $4<n$. در حالتی که تکرر مقدار ویژه $\lambda_1(\Gamma)$ حداقل ۲ باشد، آنگاه داریم $\lambda_1(\Gamma)=\lambda_2(\Gamma)$ و در نتیجه بنا به قضیه در هم بافنده، $\lambda_1(\Gamma)=\lambda_1(\Gamma\setminus v)=n-3$ و اثبات در این حالت تمام است. در ادامه، فرض کنید $\lambda_1(\Gamma)$ یک مقدار ویژه ساده باشد (یعنی تکرر $\lambda_1(\Gamma)$ برابر ۱ باشد). همچنین فرض کنید $A(\Gamma)$ ماتریس مجاورت Γ و بردار $X=(x_1,\dots,x_n)^T$ یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1(\Gamma)$ باشد. اگر $x_v=0$، آنگاه

$$\lambda_1(\Gamma)=\lambda_1(\Gamma\setminus v)=n-3.$$

فرض کنید $x_v\neq 0$. ادعا می‌کنیم اگر $w,w'\in V(K_n)\setminus V(G_t)$، $w=v_i$ و $w'=v_j$، آنگاه $x_w=x_{w'}$ یعنی $x_i=x_j$. می دانیم اگر P ماتریس مقدماتی متناظر با عمل مقدماتی تعویض سطر i ام و سطر j ام باشد، آنگاه $P^2=I$. در صورتی که برچسب‌های w و w' یعنی i و j را جابه‌جا کنیم، به دلیل تقارن (وضعیت یکسان w و w' در Γ)، داریم $PA(\Gamma)P=A(\Gamma)$. چون $A(\Gamma)X=\lambda_1(\Gamma)X$ ، پس $PA(\Gamma)X=\lambda_1(\Gamma)PX$ که نتیجه می‌دهد $PA(\Gamma)PPX=\lambda_1(\Gamma)PX$ یا $A(\Gamma)PX=\lambda_1(\Gamma)PX$. لذا PX نیز یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1(\Gamma)$ است. از آنجا که $\lambda_1(\Gamma)$ یک مقدار ویژه ساده است، پس PX مضرب اسکالری از X است و چون $x_v\neq 0$، پس $PX=X$ و در نتیجه $x_i=x_j$ و ادعا ثابت می‌شود. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد برای هر $u,u'\in V(G_t)\setminus v$ ، $x_u=x_{u'}$. پس اعداد حقیقی p و q وجود دارند به طوری که برای هر $u\in V(G_t)\setminus v$، $x_u=p$ و برای هر $w\in V(K_n)\setminus V(G_t)$، $x_w=q$. اکنون قرار دهید $\lambda_1=\lambda_1(\Gamma)$ و رئوس $u\in V(G_t)\setminus v$ و $w\in V(K_n)\setminus V(G_t)$ را در نظر بگیرید. معادلات مقدار ویژه برای رئوس u و w به ترتیب عبارتند از:

$$-x_v+(2t-3)p+(2t-1)q=\lambda_1 p$$

و

$$x_v+2tp+(2t-2)q=\lambda_1 q,$$

که نتیجه می‌دهند $(\lambda_1-4t+3)(p+q)=0$. اگر $p=-q$ ، آنگاه $x_v=(2+\lambda_1)q$. از طرف دیگر معادله مقدار ویژه برای v به صورت زیر است:

$$-2tp+(2t-1)q=\lambda_1 x_v.$$

لذا $(4t-1)q=\lambda_1(2+\lambda_1)q$. از آنجا که $q\neq 0$ ، پس $\lambda_1(2+\lambda_1)=n-1$ و این تناقض است زیرا با توجه به آنچه در قسمت اول قضیه ثابت شد $n-4\leq\lambda_1$. بنابراین $p\neq -q$ و در نتیجه $\lambda_1=4t-3=n-3$ و اثبات کامل می‌شود.■

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مطالعه چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$ پرداخته شد که در آن H یک زیرگراف دلخواه K_n است. به‌علاوه، چندجمله‌ای ویژه گراف $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ محاسبه و یک کران دقیق برای اندیس آن ارائه شد که در آن G_t کاکتوس نشان داده شده در شکل ۱ است. در[۱۲]، نویسندگان این حدس را مطرح کرده‌اند که در میان همه گراف‌های کامل علامت‌دار از مرتبه $n > 5$ که یال‌های منفی آن یک کاکتوس با k یال و t دور القا می‌کنند، گراف $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ بزرگترین اندیس را دارد. با اطلاعات به دست آمده از Γ می‌توان به بررسی حدس مذکور پرداخت.

References

1. S. Akbari, S. Dalvandi, F. Heydari and M. Maghasedi, On the eigenvalues of signed complete graphs, Linear Multilinear Algebra, **67** (3) (2019), 433-441.
2. S. Akbari, S. Dalvandi, F. Heydari and M. Maghasedi, Signed complete graphs with maximum index, Discuss. Math. Graph Theory, **40** (2020), 393-403.
3. H. Aram, R. Khoeelar and N. Dehgardi, Laplacian energy of graphs, Mathematical Researches, **6** (4) (2020), 501-508.
4. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, Spectra of Graphs, Springer, New York, 2012.
5. D. Cvetković, P. Rowlinson and S. Simić, An Introduction to the Theory of Graph Spectra, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
6. S. Dalvandi, F. Heydari and M. Maghasedi, Signed complete graphs with exactly *m* non-negative eigenvalues, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **45** (2022), 2107–2122.
7. B. DasGupta, G. A. Encisob, E. Sontag and Y. Zhanga, Algorithmic and complexity results for decompositions of biological networks into monotone subsystems, BioSystems, **90** (2007), 161-178.
8. P. Doreian and A. Mrvar, Partitioning signed social networks, Social Networks, **31** (2009), 1-11.
9. F. Harary, On the notion of balance of a signed graph, Michigan Mathematical Journal, **2** (1953), 143-146.
10. F. Harary, M. Lim and D. C. Wunsch, Signed graphs for portfolio analysis in risk management, IMA Journal of Management Mathematics, **13** (2003), 1-10.
11. F. Heider, Attitude and cognitive organization, J. Psychology, **21** (1946), 107-112.
12. N. Kafai, F. Heydari, N. Jafari Rad and M. Maghasedi, On the signed complete graphs with maximum index, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., **45** (2021), 2085-2090.
13. S. K. Simić and Z. Stanić, Polynomial reconstruction of signed graphs, Linear Algebra Appl., **501** (2016), 390-408.
14. M. Souri, F. Heydari and M. Maghasedi, Maximizing the largest eigenvalues of signed unicyclic graphs, Discrete Math. Algorithms Appl., **12** (2) (2020), 2050016.
15. Z. Stanić, Notes on the polynomial reconstruction of signed graphs, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **45** (2022), 1301-1314.

16. B. Yang, W. K. Cheung and J. Liu, Community mining from signed social networks, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, **19** (2007), 1333-1348.
17. T. Zaslavsky, Matrices in the theory of signed simple graphs, Advances in Discrete Mathematics and Applications, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 13, Ramanujan Math. Soc., Mysore, (2010), 207-229.