

Some Results on the Signed Complete Graphs

F. Heydari

Department of Mathematics, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran. E-mail: f-heydari@kiau.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received: 10 June 2023
Received in revised form:
17 August 2024
Accepted: 19 August 2024
Published online:
10 November 2024

Keywords:

Index,
Characteristic polynomial,
Signed graph,
Complete graph,
Cactus.

ABSTRACT

Introduction

Let G be a simple graph, $V(G)$ and $E(G)$ be its vertex set and edge set, respectively. Then $n = |V(G)|$ is called the order of G . By K_n , we denote the complete graph of order n . The disjoint union of t complete graphs K_2 is denoted by tK_2 . Also, $K_{1,n}$ denotes the star graph of order $n + 1$. A cactus is a connected graph in which no edge lies on more than one cycle. The cactus graph with k edges and t cycles (triangles), depicted in Fig. 1, is denoted by G_t (G_0 is the star graph $K_{1,k}$).

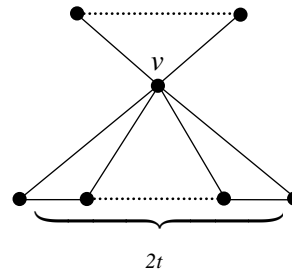


Figure 1: The cactus graph G_t

A simple graph G (underlying graph) with a sign function $\sigma : E(G) \rightarrow \{-, +\}$ is called a signed graph and denoted by $\Gamma = (G, \sigma)$. If all edges of Γ are positive (resp. negative), then Γ is denoted by $(G, +)$ (resp. $(G, -)$). By $\Gamma[X]$, we denote the subgraph induced by X , where X is a subset of $V(\Gamma)$. Let (K_n, H^-) be a signed complete graph whose negative edges induce a subgraph H . If H is a disjoint union of two graphs H_1 and H_2 , then (K_n, H^-) is denoted by $(K_n, H_1^- \cup H_2^-)$. The characteristic polynomial of a matrix A is denoted by $\varphi(A)$. We denote the adjacency matrix of a signed graph Γ by $A(\Gamma)$. The characteristic polynomial of $A(\Gamma)$ is called the characteristic polynomial of Γ and is denoted by $\varphi(\Gamma, \lambda)$. Also, the eigenvalues of $A(\Gamma)$ are called the eigenvalues of Γ . The largest eigenvalue of Γ is called the index and denoted by $\lambda_1(\Gamma)$. There are many papers on the characteristic polynomials and eigenvalues of signed graphs, for instance [3, 13, 14, 15].

In [2], the characteristic polynomial of (K_n, G_0^-) was computed. In [12], the authors determined the characteristic polynomial of (K_n, G_1^-) . In this paper, we study the characteristic polynomial of the signed complete graph $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$, where H is an arbitrary subgraph of K_n . As a corollary, we find the characteristic polynomial of $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ for every $t \geq 0$, and provide a sharp bound for the index of Γ .

Characteristic polynomial

The matrix J_s is all-one matrix of order s , and $j_s = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$.

Theorem 1. Let $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ be a signed complete graph, where $t \geq 1$ and H is a subgraph of K_n . Then

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} \varphi \left(\begin{bmatrix} 2t - 3 & j_{n-2t}^T \\ 2t j_{n-2t} & A(K_{n-2t}, H^-) \end{bmatrix} \right).$$

Definition 3 [12]. Let $\Gamma = (K_n, \sigma)$ be a signed graph and $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ be a partition of $V(\Gamma)$ such that all edges between X_i and X_j have the same sign, for each i, j . Also, $\Gamma[X_i] = (K_{n_i}, +)$ for $i = 1, \dots, p$, and $\Gamma[X_i] = (K_{n_i}, -)$ for $i = p + 1, \dots, p + q$, where $|X_i| = n_i$ for $i = 1, \dots, p + q$. Obviously, Π is an equitable partition of $V(\Gamma)$. The partition Π is called a special partition of $V(\Gamma)$.

Theorem 4. Let $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ be a signed complete graph, where $t \geq 1$ and H is a subgraph of K_n . Let $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ be a special partition of $V(K_{n-2t}, H^-)$, $m_1 = \sum_{i=1}^p n_i$ and $m_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i$. If B is the quotient matrix of $A(\Gamma)$ related to $\{V(tK_2)\} \cup \Pi$, then

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{m_1-p} (\lambda - 1)^{t+m_2-q} (\lambda + 3)^{t-1} \varphi(B).$$

Corollary 5. Let $\Gamma = (K_n, H^-)$ be a signed complete graph, where H is a subgraph of K_n . Let $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ be a special partition of $V(K_n, H^-)$, $m_1 = \sum_{i=1}^p n_i$ and $m_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i$. If B is the quotient matrix of $A(\Gamma)$ related to Π , then

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{m_1-p} (\lambda - 1)^{m_2-q} \varphi(B).$$

Theorem 6. Let $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ be a signed complete graph, where G_t is the cactus graph with k edges and $t \geq 1$ cycles, depicted in Fig. 1. If $u = |V(K_n) \setminus V(G_t)| \geq 1$, then

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-2t-3} (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} (\lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (12+4t-5n)\lambda^2 + (10+8t-7n+4ku-4tu)\lambda + 3+4t-3n+12ku-28tu).$$

Remark 9. By [1, Theorem 2] and [2, Lemma 3], Theorem 6 holds for $u = 0$ and $t = 0$.

A Sharp Bound for the Index

In this section, by using the Interlacing Theorem, we find a sharp lower bound for the index of $\Gamma = (K_n, G_t^-)$.

Theorem 11. Let $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ be a signed complete graph, where G_t is the cactus graph with k edges and t cycles, depicted in Fig. 1. Then

$$\frac{n-5 + \sqrt{(n+1)^2 - 16t}}{2} \leq \lambda_1(\Gamma).$$

Moreover, if $n = 4t$ and $k = 3t$, then $\lambda_1(\Gamma) = n - 3$ and the equality holds.

Conclusion

In this paper, we investigated the characteristic polynomial of the signed complete graph $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$, where H is an arbitrary subgraph of K_n . Furthermore, the characteristic polynomial of $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ is computed and

a sharp bound for the index of Γ is provided, where G_t is the cactus graph depicted in Fig. 1. In [12], the authors conjectured that among all signed complete graphs of order $n > 5$ whose negative edges induce a cactus graph with k edges and t cycles, the signed graph $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ has the maximum index. The findings related to Γ provide a foundation for examining the proposed conjecture.

How to cite: Heydari, F. (2024). Some results on the signed complete graphs. *Mathematical Researches*, **10** (3), 18 – 32.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

نتایجی در باب گراف‌های کامل علامت‌دار

فریده حیدری

گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران. رایانامه: f-heydari@kiau.ac.ir

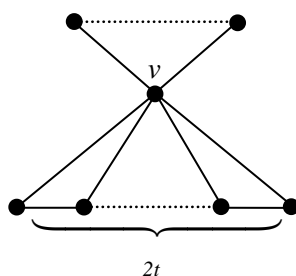
چکیده	اطلاعات مقاله
<p>فرض کنید $\Gamma = (K_n, H^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار n رأسی باشد که یال‌های منفی آن زیر گراف H را القا می‌کنند. اگر H اجتماع مجزای دو گراف G_1 و G_2 باشد، در این صورت (K_n, H^-) با نماد $(K_n, G_1^- \cup G_2^-)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید $A(\Gamma)$ ماتریس مجاورت Γ باشد. چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه $A(\Gamma)$، به ترتیب، چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه Γ نامیده می‌شوند. بزرگترین مقدار ویژه $A(\Gamma)$ نیز اندیس گراف Γ نامیده می‌شود. در این مقاله، به مطالعه چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$ می‌پردازیم که در آن اجتماع مجزای t گراف کامل K_2 و H یک زیرگراف دلخواه K_n است. همچنین، برای یک خانواده از کاکتوس‌های H، چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $\Gamma = (K_n, H^-)$ را محاسبه نموده و یک کران دقیق برای اندیس این گراف ارائه می‌دهیم.</p>	<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲۰</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۵/۲۷</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۵/۲۹</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰</p> <p>واژه‌های کلیدی: اندیس، چندجمله‌ای ویژه، گراف علامت‌دار، گراف کامل، کاکتوس.</p>

استناد: حیدری، فریده (۱۴۰۳). نتایجی در باب گراف‌های کامل علامت‌دار. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۳)، ۱۸ - ۳۲.



مقدمه

فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. در این صورت $n = |V(G)|$ را مرتبه G گویند. برای هر $v \in V(G)$ ، مجموعه همه همسایه‌های v در G را با نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. گراف کامل n رأسی با نماد K_n و اجتماع مجزای t گراف کامل K_2 با نماد tK_2 نشان داده می‌شود. همچنین $K_{1,n}$ نشان دهنده یک ستاره $n + 1$ رأسی است. مسیر و دور n رأسی به ترتیب، با P_n و C_n نمایش داده می‌شوند. گراف همبندی که هر دو دور آن (در صورت وجود)، حداکثر یک رأس مشترک داشته باشند، کاکتوس نامیده می‌شود. کاکتوس نمایش داده شده در شکل ۱ را که شامل k یال و t دور (مثلاً) است، با نماد G_t نشان می‌دهیم (منظور از G_0 گراف ستاره $K_{1,k}$ است).



شکل ۱: گراف کاکتوس G_t

گراف ساده $G = (V(G), E(G))$ به همراه تابع $\sigma : E(G) \rightarrow \{-, +\}$ را یک گراف علامت‌دار می‌نامیم و با نماد $\Gamma = (G, \sigma)$ نشان می‌دهیم. در این صورت G را گراف زمینه Γ گویند. اگر همه یال‌های G مثبت باشند یا همه یال‌های G منفی باشند، Γ را به ترتیب، با نماد $(G, +)$ یا $(G, -)$ نمایش می‌دهند. برای هر $X \subseteq V(\Gamma)$ ، زیرگراف القا شده توسط X را با نماد $\Gamma[X]$ نشان می‌دهیم. گراف‌های علامت‌دار در سال ۱۹۵۳ توسط هراری [۹]، در راستای مطالعه نظریه تعادل مطرح شده توسط هیدر [۱۱] در روان‌شناسی اجتماعی، معرفی شدند. گراف‌های علامت‌دار و در حالت خاص، گراف‌های کامل علامت‌دار، کاربردهای فراوانی داشته و مورد علاقه و توجه شمار زیادی از محققان شبکه‌های اجتماعی [۸، ۱۶] و همچنین محققان در سایر حوزه‌های علمی، از جمله تحلیل پورتفولیو در مدیریت ریسک [۱۰] و سیستم‌های زیستی [۷] است.

اگر Γ یک گراف علامت‌دار با گراف زمینه K_n باشد به طوری که یال‌های منفی آن زیر گرافی به نام H را القا کنند، در این صورت Γ با نماد (K_n, H^-) نشان داده می‌شود. اگر H اجتماع مجزای دو گراف H_1 و H_2 باشد، در این صورت (K_n, H^-) با نماد $(K_n, H_1^- \cup H_2^-)$ نمایش داده می‌شود.

ماتریس مجاورت گراف علامت‌دار $\Gamma = (G, \sigma)$ ، ماتریس $A(\Gamma) = (a_{ij}^\sigma)$ است که در آن $a_{ij}^\sigma = \sigma(v_i v_j) a_{ij}$ و $A(G) = (a_{ij})$ ماتریس مجاورت G است. منظور از $\sigma(v_i v_j)$ نیز علامت یال $v_i v_j$ است.

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، چندجمله‌ای ویژه A با نماد $\varphi(A)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید Γ یک گراف

علامت‌دار و $A(\Gamma)$ ماتریس مجاورت Γ باشد. در این صورت چندجمله‌ای ویژه ماتریس $A(\Gamma)$ ، چندجمله‌ای ویژه گراف Γ نامیده شده و با نماد $\varphi(\Gamma, \lambda)$ نمایش داده می‌شود. همچنین مقادیر ویژه $A(\Gamma)$ ، مقادیر ویژه Γ نامیده می‌شوند. واضح است که چون $A(\Gamma)$ یک ماتریس متقارن حقیقی است، مقادیر ویژه $A(\Gamma)$ همگی حقیقی هستند. بزرگترین مقدار ویژه $A(\Gamma)$ ، اندیس Γ نامیده می‌شود.

ماتریس $S(G) = J - I - 2A(G)$ ، ماتریس سایدل گراف G نامیده می‌شود که در آن I ماتریس همانی و J ماتریس مربعی است که همه درایه‌های آن ۱ است. به مقادیر ویژه $S(G)$ ، مقادیر ویژه سایدل G گویند. واضح است که اگر G یک گراف n رأسی و فاقد رأس تنها باشد، آنگاه ماتریس سایدل گراف G و ماتریس مجاورت گراف علامت‌دار (K_n, G^-) یکی هستند. لذا مقادیر ویژه گراف علامت‌دار (K_n, G^-) همان مقادیر ویژه سایدل گراف G است.

فرض کنید $\Gamma = (G, \sigma)$ یک گراف علامت‌دار n رأسی باشد و $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$. منظور از سوئیچ روی یک رأس مانند v_i ، تغییر علامت همه یال‌های متصل به v_i است. علاوه بر این، گراف علامت‌دار Γ' را سوئیچی از Γ گوئیم هرگاه Γ' با به کاربردن تعداد متناهی عمل سوئیچ روی گراف علامت‌دار Γ حاصل شده باشد. در این صورت Γ' و Γ را هم‌ارز سوئیچی نامیده و می‌نویسیم $\Gamma \sim \Gamma'$. اگر دو گراف علامت‌دار Γ و Γ' هم‌ارز سوئیچی باشند، آنگاه ماتریس‌های مجاورت آن‌ها متشابه‌اند. زیرا فرض کنید $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ یک ماتریس قطری باشد به طوری که برای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، اگر روی v_i سوئیچ شده باشد، $s_i = -1$ و در غیر این صورت $s_i = 1$. به سادگی دیده می‌شود که $S^{-1} = S$ و $A(\Gamma') = SA(\Gamma)S$. بنابراین دو گراف علامت‌دار که هم‌ارز سوئیچی هستند، چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه یکسان دارند [۱۷].

مقالات زیادی در باب چندجمله‌ای ویژه و مقادیر ویژه گراف‌ها نوشته شده است که برای نمونه می‌توان به مقالات [۳، ۱۳، ۱۴، ۱۵] اشاره نمود. در [۲]، چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار (K_n, G_0^-) محاسبه شده است. در [۱۲] نیز، نویسندگان چندجمله‌ای ویژه (K_n, G_1^-) را به دست آورده‌اند. در این مقاله، ابتدا به مطالعه چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$ می‌پردازیم که در آن H یک زیرگراف دلخواه K_n است. سپس به کمک آن، چندجمله‌ای ویژه گراف $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ را برای هر $0 \leq t$ محاسبه نموده و در نهایت، یک کران دقیق برای اندیس Γ ارائه می‌نماییم.

۱. چندجمله‌ای ویژه

در [۶]، لم‌های ۱، ۲ و ۳، چندجمله‌ای‌های ویژه گراف‌های کامل علامت‌دار $(K_n, P_4^- \cup tK_2^-)$ ، $(K_n, C_3^- \cup tK_2^-)$ و $(K_n, C_5^- \cup tK_2^-)$ محاسبه شده است. در قضیه ۱، با ایده‌ای مشابه، این نتایج را تعمیم می‌دهیم. قابل ذکر است که ماتریس مربعی از مرتبه S که همه درایه‌های آن ۱ است، با نماد J_S نمایش داده می‌شود. همچنین، تعریف می‌کنیم:

$$j_S = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^S.$$

قضیه ۱. فرض کنید $t \geq 1$ و $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن H یک زیرگراف

K_n است. در این صورت داریم:

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} \varphi \left(\begin{bmatrix} 2t - 3 & j_{n-2t}^T \\ 2t j_{n-2t} & A(K_{n-2t}, H^-) \end{bmatrix} \right).$$

اثبات: با حذف همه $2t$ رأس tK_2 از Γ ، داریم: $\Gamma \setminus V(tK_2) = (K_{n-2t}, H^-)$. اگر ابتدا رئوس H و سپس رئوس tK_2 را به ترتیب برچسب گذاری کنیم، می‌توان ماتریس $\lambda I - A(\Gamma)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A(K_{n-2t}, H^-) & -\mathbf{1} & \dots & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \lambda I_2 - A(K_2, -) & & -\mathbf{1} \\ \vdots & & \ddots & \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & & \lambda I_2 - A(K_2, -) \end{bmatrix}.$$

اکنون، روی ماتریس $\lambda I - A(\Gamma)$ ، تعدادی اعمال سطری و ستونی مقدماتی را به کار می‌بریم. ابتدا، به ازای $i = 1, \dots, t$ ، $(n - 2t + 2i)$ -امین سطر را از $(n - 2t + 2i - 1)$ -امین سطر کم می‌کنیم.

بعد، به ازای $i = 1, \dots, t$ ، $(n - 2t + 2i)$ -امین ستون را به $(n - 2t + 2i - 1)$ -امین ستون اضافه می‌کنیم. سپس، با استفاده از جایگشت روی اندیس تعدادی از سطرها و ستون‌ها، ماتریس D_1 به صورت زیر به دست خواهد آمد (درایه‌هایی که تأثیری در محاسبات ندارند، با نماد $*$ نشان داده شده‌اند):

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A(K_{n-2t}, H^-) & -\mathbf{2} & * \\ -\mathbf{1} & (\lambda + 3)I_t - 2J_t & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\lambda - 1)I_t \end{bmatrix}.$$

با توجه به بلوک‌های صفر ایجاد شده، با نوشتن بسط همسازهای دترمینان به ترتیب نسبت به t سطر آخر، خواهیم داشت:

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t \det D_2.$$

که در آن

$$D_2 = \begin{bmatrix} \lambda I - A(K_{n-2t}, H^-) & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & (\lambda + 3)I_t - 2J_t \end{bmatrix}.$$

حال، آخرین سطر D_2 را از همه سطرها بالاتر به جز $n - 2t$ سطر اول کم کنید و بعد $(n - 2t + 1)$ -امین ستون الی $(n - t - 1)$ -امین ستون را به آخرین ستون اضافه کنید. سپس، جایگشت دوری روی اندیس تعدادی از سطرها و ستون‌ها به کار ببرید تا ماتریس D_3 به شکل زیر پدید آید:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -j_{n-2t}^T & -2 \\ -2tj_{n-2t} & \lambda I - A(K_{n-2t}, H^-) & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\lambda + 3)I_{t-1} \end{bmatrix}.$$

فرض کنید

$$D_4 = \begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -j_{n-2t}^T \\ -2tj_{n-2t} & \lambda I - A(K_{n-2t}, H^-) \end{bmatrix}.$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} \det D_4,$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. ■

تعریف ۲ [۴، صفحه ۲۸]. فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی از مرتبه n باشد که سطرها و ستون‌های A با $X = \{1, \dots, n\}$ اندیس گذاری شده‌اند. همچنین فرض کنید $\{X_1, \dots, X_m\}$ یک افراز روی مجموعه X باشد به طوری که برای هر i ، $|X_i| = n_i$ و $X_1 = \{1, \dots, n_1\}$ ، \dots ، $X_m = \{n_1 + \dots + n_{m-1}, \dots, n\}$. ماتریس A را مطابق با $\{X_1, \dots, X_m\}$ ، به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix},$$

به طوری که $A_{i,j}$ زیر ماتریس A است متشکل از سطرهای X_i و ستون‌های X_j . اگر در هر زیر ماتریس $A_{i,j}$ مجموع درایه‌های هر سطر برابر با مقدار ثابت $b_{i,j}$ باشد، آنگاه به این افراز، افراز متعادل گفته می‌شود و ماتریس $B = (b_{i,j})$ ماتریس خارج قسمتی (یا مقسوم علیه) A وابسته به افراز $\{X_1, \dots, X_m\}$ نامیده می‌شود. دقت کنید که بنا به [۴، لم ۲-۳-۱] چندجمله‌ای ویژه B ، چندجمله‌ای ویژه A را عادی می‌کند.

فرض کنید $\Gamma = (K_n, \sigma)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد. در [۱۲]، افراز خاص $V(\Gamma)$ به صورت زیر تعریف شده که می‌تواند در محاسبه چندجمله‌ای ویژه Γ در برخی علامت دهی‌های σ به کار برده شود.

تعریف ۳ [۱۲]. فرض کنید $\Gamma = (K_n, \sigma)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد و $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ یک افراز برای $V(\Gamma)$ باشد به طوری که برای هر i, j یال‌های بین X_i و X_j هم‌علامت باشند.

به علاوه، برای $i = 1, \dots, p$ ، داشته باشیم: $\Gamma[X_i] = (K_{n_i}, +)$ و برای $i = p+1, \dots, p+q$ ، داشته باشیم: $\Gamma[X_i] = (K_{n_i}, -)$ که در آن برای هر i ، $|X_i| = n_i$. به وضوح، Π یک افراز متعادل برای $V(\Gamma)$ است. افراز Π را افراز خاص $V(\Gamma)$ گویند.

قضیه ۴. فرض کنید $t \geq 1$ و $\Gamma = (K_n, H^- \cup tK_2^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن H یک زیرگراف

K_n است. همچنین فرض کنید افراز $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ یک افراز خاص برای $V(K_{n-2t}, H^-)$ باشد، $m_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i$ و $m_1 = \sum_{i=1}^p n_i$ اگر B ماتریس خارج قسمتی $A(\Gamma)$ وابسته به افراز Π باشد، آنگاه

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{m_1 - p} (\lambda - 1)^{t + m_2 - q} (\lambda + 3)^{t-1} \varphi(B).$$

اثبات: با توجه به قضیه ۱، داریم

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} \det D_4,$$

که در آن

$$D_4 = \begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -j_{n-2t}^T \\ -2t j_{n-2t} & \lambda I - A(K_{n-2t}, H^-) \end{bmatrix}.$$

اگر رئوس $V(K_{n-2t}, H^-)$ را با توجه به افراز $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ به ترتیب برچسب گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$D_4 = \begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -1 & -1 \\ -2t & \lambda I - A(K_{n_1}, +) & * \\ -2t & * & * \end{bmatrix}.$$

حال روی ماتریس D_4 ، با تمرکز روی بلوک $\lambda I - A(K_{n_1}, +)$ تعدادی اعمال سطری و ستونی مقدماتی را به کار می‌بریم. ابتدا، $(n_1 + 1)$ -امین سطر را از همه سطرهای بالاتر به جز سطر اول کم می‌کنیم که در نتیجه ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & \lambda + 1 & 0 & -\lambda - 1 & \\ 0 & & \ddots & \vdots & 0 \\ & 0 & \lambda + 1 & -\lambda - 1 & \\ -2t & & -1 & \lambda & * \\ -2t & & * & * & * \end{bmatrix}.$$

اکنون دومین ستون الی n_1 -امین ستون را به ستون $(n_1 + 1)$ -ام اضافه می‌کنیم تا ماتریس زیر پدید آید:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -1 & -n_1 & -1 \\ & \lambda + 1 & 0 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \vdots & 0 \\ & 0 & \lambda + 1 & 0 & \\ -2t & & -1 & \lambda + 1 - n_1 & * \\ -2t & & * & * & * \end{bmatrix}.$$

با توجه به بلوک‌های صفر ایجاد شده، با نوشتن بسط همسازهای درمینیان به ترتیب نسبت به دومین سطر الی n_1 -امین

سطر، داریم:

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} (\lambda + 1)^{n_1-1} \det \begin{bmatrix} \lambda - 2t + 3 & -n_1 & -1 \\ -2t & \lambda + 1 - n_1 & * \\ -2t & * & * \end{bmatrix}.$$

با تکرار این فرآیند به ترتیب روی سایر بلوک‌های D_4 حاصل از افراز Π ، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. ■

با برهانی مشابه با برهان قضیه ۴، نتیجه زیر که در [۱۲، قضیه ۳] نیز به اثبات رسیده است، حاصل می‌شود.

نتیجه ۵. فرض کنید $\Gamma = (K_n, H^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن H یک زیرگراف K_n است. همچنین فرض کنید افراز $\Pi = \{X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}\}$ یک افراز خاص برای $V(K_n, H^-)$ باشد، به علاوه $m_1 = \sum_{i=1}^p n_i$ و $m_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i$ اگر B ماتریس خارج قسمتی $A(\Gamma)$ وابسته به افراز Π باشد، آنگاه

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{m_1-p} (\lambda - 1)^{m_2-q} \varphi(B).$$

کاکتوس G_t در شکل ۱، با k یال و t دور را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه قبل، چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ قابل محاسبه است.

قضیه ۶. فرض کنید $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن G_t کاکتوس رسم شده در شکل ۱ با k یال و $t \geq 1$ دور است. اگر $u = |V(K_n) \setminus V(G_t)| \geq 1$ آنگاه

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-2t-3} (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} (\lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (12+4t-5n)\lambda^2 + (10+8t-7n+4ku-4tu)\lambda + 3+4t-3n+12ku-28tu).$$

اثبات: در گراف علامت‌دار $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ ، با سوئیچ روی رأس v (شکل ۱ را ببینید)، داریم:

$$(K_n, G_t^-) \sim (K_n, K_{1,u}^- \cup tK_2^-).$$

در گراف علامت‌دار $\Gamma' = (K_n, K_{1,u}^- \cup tK_2^-)$ ، تعریف می‌کنیم: $X_1 = \{v\}$ ، $X_2 = V(K_n) \setminus V(K_{1,u}^- \cup tK_2^-)$ و $X_3 = N_{K_{1,u}}(v)$ واضح است که $|X_2| = k - 3t$ و $|X_3| = u$ حال اگر $\Pi = \{X_1, X_2, X_3\}$ و B ماتریس خارج قسمتی $A(\Gamma')$ وابسته به افراز $\Pi \cup \{V(tK_2)\}$ باشد، آنگاه بنابر قضیه ۴،

$$\varphi(\Gamma', \lambda) = (\lambda + 1)^{n-2t-3} (\lambda - 1)^t (\lambda + 3)^{t-1} \varphi(B).$$

از تعریف ۲، داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 2t-3 & 1 & k-3t & u \\ 2t & 0 & k-3t & -u \\ 2t & 1 & k-3t-1 & u \\ 2t & -1 & k-3t & u-1 \end{bmatrix}.$$

با محاسبه چند جمله‌ای ویژه ماتریس B که یک ماتریس مربعی مرتبه ۴ است، خواهیم داشت:

$$\varphi(B) = \lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (12+4t-5n)\lambda^2 + (10+8t-7n+4ku-4tu)\lambda$$

$$+3 + 4t - 3n + 12ku - 28tu,$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. ■

قضیه ۷ [۲، لم ۳]. فرض کنید $\Gamma = (K_n, K_{1,k}^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد. در این صورت داریم:

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-3}(\lambda^3 + (3-n)\lambda^2 + (3-2n)\lambda + 1 - n + 4k(n-k-1)).$$

قضیه ۸ [۱، قضیه ۲]. فرض کنید $\Gamma = (K_n, H^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که یال‌های منفی آن گراف ۳-منظم H از مرتبه k را القا می‌کند و $k < n$. در این صورت -1 یک مقدار ویژه Γ با تکرار حداقل $n - k - 1$ است. همچنین اگر $\lambda_0 = r \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{k-1}$ مقادیر ویژه H باشند، آنگاه $-1 - 2\lambda_i$ به ازای $i = 1, \dots, k-1$ یک مقدار ویژه Γ می‌باشد. علاوه بر این، سایر مقادیر ویژه Γ عبارتند از:

$$\frac{n - 2r - 2 \pm \sqrt{(n + 2r)^2 - 8rk}}{2}.$$

تذکر ۹. الف) بنا به قضیه ۷، قضیه ۶ برای $t = 0$ برقرار است. زیرا قرار دهید:

$$\Gamma = (K_n, G_0^-) = (K_n, K_{1,k}^-).$$

از آنجا که $u = |V(K_n) \setminus V(K_{1,k})| = n - k - 1$ و

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (12-5n)\lambda^2 + (10-7n+4ku)\lambda + 3 - 3n + 12ku \\ = (\lambda + 3)(\lambda^3 + (3-n)\lambda^2 + (3-2n)\lambda + 1 - n + 4ku), \end{aligned}$$

پس

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-3}(\lambda^3 + (3-n)\lambda^2 + (3-2n)\lambda + 1 - n + 4k(n-k-1)).$$

ب) بنا به قضیه ۸، قضیه ۶ برای $u = 0$ برقرار است. دقت کنید که در این صورت:

$$\Gamma = (K_n, G_t^-) \sim (K_n, tK_2^-)$$

و

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-2t-3}(\lambda - 1)^t(\lambda + 3)^{t-1}(\lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (12+4t-5n)\lambda^2 \\ + (10+8t-7n)\lambda + 3 + 4t - 3n). \end{aligned}$$

حال چون

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (12+4t-5n)\lambda^2 + (10+8t-7n)\lambda + 3 + 4t - 3n \\ = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 + (4-n)\lambda + 3 + 4t - 3n), \end{aligned}$$

لذا

$$\varphi(\Gamma, \lambda) = (\lambda + 1)^{n-2t-1}(\lambda - 1)^t(\lambda + 3)^{t-1}(\lambda^2 + (4-n)\lambda + 3 + 4t - 3n).$$

۲. کرانی دقیق برای اندیس

در این بخش، به کمک قضیه در هم بافنده، یک کران دقیق برای اندیس گراف علامت‌دار $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ ارائه می‌دهیم. برای انجام این کار، به معرفی یک مفهوم دیگر نیاز داریم. فرض کنید $\Gamma = (G, \sigma)$ یک گراف علامت‌دار از مرتبه n و λ یک مقدار ویژه آن باشد. علاوه بر این فرض کنید $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ یک بردار ویژه متناظر با λ باشد. در این صورت تساوی $A(\Gamma)X = \lambda X$ در سطر i ام، نتیجه می‌دهد:

$$\lambda x_i = \sum_{v_j \in N_\Gamma(v_i)} \sigma(v_j v_i) x_j.$$

معادله فوق را معادله مقدار ویژه برای v_i گویند. در سراسر این بخش اگر $v = v_i$ ، x_i را با x_v نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰. (قضیه در هم بافنده برای گراف‌های علامت‌دار) [۵، قضیه ۱-۳-۱۱]. فرض کنید $\Gamma = (G, \sigma)$ یک گراف علامت‌دار n رأسی باشد. اگر v یک رأس دلخواه از Γ و λ_i ها مقادیر ویژه باشند، آنگاه

$$\lambda_n(\Gamma) \leq \lambda_{n-1}(\Gamma \setminus v) \leq \dots \leq \lambda_2(\Gamma) \leq \lambda_1(\Gamma \setminus v) \leq \lambda_1(\Gamma).$$

قضیه ۱۱. فرض کنید $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ یک گراف کامل علامت‌دار باشد که در آن G_t کاکتوس رسم شده در شکل ۱ با k یال و t دور است. اگر $\lambda_1(\Gamma)$ نشان دهنده اندیس Γ باشد، آنگاه

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n + 1)^2 - 16t}}{2} \leq \lambda_1(\Gamma).$$

به علاوه، اگر $n = 4t$ و $k = 3t$ ، آنگاه $\lambda_1(\Gamma) = n - 3$ و در نامساوی فوق، تساوی رخ می‌دهد.

اثبات: با توجه به شکل ۱، اگر $t = 0$ ، آنگاه $\Gamma = (K_n, G_0^-) = (K_n, K_{1,k}^-)$ و $\Gamma \setminus v = (K_{n-1}, +)$. در نتیجه بنا به قضیه در هم بافنده، $\lambda_1(\Gamma \setminus v) \leq \lambda_1(\Gamma) = n - 2$. پس فرض کنیم $1 \leq t$. اگر $n = 3$ ، آنگاه $t = 1$ و به وضوح $-1 \leq \lambda_1(\Gamma)$. لذا فرض کنیم $1 \leq t$ و $4 \leq n$ داریم:

$$\Gamma \setminus v = (K_{n-1}, tK_2^-).$$

از طرف دیگر، بنا به قضیه ۸ و [۵، صفحه ۵]، $\lambda_1(\Gamma \setminus v)$ برابر است با:

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n + 1)^2 - 16t}}{2}$$

و از قضیه در هم بافنده،

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n + 1)^2 - 16t}}{2} \leq \lambda_1(\Gamma).$$

توجه شود که همواره داریم:

$$\frac{n - 5 + \sqrt{(n + 1)^2 - 16t}}{2} \geq n - 4.$$

حال فرض کنید $n = 4t$ و $k = 3t$. نشان می‌دهیم در کران پایین به دست آمده برای $\lambda_1(\Gamma)$ ، تساوی رخ می‌دهد یعنی:

$$\lambda_1(\Gamma) = \frac{n-5 + \sqrt{(n+1)^2 - 16t}}{2} = n-3.$$

برای $n=4$ ($t=1$)، چون $\Gamma = (K_4, K_3^-) \sim (K_4, -)$ پس $\lambda_1(\Gamma) = 1$ و تساوی برقرار است. لذا فرض کنید $4 < n$ در حالتی که تکرر مقدار ویژه $\lambda_1(\Gamma)$ حداقل ۲ باشد، آنگاه داریم $\lambda_1(\Gamma) = \lambda_2(\Gamma)$ و در نتیجه بنا به قضیه در هم بافنده، $\lambda_1(\Gamma) = \lambda_1(\Gamma \setminus v) = n-3$ و اثبات در این حالت تمام است. در ادامه، فرض کنید $\lambda_1(\Gamma)$ یک مقدار ویژه ساده باشد (یعنی تکرر $\lambda_1(\Gamma)$ برابر ۱ باشد). همچنین فرض کنید $A(\Gamma)$ ماتریس مجاورت Γ و بردار $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1(\Gamma)$ باشد. اگر $x_v = 0$ آنگاه

$$\lambda_1(\Gamma) = \lambda_1(\Gamma \setminus v) = n-3.$$

فرض کنید $x_v \neq 0$ ادعا می‌کنیم اگر $w, w' \in V(K_n) \setminus V(G_t)$ و $w = v_i$ و $w' = v_j$ ، آنگاه $x_w = x_{w'}$ یعنی $x_i = x_j$ می‌دانیم اگر P ماتریس مقدماتی متناظر با عمل مقدماتی تعویض سطرها i و j و سطر j را i باشد، آنگاه $P^2 = I$. در صورتی که برچسب‌های w و w' یعنی i و j را جابه‌جا کنیم، به دلیل تقارن (وضعیت یکسان w و w' در Γ)، داریم $PA(\Gamma)P = A(\Gamma)$ چون $A(\Gamma)X = \lambda_1(\Gamma)X$ ، پس $PA(\Gamma)X = \lambda_1(\Gamma)PX$ که نتیجه می‌دهد $PA(\Gamma)PPX = \lambda_1(\Gamma)PX$ یا $A(\Gamma)PX = \lambda_1(\Gamma)PX$ لذا PX نیز یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1(\Gamma)$ است. از آنجا که $\lambda_1(\Gamma)$ یک مقدار ویژه ساده است، پس PX مضرب اسکالری از X است و چون $x_v \neq 0$ پس $PX = X$ و در نتیجه $x_i = x_j$ و ادعا ثابت می‌شود. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد برای هر $u, u' \in V(G_t) \setminus v$ ، $x_u = x_{u'}$ پس اعداد حقیقی p و q وجود دارند به طوری که برای هر $u \in V(G_t) \setminus v$ و $x_u = p$ و برای هر $w \in V(K_n) \setminus V(G_t)$ ، $x_w = q$. اکنون قرار دهید $\lambda_1 = \lambda_1(\Gamma)$ و رئوس $u \in V(G_t) \setminus v$ و $w \in V(K_n) \setminus V(G_t)$ را در نظر بگیرید. معادلات مقدار ویژه برای رئوس u و w به ترتیب عبارتند از:

$$-x_v + (2t-3)p + (2t-1)q = \lambda_1 p$$

و

$$x_v + 2tp + (2t-2)q = \lambda_1 q,$$

که نتیجه می‌دهند $(\lambda_1 - 4t + 3)(p + q) = 0$. اگر $p = -q$ ، آنگاه $x_v = (2 + \lambda_1)q$ از طرف دیگر معادله مقدار ویژه برای v به صورت زیر است:

$$-2tp + (2t-1)q = \lambda_1 x_v.$$

لذا $(4t-1)q = \lambda_1(2 + \lambda_1)q$ از آنجا که $q \neq 0$ ، پس $\lambda_1(2 + \lambda_1) = n-1$ و این تناقض است زیرا با توجه به آنچه در قسمت اول قضیه ثابت شد $\lambda_1 \leq n-4$. بنابراین $p \neq -q$ و در نتیجه $\lambda_1 = 4t-3 = n-3$ و اثبات کامل می‌شود. ■

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مطالعه چندجمله‌ای ویژه گراف علامت‌دار $(K_n, H^- \cup tK_2^-)$ پرداخته شد که در آن H یک زیرگراف دلخواه K_n است. به علاوه، چندجمله‌ای ویژه گراف $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ محاسبه و یک کران دقیق برای اندیس آن ارائه شد که در آن G_t کاکتوس نشان داده شده در شکل ۱ است. در [۱۲]، نویسندگان این حدس را مطرح کرده‌اند که در میان همه گراف‌های کامل علامت‌دار از مرتبه $n < 5$ که یال‌های منفی آن یک کاکتوس با k یال و t دور القا می‌کنند، گراف $\Gamma = (K_n, G_t^-)$ بزرگترین اندیس را دارد. با اطلاعات به دست آمده از Γ می‌توان به بررسی حدس مذکور پرداخت.

References

1. S. Akbari, S. Dalvandi, F. Heydari and M. Maghasedi, On the eigenvalues of signed complete graphs, *Linear Multilinear Algebra*, **67** (3) (2019), 433-441.
2. S. Akbari, S. Dalvandi, F. Heydari and M. Maghasedi, Signed complete graphs with maximum index, *Discuss. Math. Graph Theory*, **40** (2020), 393-403.
3. H. Aram, R. Khoelaar and N. Dehgardi, Laplacian energy of graphs, *Mathematical Researches*, **6** (4) (2020), 501-508.
4. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer, New York, 2012.
5. D. Cvetković, P. Rowlinson and S. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
6. S. Dalvandi, F. Heydari and M. Maghasedi, Signed complete graphs with exactly m non-negative eigenvalues, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **45** (2022), 2107-2122.
7. B. DasGupta, G. A. Encisob, E. Sontag and Y. Zhanga, Algorithmic and complexity results for decompositions of biological networks into monotone subsystems, *BioSystems*, **90** (2007), 161-178.
8. P. Doreian and A. Mrvar, Partitioning signed social networks, *Social Networks*, **31** (2009), 1-11.
9. F. Harary, On the notion of balance of a signed graph, *Michigan Mathematical Journal*, **2** (1953), 143-146.
10. F. Harary, M. Lim and D. C. Wunsch, Signed graphs for portfolio analysis in risk management, *IMA Journal of Management Mathematics*, **13** (2003), 1-10.
11. F. Heider, Attitude and cognitive organization, *J. Psychology*, **21** (1946), 107-112.
12. N. Kafai, F. Heydari, N. Jafari Rad and M. Maghasedi, On the signed complete graphs with maximum index, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.*, **45** (2021), 2085-2090.
13. S. K. Simić and Z. Stanić, Polynomial reconstruction of signed graphs, *Linear Algebra Appl.*, **501** (2016), 390-408.
14. M. Souri, F. Heydari and M. Maghasedi, Maximizing the largest eigenvalues of signed unicyclic graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.*, **12** (2) (2020), 2050016.
15. Z. Stanić, Notes on the polynomial reconstruction of signed graphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **45** (2022), 1301-1314.

16. B. Yang, W. K. Cheung and J. Liu, Community mining from signed social networks, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, **19** (2007), 1333-1348.
17. T. Zaslavsky, Matrices in the theory of signed simple graphs, *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 13, Ramanujan Math. Soc., Mysore, (2010), 207-229.