



Kharazmi University

Interval Shrinkage Estimation of Process Performance Capability Index in Gamma Distribution

P. Nasiri¹ , H. Mokhtari Farivar²  , M. Yarmohammadi³ 

1. Department of Statistics, Payame Noor University, 19395-4697 Tehran, Iran. E-mail: pnasiri@pnu.ac.ir

2. Department of Statistics, Payame Noor University, 19395-4697 Tehran, Iran. ✉ E-mail: mokhtari.farivar@gmail.com

3. Department of Statistics, Payame Noor University, 19395-4697 Tehran, Iran. E-mail: masyar@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 18 July 2023

Accepted: 15 May 2024

Published online:

10 July 2024

Keywords:

Gamma distribution, process performance index, classical estimation, interval shrinkage estimation, average squared error.

ABSTRACT

Introduction

Evaluation of production products is a process of necessity to check product quality. One of the criteria for evaluating the quality of the manufactured product is the quality characteristic of the process performance index, which has recently been the focus of a number of researchers in statistical articles. Usually, process performance indicators are used to check whether the product quality has reached the desired level. In order for both the production of goods to be economically profitable and to attract investors, it is generally necessary that the quality of the goods exceeds the characteristic low limit. Recently, process performance indicators have received much attention in statistical articles. Process performance analysis has advantages such as continuous monitoring of process quality through process performance indicators in order to ensure that manufactured products conform to specifications, provide information on product manufacturing process design and improve process quality for engineers and designers, and reduce costs Product failure.

Tang et al. (2002) presented an unbiased estimator with minimum variance uniformly for the exponential distribution., Hong et al. (2007) developed a hypothesis testing method using maximum likelihood estimator of process performance index for Pareto distribution under Type II censored sample. Li et al. (2009) obtained the maximum likelihood estimator of the process performance index under Bohr type XII distribution based on type II incremental censoring sample. In another study, when the lifetime of the products has a Weibull distribution. Lee (2010) presented an unbiased estimator with the least variance uniformly for the performance index for the gamma distribution with a known shape parameter and presented a hypothesis testing method using this estimator. Lee (2011) made an inference on the performance index based on the censored observations using the maximum p-value method, in which case the inference on the process performance index and the scale parameter are equivalent. The time problem becomes complicated when the shape parameter is unknown. Ahmadi and Dostparast (2021) discussed product lifetime performance index related to Pareto distribution with Bayesian approach.

Material and Methods

In this article, the estimation of the process performance index is presented using the gamma distribution. For estimation of parameters, we use moment, maximum likelihood and interval shrinkage methods. To provide the interval

shrinkage estimator, after proving the unbiasedness of the estimators, it is asymptotically shown that the performance index estimator is also unbiased. In the following, the efficiency of the estimators is compared using the square error criterion and it is shown that the interval shrinkage estimator performs better.

Results and discussion

To evaluate the estimators by using the Monte Carlo simulations and real data, different estimators and their corresponding confidence intervals for different sample sizes have been compared in three censoring schemes.

Conclusion

According to the simulation results, we can say:

- As the sample size increases, the average error power of all gamma distribution estimator's decreases.
- According to the mean squared error, the interval contraction estimator performs better compared to the maximum likelihood and torque estimators, while the maximum likelihood estimator performs better compared to the torque estimator.
- With the increase of the sample size, the average error power of the process performance index estimator related to all estimators decreases and the average square error associated with the interval shrinkage estimator, which is one of the strengths of this article, is lower than the average square error of other estimators.

How to cite: Nasiri, P., Mokhtari Farivar, H., & Yarmohammadi, M. (2024). Interval shrinkage estimation of process performance capability index in Gamma distribution, *Mathematical Researches*, **10** (2), 82 – 98.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

برآورد انقباضی بازه‌های شاخص قابلیت عملکرد فرایند در توزیع گاما

پرویز نصیری^۱✉، حیدر مختاری فریور^۲، مسعود یارمحمدی^۳

۱. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران. رایانامه: pnasiri@pnu.ac.ir
۲. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران. رایانامه: mokhtari.farivar@gmail.com
۳. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران. رایانامه: masyar@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	ارزیابی محصولات تولید یک فرایند از ضرورت بررسی کیفیت محصول است. یکی از معیارهای ارزیابی کیفیت محصول تولیدی مشخصه کیفیت شاخص قابلیت عملکرد فرایند است که اخیراً در مقالات آماری مورد توجه تعدادی از محققان قرار گرفته است. برآورد شاخص قابلیت عملکرد فرایند با توجه به نوع توزیع آماری کیفیت محصول به روش‌های مختلف از جمله روش ماکسیمم درستنمایی، کمترین توان دوم خطا، ماکسیمم حاصلضرب فاصله‌ها و چندکی قابل انجام است. در این مقاله برآورد شاخص قابلیت عملکرد فرایند با استفاده از توزیع گاما به روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و انقباضی بازه‌ای ارائه می‌شود. برای ارائه برآوردگر انقباضی بازه‌ای پس اثبات نارایی برآوردگرهای گشتاوری به طور مجانبی نشان داده می‌شود که برآوردگر شاخص قابلیت عملکرد نیز ناریب است. در ادامه کارائی برآوردگرها با استفاده از معیار توان دوم خطا مورد مقایسه و نشان داده شده که برآوردگر انقباضی بازه‌ای بهتر عمل می‌کند.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۲۷	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۲۶	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۴/۲۰	
واژه‌های کلیدی: توزیع گاما، شاخص قابلیت عملکرد فرایند، برآورد کلاسیک، برآورد انقباضی بازه‌ای، میانگین توان دوم خطا.	

استناد: نصیری، پرویز؛ مختاری فریور، حیدر؛ و یارمحمدی، مسعود (۱۴۰۳). برآورد انقباضی بازه‌های شاخص قابلیت عملکرد فرایند در توزیع گاما، پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۲)، ۸۲ - ۹۸.



مقدمه

ارزیابی محصول با استفاده از شاخص‌های آماری یک ابزار مؤثر برای اندازه‌گیری توانایی بالقوه و عملکرد فرایند، تجزیه و تحلیل قابلیت عملکرد فرایند است. معمولاً از شاخص‌های قابلیت عملکرد فرایند برای بررسی اینکه آیا کیفیت محصول به سطح مورد نظر رسیده استفاده می‌شود. برای اینکه که هم تولید کالا از نظر اقتصادی سودآور و هم سرمایه‌گذار جذب شود عموماً لازم است کیفیت کالا از حد پایین مشخصه بگذرد. اخیراً شاخص‌های قابلیت عملکرد فرایند در مقالات آماری بسیار مورد توجه قرار گرفته است. تجزیه و تحلیل قابلیت عملکرد فرایند دارای مزیت‌هایی از جمله نظارت مداوم بر کیفیت فرایند از طریق شاخص‌های قابلیت عملکرد فرایند به منظور اطمینان از مطابقت محصولات تولید شده با مشخصات ارائه اطلاعات در مورد طراحی روند تولید محصول و بهبود کیفیت فرایند برای مهندسان و طراحان و کاهش هزینه خرابی محصول است. در مقالات آماری برای اندازه‌گیری صحیح مشخصه کیفیت شاخص قابلیت عملکرد فرایند (PCI)^۱ (مونتگومری)^۲ (۱۹۸۵) برای ارزیابی عملکرد قطعات الکترونیکی معیاری به صورت

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma} = \frac{E(X) - L}{\sqrt{\text{var}(X)}} \quad (1-1)$$

ارائه شده است. که در آن μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار توزیع آماری مورد استفاده در فرایند و L حد پایین مشخصه است. در به‌کارگیری توزیع‌های آماری ممکن است توزیع شاخص قابلیت عملکرد فرایند مورد استفاده دارای توزیع نرمال، نمایی، گاما، وایبول، بور^۳ و سایر توزیع‌ها آماری باشد. بنابراین مطالعات زیادی از دید استنباطی برای شاخص قابلیت عملکرد فرایند با توجه توزیع‌های آماری انجام شده است. تانگ^۴ و همکاران در سال ۲۰۰۲ برآوردگر ناریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت را برای توزیع نمایی ارائه دادند. هونگ^۵ و همکاران در سال ۲۰۰۷ یک روش آزمون فرضیه را با استفاده از برآوردگر ماکسیمم درستنمایی شاخص قابلیت عملکرد فرایند برای توزیع پارتو تحت نمونه سانسور شده نوع دوم توسعه دادند. لی^۶ و همکاران در سال ۲۰۰۹، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی شاخص قابلیت عملکرد فرایند را تحت توزیع بور نوع XII بر اساس نمونه سانسور فزاینده نوع دوم به دست آورد. در بررسی دیگر وقتی که طول عمر محصولات دارای توزیع وایبول است. لی در سال ۲۰۱۰ برای توزیع گاما با پارامتر شکل معلوم، برآوردگر ناریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت برای شاخص عملکرد ارائه و یک روش آزمون فرضیه را با استفاده از این برآوردگر ارائه دادند. لی در سال ۲۰۱۱ بر اساس مشاهدات سانسور شده با استفاده از روش حداکثر p -مقدار استنباط روی شاخص عملکرد انجام داد، که در این حالت استنباط بر روی شاخص قابلیت عملکرد فرایند و پارامتر مقیاس معادل هستند. مسئله زمان پیچیده می‌شود که پارامتر شکل نامعلوم باشد. احمدی و دوست پرست ۲۰۲۱ شاخص عملکرد طول عمر محصول مرتبط با توزیع پارتو با رویکرد بیزی مورد بحث قرار دادند.

1. Process Capability Index (PCI)

2. Montgomery

3. Burr

4. Tong

5. Hong

6. Lee

در استفاده از توزیع گاما وقتی پارامتر شکل توزیع گاما نامعلوم است، استنباط شاخص قابلیت عملکرد فرآیند با استفاده از برآورد انقباضی بازه‌ای مورد توجه قرار نگرفته است. در این تحقیق از شاخص‌های قابلیت عملکرد فرآیند برای اندازه‌گیری کیفیت محصول با توزیع گاما هنگامی که پارامتر شکل نامعلوم است، استفاده می‌شود. در این مقاله برآوردگر شاخص قابلیت عملکرد فرآیند به روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درست‌نمایی و انقباضی بازه‌ای ارائه و با یکدیگر مورد مقایسه قرار می‌گیرند. انتظار می‌رود آریبی و میانگین توان دوم خطا (MSE)^۱ برآوردگر انقباضی بازه‌ای کوچکتر از برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی باشد. در ادامه مقاله در بخش دوم ضمن معرفی توزیع گاما، گشتاور مرتبه r -ام محاسبه می‌شود. در بخش سوم برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای توزیع گاما ارائه و نشان داده می‌شود که برآوردگرها به طور مجانبی ناریب هستند. در بخش چهارم برآوردگر انقباضی بازه‌ای شاخص قابلیت عملکرد فرآیند ارائه و نشان داده می‌شود که ناریب است. در بخش پنجم برآورد گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی شاخص قابلیت عملکرد فرآیند و در بخش ششم با استفاده از شبیه‌سازی برآوردگرها با استفاده از معیار توان دوم خطا باهم مقایسه می‌شوند.

۱. توزیع گاما و گشتاور مرتبه r -ام آن

متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است، اگر تابع چگالی آن به فرم

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (1-1)$$

باشد. که در آن α و λ به ترتیب پارامتر شکل و مقیاس هستند.

۲.۱ گشتاور مرتبه r -ام توزیع گاما: با توجه به رابطه (۱-۱) گشتاور مرتبه r -ام غیرمرکزی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \mu'_r = E(X^r) &= \int_0^\infty x^r f(x; \alpha, \lambda) dx = \int_0^\infty x^r \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+r-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha+r-1} e^{-u} du, \quad u = \lambda x \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \lambda^{\alpha+r-1}} \int_0^\infty u^{\alpha+r-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\lambda^r \Gamma(\alpha)}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2-1)$$

در حالت خاص برای $r = 1, 2$ گشتاورهای مرتبه اول و دوم غیرمرکزی به ترتیب برابرند با:

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (3-1)$$

1. Mean Square Error

$$\mu'_2 = E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \quad (۴-۱)$$

با توجه به روابط (۳-۱) و (۴-۱) واریانس توزیع گاما برابر است با:

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

۲. برآورد گشتاوری پارامترهای توزیع گاما

در این بخش با توجه به روابط (۳-۱) و (۴-۱) از برابری گشتاورهای غیرمرکزی جامعه و نمونه پارامترهای α و λ برآورد می‌شود. برای این منظور می‌توان نوشت:

$$E(X) = \mu'_1 = m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (۱-۲)$$

$$E(X^2) = \mu'_2 = m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۲-۲)$$

برای برآورد پارامتر α با توجه به روابط (۱-۲) و (۲-۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{m_1'^2}{m_2'^2} = \frac{(E(X))^2}{E(X^2)} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{\lambda^2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha}$$

به عبارت دیگر

$$\frac{m_2'}{m_1'^2} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{m_2'}{m_1'^2} - 1 = \frac{m_2' - m_1'^2}{m_1'^2}$$

بنابراین برآوردگر α برابر است با:

$$\hat{\alpha} = \frac{m_1'^2}{m_2' - m_1'^2} \quad (۳-۲)$$

با توجه به رابطه (۲-۲) و استفاده از رابطه (۳-۲) برآوردگر λ برابر است با:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{1}{m'_1} \cdot \hat{\alpha} = \frac{1}{m'_1{}^2} \left(\frac{m_1{}^2}{m'_2 - m_1{}^2} \right) \\ &= \frac{m'_1}{m'_2 - m_1{}^2}\end{aligned}\quad (۴-۲)$$

۱،۲ بررسی نارایی برآوردگرهای گشتاوری: در این بخش با توجه به برآوردگرهای گشتاوری نشان داده می‌شود که این

برآوردگرها به طور مجانبی ناریب هستند. برای این منظور فرض کنید $W_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ و $W_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ باشد، به طوری که

$$\mu = E(W_1) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n \sum_{i=1}^n X_i = \frac{n\alpha}{\lambda} \quad (۵-۲)$$

$$\nu = E(W_2) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = nE(X^2) = \frac{n\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \quad (۶-۲)$$

لم ۱-۲: اگر $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ باشد، نگاه $\hat{\alpha} = \frac{m_2{}^2}{m'_2 - m_1{}^2}$

برهان: با در نظر گرفتن $W_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ و $W_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ و گشتاورهای اول و دوم نمونه می‌توان نوشت:

$$\hat{\alpha} = f(W_1, W_2) \quad (۷-۲)$$

با توجه به روابط (۵-۳) و (۶-۳) می‌توان رابطه (۷-۳) را با استفاده از بسط تیلور حول (μ, ν) به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}f(W_1, W_2) &= f(\mu, \nu) + (W_1 - \mu) \frac{\partial f}{\partial W_1} \Big|_{W_1=\mu, W_2=\nu} \\ &+ (W_2 - \nu) \frac{\partial f}{\partial W_2} \Big|_{W_1=\mu, W_2=\nu} + \dots\end{aligned}\quad (۸-۲)$$

با استفاده از رابطه (۷-۲) امید ریاضی $\hat{\alpha}$ برابر است با:

$$E(\hat{\alpha}) = f(\mu, \nu) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha - \alpha'} = \alpha$$

به تشابه می‌توان نشان داد:

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha^2 + \alpha - \alpha^2} = \lambda$$

۳. برآورد انقباضی بازه‌ای

در این بخش برآوردگرها انقباضی و انقباضی بازه‌ای که باعث کاهش آریبی برآوردگر می‌شود، مورد بحث قرار می‌گیرد. برای این منظور اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر کلاسیک و $\tilde{\theta}$ حدس اولیه باشد، برآوردگر انقباضی تلفیقی نوین از برآوردگر کلاسیک و حدس اولیه برای برآورد پارامتر در حالت کلی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\hat{\theta}(\tilde{\theta}) = \omega\hat{\theta} + (1-\omega)\tilde{\theta}, \omega \in [0,1] \quad (1-3)$$

که در آن $\omega \in (0,1)$ عامل انقباضی و $\tilde{\theta}$ مقدار حدس اولیه از فضای پارامتر است (برای اطلاع بیشتر به مقاله نصیری ابراهیمی (۲۰۲۲) مراجعه کنید). اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردگر نارایب باشد می‌توان با مینیمم کردن میانگین توان دوم خطا، عامل انقباضی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\omega^* = \frac{(\tilde{\theta} - \theta)^2}{(\tilde{\theta} - \theta)^2 + V(\hat{\theta})}, \omega^* \in [0,1] \quad (2-3)$$

با توجه به رابطه (۴-۱) می‌توان نشان داد که:

$$MSE(\hat{\theta}(\tilde{\theta})) \leq V(\hat{\theta}) = MSE(\hat{\theta})$$

حال برای ارائه برآوردگر انقباضی با توجه به رابطه (۴-۱) به جای θ می‌توان از برآوردگر آن $\hat{\theta}$ استفاده کرد. که در این صورت برآوردگر انقباضی برابر است با:

$$\hat{\theta}(\tilde{\theta}) = \omega^*\hat{\theta} + (1-\omega^*)\tilde{\theta} = \left[\frac{(\tilde{\theta} - \hat{\theta})^2}{(\tilde{\theta} - \hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta})}\right]\hat{\theta} + \left(1 - \left[\frac{(\tilde{\theta} - \hat{\theta})^2}{(\tilde{\theta} - \hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta})}\right]\right)\tilde{\theta} \quad (3-3)$$

رابطه (۳-۲) به عنوان برآوردگر انقباضی نقطه‌ای وقتی کارا است که نقطه انتخابی به درستی انتخاب شده باشد. در غیر این صورت شاید در مقایسه با برآوردگر $\hat{\theta}$ بهتر عمل نکند. تامپسون (۱۹۶۸) ایده رویکرد برآوردگر انقباضی فاصله‌ای را برای بازه‌ای $\tilde{\theta} \in (\theta_0, \theta_1)$ به صورت

$$\tilde{\theta}(\tilde{\theta}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\omega^*\hat{\theta} + (1-\omega^*)\tilde{\theta}}{(\theta_1 - \theta_0)} d\tilde{\theta} \quad (4-3)$$

ارائه داد. با توجه به روابط (۱-۴)، (۳-۴) و (۴-۴) برآوردگر انقباضی $\check{\theta}(\hat{\theta})$ بازه‌ای برابر است با:

$$\check{\theta}(\theta) = \hat{\theta} + \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{\theta - \hat{\theta}}{\theta_1 - \theta_0} \left[\arctan \frac{\theta_1 - \theta}{V(\hat{\theta})} - \arctan \frac{\theta_0 - \theta}{V(\hat{\theta})} \right] + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_0)} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \theta)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \theta)^2} \quad (۵-۳)$$

به طوری که $E(\check{\theta}(\theta)) = \theta + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_0)} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \theta)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \theta)^2}$ برای اطلاع بیشتر به مقاله گلوسنی و لیزنفلد (۲۰۱۱)

مراجعه شود.

لم: اگر

$$\check{\theta}(\theta) = \hat{\theta} + \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{(\theta - \hat{\theta})}{(\theta_1 - \theta_0)} \left[\arctan \frac{(\theta_1 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} - \arctan \frac{(\theta_0 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} \right] + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_0)} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \theta)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \theta)^2}$$

برآوردگر انقباضی بازه‌ای برای θ باشد، آنگاه

$$V(\check{\theta}(\theta)) = V(\hat{\theta}) \left[1 - \frac{\sqrt{V(\hat{\theta})}}{(\theta_1 - \theta_0)} \left(\arctan \frac{(\theta_1 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} - \arctan \frac{(\theta_0 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} \right) \right]^2$$

برهان: فرض کنید

$$c_1 = \arctan \frac{(\theta_1 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} - \arctan \frac{(\theta_0 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}}, c_2 = \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_0)} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \theta)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \theta)^2}$$

باشد. می‌توان نوشت: $\check{\theta}(\theta) = \hat{\theta} + c_1 \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{\theta - \hat{\theta}}{\theta_1 - \theta_0} + c_2$ اما با توجه امید ریاضی برآوردگر

$$E(\check{\theta}(\theta)) = E(\hat{\theta}) + c_1 \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{\theta - E(\hat{\theta})}{\theta_1 - \theta_0} + c_2 = \theta + c_2$$

$$\begin{aligned} V(\check{\theta}(\theta)) &= E(\check{\theta}^2(\theta)) - (E(\check{\theta}(\theta)))^2 = E\left[\hat{\theta} + c_1 \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{\theta - \hat{\theta}}{\theta_1 - \theta_0} + c_2\right]^2 - (\theta + c_2)^2 \\ &= E\left[\hat{\theta}^2 + c_1^2 V(\hat{\theta}) \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} + c_2^2 + 2c_1 \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{\hat{\theta}(\theta - \hat{\theta})}{\theta_1 - \theta_0} + 2c_2 \hat{\theta} + 2c_1 c_2 \sqrt{V(\hat{\theta})} \frac{(\theta - \hat{\theta})}{\theta_1 - \theta_0}\right] - (\theta + c_2)^2 \\ &= V(\hat{\theta}) + \frac{c_1^2 V^2(\hat{\theta})}{(\theta_1 - \theta_0)^2} - \frac{2c_1 V(\hat{\theta}) \sqrt{V(\hat{\theta})}}{\theta_1 - \theta_0} = V(\hat{\theta}) \left[1 - \frac{2c_1 \sqrt{V(\hat{\theta})}}{\theta_1 - \theta_0} + \frac{c_1^2 V(\hat{\theta})}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right] \\ &= V(\hat{\theta}) \left(1 - \frac{c_1 \sqrt{V(\hat{\theta})}}{\theta_1 - \theta_0} \right)^2 = V(\hat{\theta}) \left[1 - \frac{\sqrt{V(\hat{\theta})}}{\theta_1 - \theta_0} \left(\arctan \frac{(\theta_1 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} - \arctan \frac{(\theta_0 - \theta)}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

اما از آنجایی که برآوردگر (۳-۴) تابعی از θ است، برای جایگزین برآوردگر و در نظر گرفتن بازه متقارن می‌توان رابطه (۵)-۴ را به فرم زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta}) &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\omega^* \hat{\theta} + (1 - \omega^*) \tilde{\theta}}{(\theta_1 - \theta_0)} \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} \\ &= \hat{\theta} + \frac{v(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_0)} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \hat{\theta})^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \hat{\theta})^2} \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

به طوری که با توجه مقدار $E(\check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta}))$ یا رابطه (۶-۴) می‌توان برآوردگر انقباضی بازه‌ای را به صورت زیر ارائه داد.

$$\check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta}) = \hat{\theta} + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_0)} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \hat{\theta})^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \hat{\theta})^2} \quad (۷-۳)$$

که همان برآوردگر انقباضی بازه‌ای تامپسون (۱۹۶۸) است به طوری که بازه انتخابی متقارن می‌باشد. قابل ذکر است در حالی که $V(\hat{\theta})$ تابعی از θ نباشد و معلوم باشد، با افزایش آن و یا افزایش طول بازه برآورد $\check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta})$ به سمت $\hat{\theta}$ میل می‌کند. اما در رابطه $\ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \hat{\theta})^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \hat{\theta})^2}$ وقتی که $\hat{\theta} = \theta_m = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$ در نظر گرفته شوند، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta}) &= \hat{\theta} + \frac{V(\hat{\theta})}{4\theta_m} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2})^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_0 - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2})^2} \\ &= \hat{\theta} + \frac{V(\hat{\theta})}{4\theta_m} \ln \frac{V(\hat{\theta}) + (\frac{\theta_0 + \theta_1}{2})^2}{V(\hat{\theta}) + (\frac{\theta_0 + \theta_1}{2})^2} = \hat{\theta} + \frac{V(\hat{\theta})}{4\theta_m} \ln(1) \end{aligned}$$

و برای حالتی که $\theta_m = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$ و $\theta_d = \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}$ باشد، برآوردگر انقباضی بازه‌ای برابر است با:

$$\check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta}) = \hat{\theta} \left(1 - \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2}\right) + \theta_m \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2} \quad (۸-۳)$$

که میانگین و واریانس آن به ترتیب برابر است با:

$$V(\check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta})) = V(\hat{\theta}) \left(1 - \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2}\right)^2 \quad \text{و} \quad E(\check{\theta}_{ISH}(\hat{\theta})) = \theta - (\theta - \theta_m) \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2}$$

با توجه به برآوردگرهای گشتاوری توزیع گاما، برآوردگر انقباضی پارامترهای α و λ به ترتیب برابرند با:

$$\tilde{\alpha}_{ISH}(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} + \frac{V(\hat{\alpha})}{2(\alpha_1 - \alpha_0)} \ln \frac{V(\hat{\alpha}) + (\alpha_1 - \hat{\alpha})^2}{V(\hat{\alpha}) + (\alpha_0 - \hat{\alpha})^2} \quad \text{و} \quad \tilde{\lambda}_{ISH}(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda} + \frac{V(\hat{\lambda})}{2(\lambda_1 - \lambda_0)} \ln \frac{V(\hat{\lambda}) + (\lambda_1 - \hat{\lambda})^2}{V(\hat{\lambda}) + (\lambda_0 - \hat{\lambda})^2}$$

حال با توجه به برآوردگر انقباضی بازه‌ای برآوردگرها، برآوردگر شاخص قابلیت عملکرد فرایند برابر است با:

$$\hat{C}_L = \frac{\hat{\mu} - L}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\alpha}_{ISH} - L\hat{\lambda}_{ISH}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{ISH}}} \quad (۴-۹)$$

۴. برآورد گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی شاخص قابلیت عملکرد فرایند

۱,۴ برآورد گشتاوری: در این بخش با توجه به برآورد گشتاوری پارامترهای توزیع گاما، برآورد گشتاوری شاخص قابلیت عملکرد فرایند برابر است با:

$$\begin{aligned} \hat{C}_L &= \frac{\hat{E}(X) - L}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\alpha}_n - L}{\hat{\lambda}_m} = \frac{\hat{\alpha}_{nm} - L\hat{\lambda}_{nm}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{nm}}} \\ &= \frac{\frac{m_1^2}{m_2' - m_1'^2} - L \frac{m_1'}{m_2' - m_1'^2}}{\sqrt{\frac{m_1^2}{m_2' - m_1'^2}}} = \frac{m_1' - L}{\sqrt{m_2' - m_1'^2}} \end{aligned}$$

برای اینکه نشان داده شود که \hat{C}_L به‌طور مجانبی ناریب است، با توجه به روابط (۱-۳) و (۲-۳) و فرض اینکه $W_1 = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\text{می‌توان نوشت: } \nu = E(W_2) = \frac{n\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \quad \text{و} \quad \mu = E(W_1) = \frac{n\alpha}{\lambda}, \quad W_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_L &= f(W_1, W_2) \\ &= \frac{nW_1 - L}{\sqrt{nW_2 - (nW_1)^2}} \quad (۲-۴) \end{aligned}$$

با استفاده از بسط تیلور می‌توان رابطه (۵-۲) را حول (μ, ν) به‌صورت زیر بسط داد:

$$\hat{C}_L = f(W_1, W_2) = f(\mu, \nu) + (W_1 - \mu) \frac{\partial f}{\partial W_1} \Big|_{W_1=\mu, W_2=\nu} + (W_2 - \nu) \frac{\partial f}{\partial W_2} \Big|_{W_1=\mu, W_2=\nu} + \dots \quad (3-4)$$

برای به دست آوردن امید ریاضی \hat{C}_L می‌توان نوشت:

$$E(\hat{C}_L) = f(\mu, \nu) = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-L}}{\sqrt{\frac{\nu}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}} = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} - L}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2}} = \frac{\alpha - L\lambda}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\frac{\alpha}{\lambda} - L}{\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda^2}}} = \frac{E(X) - \lambda L}{\sqrt{\text{var}(X)}} = C_L$$

۲،۴ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی: در این بخش با توجه به مقاله شعبانی و جعفری (۲۰۲۲) برای برآورد پارامترهای توزیع گاما به روش ماکسیمم درست‌نمایی، فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از رابطه (۱-۱) باشد. در این صورت تابع درست‌نمایی برابر است با:

$$L(\alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \lambda) = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \lambda^{n\alpha} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i} \quad (4-4)$$

اگر $\ell(\alpha, \lambda)$ لگاریتم رابطه (۵-۳) باشد، می‌توان نوشت:

$$\ell(\alpha, \lambda) = -n \log(\Gamma(\alpha)) + n\alpha \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad (5-4)$$

برای به دست آوردن معادلات نرمال از رابطه (۵-۵) نسبت به پارامترهای α و λ مشتق می‌گیریم که در این صورت داریم:

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad (6-4)$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \quad (7-4)$$

که در آن $\Gamma'(\alpha)$ مشتق تابع گاما است. از برابری روابط (۶-۴) و (۷-۴) با صفر می‌توان پارامترهای α و λ را برآورد کرد. اگر $\hat{\alpha}$ برآورد α باشد، برآوردگر $\hat{\lambda}$ با توجه به رابطه (۵-۷) برابر است با:

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{X}} \quad (۸-۴)$$

حال برای برآورد α از برابری رابطه (۶-۴) با صفر می‌توان نوشت:

$$-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) = 0 \quad (۹-۴)$$

از آنجاییکه رابطه (۹-۴) تابعی صریح از α نیست می‌توان برای برآورد α از روش نیوتن-رافسون به صورت زیر استفاده کرد.

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} - \frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad (۱۰-۴)$$

به طوری که

$$g(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - n \log(\lambda) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad \text{و} \quad g'(\alpha) = \frac{\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha) - (\Gamma'(\alpha))^2}{\Gamma^2(\alpha)} = \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2$$

که در آن $\Gamma''(\alpha)$ مشتق دوم تابع گاما است. بنابراین با توجه به برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامترها برآوردگر شاخص شاخص قابلیت عملکرد برابر است با:

$$\hat{C}_{L_{mle}} = \frac{\hat{\mu}_{mle} - L}{\hat{\sigma}_{mle}} = \frac{\hat{\alpha}_{ISH} - L\hat{\lambda}_{ISH}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{ISH}}} \quad (۱۱-۴)$$

۵. شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی برآوردگرهای شاخص قابلیت عملکرد فرایند به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری و انقباضی بازه‌های نمونه‌های به اندازه‌های $n = 10(10)(80)$ از توزیع گاما برای مقادیر مختلف پارامترهای α و λ با توجه به بازه‌های انتخابی برای α و λ تولید می‌شود. برای ارزیابی روش‌های برآورد شاخص قابلیت عملکرد فرایند با توجه به روش‌های برآورد

پارامترهای توزیع گاما از میانگین توان دوم خطا استفاده می‌شود. با توجه به اریبی $\sum_{i=1}^{1000} \hat{C}_{L_i}$ و میانگین $c_L - \bar{\hat{C}}_L = c_L - \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \hat{C}_{L_i}$

توان دوم خطا $MSE(\hat{C}_L) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{C}_{L_i} - \bar{\hat{C}}_L)^2$ با استفاده از نرم افزا R نسخه 4.3.2 پس از برآورد

پارامترها در جداول ۱ تا ۴ آورده شده است. با توجه به نتایج شبیه‌سازی می‌توان گفت:

الف- با افزایش اندازه نمونه میانگین توان خطای همه برآوردگرهای توزیع گاما کاهش می‌یابد.

ب- با توجه میانگین توان دوم خطا برآوردگر انقباضی بازه‌ای در مقایسه با برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و گشتاوری بهتر عمل می‌کند و این در حالی است که برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی در مقایسه با برآوردگر گشتاوری بهتر عمل می‌کند.

ج- با افزایش اندازه نمونه میانگین توان خطا برآوردگر شاخص قابلیت عملکرد فرایند مرتبط با تمام برآوردگرها کاهش می‌یابد و میانگین توان دوم خطا مرتبط با برآوردگر انقباضی بازه‌ای که یکی از نقاط قوت این مقاله است کمتر از میانگین توان دوم خطای سایر برآوردگرها است.

د- با توجه به نتایج می‌توان گفت با کاهش پارامتر λ و افزایش اندازه نمونه، میانگین توان دوم خطای برآوردگرها شاخص قابلیت عملکرد فرایند کاهش می‌یابد.

ه- با توجه نتایج جدول ۲ و ۳ برای α و λ ثابت با کاهش مقدار L میانگین توان دوم خطا برآوردگر شاخص قابلیت عملکرد فرایند افزایش می‌یابد.

و- برای مقایسه سریع میانگین توان دوم خطا برآوردگرهای شاخص قابلیت عملکرد فرایند برحسب اندازه نمونه در شکل ۱ آورده شده است.

جدول ۱: برآورد و میانگین توان دوم خطا پارامترهای توزیع گاما و شاخص قابلیت عملکرد فرایند وقتی که

$$\alpha = 7, \lambda = 0.5, \alpha \in (6.5, 7.5), \lambda \in (0.1) \quad L = 1, c_L = 2.456769$$

روش	اندازه	ماکسیمم درست‌نمایی			گشتاوری			انقباضی بازه‌ای		
	n	$\hat{\alpha}_{mle}$	$\hat{\lambda}_{mle}$	\hat{C}_{Lmle}	$\hat{\alpha}_{mm}$	$\hat{\lambda}_{mm}$	\hat{C}_{Lmm}	$\hat{\alpha}_{ISH}$	$\hat{\lambda}_{ISH}$	\hat{C}_{LISH}
Estimation	10	9.938338	0.721532	2.820077	10.23566	0.743096	2.860630	9.779250	0.715197	2.784321
MSE	10	8.633829	0.049076	0.131993	10.46947	0.059096	0.163104	0.912812	0.055798	0.107290
Estimation	20	8.071743	0.581215	2.600229	8.227012	0.59266	2.621523	7.926569	0.588404	2.563636
MSE	20	1.148633	0.006596	0.020581	1.505559	0.008586	0.027144	0.600888	0.008513	0.01142
Estimation	30	7.783458	0.557429	2.566685	7.902944	0.565966	2.583860	7.678379	0.563800	2.540179
MSE	30	0.613807	0.003298	0.012081	0.815308	0.004351	0.016152	0.449129	0.004333	0.006957
Estimation	40	7.587788	0.54345	2.539082	7.661768	0.548752	2.549751	7.509488	0.547567	2.519841
MSE	40	0.345495	0.001888	0.006775	0.437937	0.002377	0.008646	0.304559	0.002371	0.003978
Estimation	50	7.43592	0.533916	2.51794	7.502678	0.538761	2.527305	7.401820	0.538011	2.507417
MSE	50	0.190026	0.00115	0.003742	0.252685	0.001502	0.004975	0.201715	0.001501	0.002565
Estimation	60	7.378643	0.528885	2.510574	7.445751	0.533803	2.520379	7.362872	0.533233	2.504014
MSE	60	0.143370	0.000834	0.002895	0.198694	0.001143	0.004046	0.165759	0.001141	0.002232
Estimation	70	7.265084	0.519486	2.493267	7.328059	0.523967	2.502475	7.279476	0.523680	2.492822
MSE	70	0.070269	0.000380	0.001332	0.107623	0.000574	0.002089	0.097165	0.000574	0.001300
Estimation	80	7.261994	0.520514	2.493923	7.305740	0.523654	2.500299	7.262997	0.523374	2.491825
MSE	80	0.068641	0.000421	0.00138	0.093477	0.000560	0.001895	0.085486	0.000559	0.001229

جدول ۲: برآورد و میانگین توان دوم خطا پارامترهای توزیع گاما و شاخص قابلیت عملکرد فرایند وقتی که

$$\alpha = 7, \lambda = 0.5, \alpha \in (6.5, 7.5), \lambda \in (0.1) \quad L = 0.05, c_L = 2.636302$$

روش	اندازه	ماکسیمم درست‌نمایی			گشتاوری			انقباضی بازه‌ای		
	n	$\hat{\alpha}_{mle}$	$\hat{\lambda}_{mle}$	$\hat{C}_{L_{mle}}$	$\hat{\alpha}_{mm}$	$\hat{\lambda}_{mm}$	$\hat{C}_{L_{mm}}$	$\hat{\alpha}_{ISH}$	$\hat{\lambda}_{ISH}$	$\hat{C}_{L_{ISH}}$
Estimation	10	9.994442	0.731234	3.046892	10.22989	0.748744	3.081444	9.773624	0.71961	3.002090
MSE	10	8.966682	0.053469	0.168584	10.43217	0.061873	0.198151	0.912528	0.058268	0.133801
Estimation	20	8.239664	0.594465	2.818508	8.401524	0.606049	2.842966	8.070200	0.600488	2.78226
MSE	20	1.536767	0.008924	0.033199	1.964270	0.011246	0.042701	0.662649	0.011121	0.021304
Estimation	30	7.843334	0.562514	2.766161	7.948054	0.570007	2.782510	7.711377	0.567569	2.738848
MSE	30	0.711212	0.003908	0.016863	0.898805	0.004901	0.021377	0.473353	0.004877	0.010516
Estimation	40	7.476616	0.534827	2.707388	7.543873	0.539663	2.717896	7.429736	0.538878	2.696534
MSE	40	0.227163	0.001213	0.005053	0.295798	0.001573	0.006658	0.228275	0.001571	0.003628
Estimation	50	7.313882	0.522815	2.681177	7.415867	0.530227	2.698187	7.342144	0.529771	2.684343
MSE	50	0.098522	0.000521	0.002014	0.172945	0.000914	0.00383	0.147445	0.000913	0.002308
Estimation	60	7.398917	0.531014	2.699538	7.474717	0.536417	2.711993	7.382761	0.535755	2.694842
MSE	60	0.159135	0.000962	0.003999	0.225356	0.001326	0.005729	0.183911	0.001324	0.003427
Estimation	70	7.260416	0.519827	2.676262	7.312973	0.523571	2.684330	7.268366	0.523293	2.675949
MSE	70	0.067817	0.000393	0.001597	0.097952	0.000556	0.002307	0.089213	0.000555	0.001572
Estimation	80	7.275901	0.521793	2.679032	7.293547	0.523111	2.680776	7.25388	0.522844	2.673316
MSE	80	0.076121	0.000475	0.001826	0.08617	0.000534	0.001978	0.079334	0.000534	0.001370

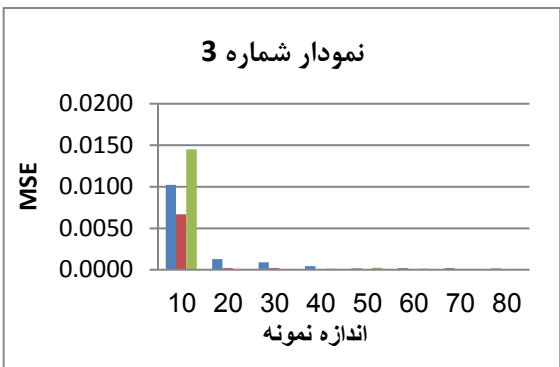
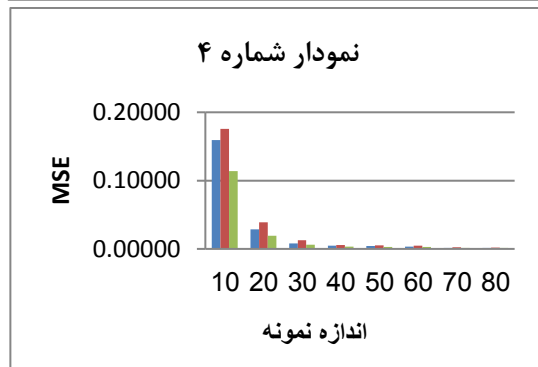
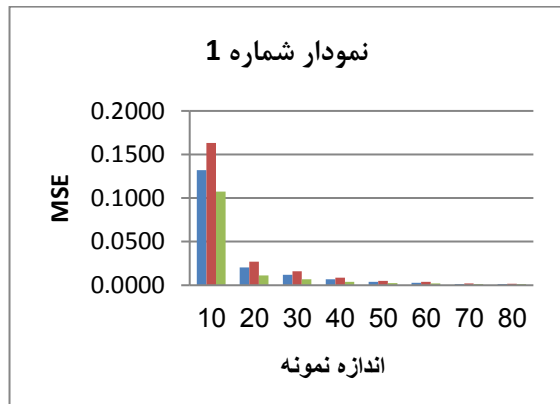
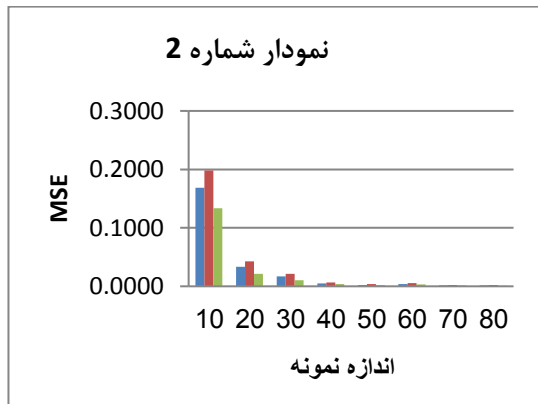
جدول ۳: برآورد و میانگین توان دوم خطا پارامترهای توزیع گاما و شاخص قابلیت عملکرد فرایند وقتی که

$$\alpha = 0.5, \lambda = 6.5, \alpha \in (0.65), \lambda \in (6, 7) \quad L = 0.05, c_L = 0.247487$$

روش	اندازه	ماکسیمم درست‌نمایی			گشتاوری			انقباضی بازه‌ای		
	n	$\hat{\alpha}_{mle}$	$\hat{\lambda}_{mle}$	$\hat{C}_{L_{mle}}$	$\hat{\alpha}_{mm}$	$\hat{\lambda}_{mm}$	$\hat{C}_{L_{mm}}$	$\hat{\alpha}_{ISH}$	$\hat{\lambda}_{ISH}$	$\hat{C}_{L_{ISH}}$
Estimation	10	0.653627	10.68553	0.146395	0.874953	14.35541	0.165655	0.813322	13.86339	0.127076
MSE	10	0.023601	17.51863	0.010220	0.140589	61.7075	0.006697	0.123260	0.984053	0.014499
Estimation	20	0.567907	8.149369	0.211859	0.697673	9.988116	0.233023	0.678870	9.52609	0.242083
MSE	20	0.004611	2.720419	0.001269	0.039074	12.16695	0.000209	0.037605	0.924052	2.92E-05
Estimation	30	0.535695	7.519881	0.217258	0.631833	8.858525	0.233654	0.623292	8.434713	0.252156
MSE	30	0.001274	1.040157	0.000914	0.01738	5.562638	0.000191	0.017083	0.847622	2.18E-05
Estimation	40	0.531463	7.304846	0.226826	0.597455	8.22104	0.238366	0.592751	7.847240	0.258255
MSE	40	0.000990	0.647777	0.000427	0.009497	2.961979	8.32E-05	0.009408	0.747601	0.000116
Estimation	50	0.520706	7.018125	0.234586	0.577241	7.776183	0.245397	0.574276	7.466395	0.263120
MSE	50	0.000429	0.268453	0.000166	0.005966	1.628643	4.37E-06	0.005931	0.619576	0.000244
Estimation	60	0.51654	6.964369	0.233738	0.56365	7.611613	0.242132	0.561632	7.335258	0.258775
MSE	60	0.000274	0.215639	0.000189	0.004051	1.235682	2.87E-05	0.004035	0.552709	0.000127
Estimation	70	0.517277	6.98015	0.233619	0.557694	7.515589	0.241491	0.556035	7.261722	0.257041
MSE	70	0.000298	0.230544	0.000192	0.003329	1.031420	2.60E-05	0.003318	0.507734	9.13E-05
Estimation	80	0.514906	6.919280	0.235201	0.554173	7.449538	0.242711	0.55271	7.212472	0.251323
MSE	80	0.000222	0.175796	0.000151	0.002935	0.901623	2.28E-05	0.002926	0.474133	9.67E-05

جدول ۴: برآورد و میانگین توان دوم خطا پارامترهای توزیع گاما و شاخص قابلیت عملکرد فرایند وقتی که $\alpha = 6.5, \lambda = 0.5, \alpha \in (6, 7), \lambda \in (0, 1) L = 0.05, c_L = 2.539704$ است.

روش	اندازه n	ماکسیمم درست‌نمایی			گشتاوری			انقباضی بازه‌ای		
		$\hat{\alpha}_{mle}$	$\hat{\lambda}_{mle}$	\hat{C}_{Lmle}	$\hat{\alpha}_{mm}$	$\hat{\lambda}_{mm}$	\hat{C}_{Lmm}	$\hat{\alpha}_{ISH}$	$\hat{\lambda}_{ISH}$	\hat{C}_{LISH}
Estimation	10	9.290215	0.726140	2.939012	9.43987	0.737712	2.958901	8.991722	0.710970	2.877419
MSE	10	7.785299	0.051139	0.159447	8.642833	0.056507	0.175726	0.896296	0.053485	0.114051
Estimation	20	7.593902	0.588349	2.708601	7.766453	0.601762	2.736486	7.458472	0.596637	2.677998
MSE	20	1.196622	0.007806	0.028526	1.603902	0.010356	0.038723	0.615961	0.010249	0.019125
Estimation	30	7.098969	0.548315	2.630203	7.236312	0.55928	2.652968	7.060533	0.557529	2.618984
MSE	30	0.358764	0.002334	0.008190	0.542155	0.003514	0.012829	0.351557	0.003502	0.006285
Estimation	40	6.952473	0.537368	2.609677	6.996634	0.540764	2.615238	6.89771	0.539934	2.595982
MSE	40	0.204732	0.001396	0.004896	0.246645	0.001662	0.005705	0.197847	0.001659	0.003167
Estimation	50	6.910869	0.532728	2.605452	6.948456	0.535400	2.609995	6.864737	0.534774	2.593720
MSE	50	0.168813	0.001071	0.004323	0.201113	0.001253	0.004941	0.167439	0.001252	0.002918
Estimation	60	6.861532	0.528361	2.598192	6.928637	0.533455	2.608808	6.851031	0.532896	2.593750
MSE	60	0.130705	0.000804	0.003421	0.183730	0.001119	0.004775	0.155213	0.001118	0.002921
Estimation	70	6.743744	0.521041	2.577978	6.79616	0.525143	2.586342	6.755841	0.524827	2.578478
MSE	70	0.059411	0.000443	0.001465	0.087711	0.000632	0.002175	0.080638	0.000632	0.001303
Estimation	80	6.725022	0.519459	2.575179	6.770317	0.522956	2.582018	6.736269	0.522692	2.575371
MSE	80	0.050635	0.000379	0.001258	0.073071	0.000527	0.001791	0.068095	0.000527	0.001210



شکل ۱: میانگین توان دوم خطا برآودگرهای شاخص قابلیت عملکرد فرایند برحسب اندازه نمونه (رنگ‌ها آبی، نارنجی و سبز به ترتیب مربوط به روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی، گشتاوری و انقباضی بازه‌ای است)

References

1. M. V Ahmadi and M. Doostparast, Evaluating the lifetime performance index of products based on progressively Type- II censored Pareto samples: A new Bayesian approach. *Quality and Reliability Engineering International*, **38** (2022), 1612-1634.
2. V. Golosnoy, and R. Liesenfeld, Interval shrinkage estimators, *J. Appl. Stat.* N0.3, **38** (2011), 465-477.
3. C. W. Hong, , J. W. Wu, and C.-H. Cheng. Computational procedure of performance assessment of lifetime index of businesses for the Pareto lifetime model with the right type II censored sample. *Applied Mathematics and Computation* **184** (2007): 336–350.
4. J. Shaabani and A. A. Jafari. Inference on the lifetime performance index of gamma distribution: point and interval estimation, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **53** (2024), 1368-1386.
5. W. C. Lee, Assessing the lifetime performance index of gamma lifetime products in the manufacturing industry. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. **224** (2010).1571–1579.
6. W. C. Lee, Inferences on the lifetime performance index for Weibull distribution based on censored observations using the max p-value method. *International Journal of Systems Science* **42** (2011), 931–937.
7. W. C. Lee, J. W. Wu, and C. W. Hong. Assessing the lifetime performance index of products from progressively type II right censored data using Burr XII model. *Mathematics and Computers in Simulation* **79** (2009), 2167–2179.
8. D. C. Montgomery, *Introduction to statistical quality control* (1985). John Wiley & Sons.
9. J. R. Thompson, Accuracy borrowing in the estimation of the mean by shrinkage to an interval, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **63** (1968), 953-963.
10. P. Nasiri and F. Ebrahimi, Interval Shrinkage Estimation Reliability System of Stress-Strengths Models in two parameter Lindley distribution. *Mathematical Researches*, **8** (2022), 72-88.
11. L. I. Tong, K. S. Chen, and H. T. Chen. Statistical testing for assessing the performance of lifetime index of electronic components with exponential distribution. *International Journal of Quality & Reliability Management* **19** (2002), 812–824.