



Kharazmi University

State n-Fold Obstinate Ideals in State MV-Algebras

F. Forouzesh¹ ✉, M. Salarbadeh² , A. Darijani³ 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Higher Education Complex of Bam, Kerman, Iran. E-mail: frouzesh@bam.ac.ir

2. Department of Mathematics, Shahid Bahonar university, Kerman, Iran. E-mail: fmohamadf5395@gmail.com

3. Department of Mathematics, Higher Education Complex of Bam, Kerman, Iran. E-mail: a.darijan@bam.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 28 July 2023

Received in revised form:

3 July 2024

Accepted: 7 July 2024

Published online:

10 November 2024

Keywords:

State ideals

(state n-fold obstinate,

state n-fold Boolean)

State locally finite,

Semi-simple.

ABSTRACT

Introduction

States on MV -algebras were introduced by Mundici with the intent of measuring the average truth-value of propositions in the Lukasiewicz logic, which are generalizations of probability measures on Boolean algebras, states on MV -algebras have been deeply investigated by Flaminio and Montagna. The last decade, some concepts of state ideals in a state MV –algebra are introduced such as: state Boolean ideals, state primary ideals and state obstinate ideals in a state MV –algebra and give some of their properties.

In this paper, some types of state ideals are introduced such as: state n-fold obstinate and state n-fold Boolean ideals in state MV-algebras. Then we investigate the relationship between state n-fold obstinate ideals with the other state ideals in state MV-algebras.

Finally, we study quotient algebras induced by state n-fold obstinate ideals in state MV-algebras.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- We introduced state n-fold obstinate ideals and state n-fold Boolean ideals in state MV-algebras.
- We studied the relationship between state n-fold obstinate ideals with the other state ideals in state MV-algebras.
- We investigate quotient algebras induced by state n-fold obstinate ideals in state MV-algebras.

How to cite: Forouzesh, F., Salarbadeh, M., & Darijani, A. (2024). State n-Fold Obstinate Ideals in State MV-Algebras. *Mathematical Researches*, **10** (3), 100 – 122.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

ایده‌آل‌های سرسخت n -لایه حالت در MV -جبرهای حالت

فرشته فروزش^۱، محمد سالارباده^۲، علی دریجانی^۳

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، کرمان، ایران. رایانامه: frouzesh@bam.ac.ir
۲. فارغ التحصیل ارشد، دانشکده ریاضی، شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران. رایانامه: fmohamadf5395@gmail.com
۳. گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، کرمان، ایران. رایانامه: a.darjani@bam.ac.ir

| اطلاعات مقاله | چکیده |
|-------------------------------|---|
| نوع مقاله: مقاله پژوهشی | در این مقاله، برخی از انواع ایده‌آل‌های حالت مانند: ایده‌آل‌های حالت سرسخت n -لایه و ایده‌آل‌های حالت بولی n -لایه را در MV -جبرهای حالت معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی رابطه میان ایده‌آل‌های حالت سرسخت n -لایه با سایر ایده‌آل‌های حالت در یک MV -جبر حالت می‌پردازیم. در پایان، جبرهای خارج قسمتی القایی توسط ایده‌آل‌های حالت سرسخت n -لایه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. |
| تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۰۶ | |
| تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۱۳ | |
| تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱۷ | |
| تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰ | |
| واژه‌های کلیدی: | |
| ایده‌آل‌های حالت (n -لایه) | |
| سرسخت، n -لایه بولی، | |
| حالت موضعا متناهی، | |
| نیمه ساده، | |

استناد: فروزش، فرشته؛ سالارباده، محمد؛ و دریجانی، علی (۱۴۰۳). ایده‌آل‌های سرسخت n -لایه حالت در MV -جبرهای حالت. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۳)، ۱۰۰ - ۱۲۲.



مقدمه

اولین بار MV -جبرها، بوسیله چانگ^۱ در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند [4]. در واقع آنها یک ساختار جبری از منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ^۲ هستند و نظریه آنها بعد از سال ۱۹۸۶ توسعه داده شد [4]. همچنین ماندیسی^۳ نشان داد یک هم ارزی رسته ای بین رسته MV -جبرها و رسته l -گروههای آبلی با یک قوی وجود دارد، این رسته از جبرها توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفت [21].

نظریه ایده آنها یک نقش اصلی در MV -جبرها بازی می‌کند و برای مشخص کردن MV -جبرها مفید است. پس از آن، معتمد^۴ و برومند^۵ فیلترهای سرسخت n -لایه در BL -جبرها را معرفی کردند [19]. فروزش^۶ و دیگران نیز ایده‌آلهای سرسخت در MV -جبرها را معرفی کردند و رابطه میان آنها با سایر ایده‌آلهای بررسی کردند [12].

40 سال بعد از بوجود آمدن MV -جبرها، حالتها روی MV -جبرها بوسیله ماندیسی مطرح شدند و در جهت اندازه میانگین ارزش درستی گزاره‌ها در منطق لوکاسویچ، که تعمیم اندازه احتمال روی جبرهای بولی هستند مورد استفاده قرار گرفتند [20].

در دهه آخر، نظریه حالتها روی MV -جبرها و ساختارهای نسبی آنها توسط بسیاری از محققان مانند: کهر^۷ و ماندیسی [18]، کروپا^۸ [17]، دوارنسکی^۹ و راجانک^{۱۰} [9]، جور جسیو^{۱۱} [15]، و دیگران مورد مطالعه قرار گرفتند. حالتها روی MV -جبرها، توسط فلامینو^{۱۲} و مونتگانا^{۱۳} عمیقاً مورد بررسی قرار گرفتند [13] و [14]. همچنین، آن‌ها یک عمل یکتایی σ روی MV -جبرها تعریف کردند که خواص عادی حالتها را حفظ می‌کند.

سینگیو^{۱۴} مفهوم BL -جبر حالت را به عنوان تعمیمی از مفهوم یک MV -جبر حالت معرفی کرد [6] به همین ترتیب، مفهوم تعمیم یافته آن توسط دوارنسکی ارائه شد [9] دوارنسکی، به طور غیر مستقیم توصیف کاملی از هم‌ریختی BL -جبرهای ریختار حالت ارائه داد که سرانجام به یک نتیجه مشابه از دی نولا^{۱۵} و دوارنسکی تعمیم داده شد [7] و دی نولا آن را ادامه داد [8]. پس از آن باتر^{۱۶} و دوارنسکی توصیفی کاملاً غیر مستقیم از BL -جبرهای حالت ساده نشدنی ثابت مطرح کرده و نظریه‌های جامع از جبرهای ریختار حالت ارائه دادند [3].

در این مقاله، مفاهیم ایده‌آلهای حالت مانند: ایده‌آل‌های حالت بولی n -لایه و ایده‌آلهای حالت سرسخت n -لایه را در یک MV -جبر حالت (A, σ) تعریف کرده و قضایای مربوطه را ارائه داده ایم. همچنین، توصیفی از ایده‌آلهای حالت سرسخت n -لایه و ایده‌آلهای حالت بولی n -لایه ارائه داده و روابط میان ایده‌آلهای حالت سرسخت n -لایه با سایر ایده‌آلهای

¹ C. C. Chang

² Lukasiewicz

³ D. Mundici

⁴ S. Motamed

⁵ A. Borumand

⁶ F. Forouzeh

⁷ J. Kuher

⁸ A. Kroupa

⁹ A. Dvurečenskij

¹⁰ J. Rachuneki

¹¹ G. Georgescu

¹² T. Flaminio

¹³ F. Montagna

¹⁴ L. C. Ciungu

¹⁵ A. Di Nola

¹⁶ M. Botur

در یک MV -جبر حالت (A, σ) را بررسی کرده ایم. در ادامه، نشان می‌دهیم اگر I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد، آنگاه $(A/I, \bar{\sigma})$ یک MV -جبر حالت موضعاً متناهی است.

۱. پیشنیازها

در این بخش، به مطالعه برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز در این مقاله می‌پردازیم.

تعریف ۱،۱ [5] اگر $L = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ یک مشبکه کراندار باشد، یک عضو $a \in L$ را متممدار گوییم، اگر

$$a \wedge b = 0 \text{ و } a \vee b = 1$$

مجموعه همه عضوهای متممدار L را با $B(L)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲،۱ [2] جبر $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ از نوع $(2, 2, 1, 0, 0)$ یک جبر بولی است، اگر (L, \wedge, \vee) یک مشبکه

باشد. به قسمی که برای هر $x, y, z \in L$ دارای خواص زیر باشد:

$$; x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0 \quad (1)$$

$$; x \wedge x^* = 0, x \vee x^* = 1 \quad (2)$$

$$. x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (3)$$

تعریف ۳،۱ [4] جبر $(A, \oplus, *, 0)$ از نوع $(2, 1, 0)$ یک MV -جبر است، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$(MV1) \quad (A, \oplus, 0) \text{ یک تکواره آبلی است.}$$

$$. (a^*)^* = a \quad (MV2)$$

$$; 0^* \oplus a = 0^* \quad (MV3)$$

$$. (a^* \oplus b)^* \oplus b = (b^* \oplus a)^* \oplus a \quad (MV4)$$

ثابت ۱ و عملهای کمکی \odot, \ominus, \odot و \wedge, \vee را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$; a \odot b = (a^* \oplus b^*)^* \quad (1)$$

$$; a \ominus b = a \odot b^* \quad (2)$$

$$; 1 = 0^* \quad (3)$$

$$. a \vee b = a \oplus (b \odot a^*) \text{ و } a \wedge b = a \odot (b \oplus a^*) \quad (4)$$

که از اینرو (A, \wedge, \vee) یک مشبکه توزیع پذیر با ۰ و ۱ می شود که $B(L(A))$ عناصر متمم دار $L(A)$ می باشند که با $B(A)$ نیز نمایش می دهند.

در ادامه، در سرتاسر مقاله، منظور از A ، یک MV -جبر است.

تعریف ۴،۱ [5] یک عضو $x \in A$ دارای مرتبه n است، اگر n کوچکترین عدد طبیعی

(در صورت وجود) باشد به قسمی که $nx = 1$ (جاییکه $nx = x \oplus x \oplus \dots \oplus x$) و آن را به صورت $ord(x) = n$ نشان می دهیم. در این حالت گوییم x دارای مرتبه متناهی است و می نویسیم $ord(x) < \infty$.

یک MV -جبر A را موضعاً متناهی گوییم، هرگاه هر عضو نافرش دارای مرتبه متناهی باشد.

لم ۵،۱ [5] برای هر $x, y \in A$ شرایط زیر معادلند:

$$(1) \quad x^* \oplus y = 1$$

$$(2) \quad x \odot y^* = 0$$

$$(3) \quad \text{یک عضو } z \in A \text{ وجود دارد بطوریکه } z \oplus x = y$$

$$(4) \quad y = x \oplus (y \ominus x)$$

تعریف ۶،۱ [5] برای هر $x, y \in A$ ، $x \leq y$ اگر و تنها اگر y و x در یکی از شرایط معادل (۴) - (۱) در

لم بالا صدق کنند.

تعریف ۷،۱ [5] برای هر $x, y \in A$ تابع فاصله چانگ، در یک MV -جبر به صورت زیر است:

$$d: A \times A \rightarrow A, \quad d(x, y) = (x \odot y^*) \oplus (y \odot x^*).$$

لم ۸،۱ [5] برای $x, y, z \in A$ خواص زیر برقرار است:

$$(1) \quad x \leq y \text{ اگر و تنها اگر } x^* \leq y^*$$

$$(2) \quad \text{اگر } x \leq y \text{ آنگاه } x \odot z \leq y \odot z \text{ و } x \oplus z \leq y \oplus z$$

$$(3) \quad x \odot y \leq x, y \text{ و } x \odot y \leq x, y \text{ و } x \oplus y \leq x \oplus y \text{ و } x \leq nx \text{ و } x \leq x \odot x \odot \dots \odot x = x^n$$

$$(4) \quad x \odot x^* = 0 \text{ و } x \oplus x^* = 1$$

$$(5) \quad \text{اگر } x \in B(A) \text{، آنگاه برای هر } y \in A \text{، } x \wedge y = x \odot y \text{ و } x \vee y = x \oplus y$$

$$(6) \quad x \odot y \leq z \text{ اگر و تنها اگر } x \leq y^* \oplus z$$

(۷) اگر $x \leq y$ و $z \leq t$ ، آنگاه $x \oplus z \leq y \oplus t$

تعریف ۹،۱ [5] یک زیرمجموعه ناتهی I یک ایده‌آل از A گوییم هرگاه

(۱) اگر $x \in I$ و $y \in A$ و $y \leq x$ ، آنگاه $y \in I$.

(۲) اگر $x, y \in I$ ، آنگاه $x \oplus y \in I$

تعریف ۱۰،۱ [5] فرض کنید A و B دو MV -جبر باشند. تابع $f: A \rightarrow B$ را MV -همریختی گوییم اگر

(۱) $f(0) = 0$

(۲) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$

(۳) $f(x^*) = f(x)^*$

تعریف ۱۱،۱ [5] فرض کنید I یک ایده‌آل از A است. رابطه همنهشتی \sim_I را روی A به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$x \sim_I y \Leftrightarrow d(x, y) \in I.$$

مجموعه رده‌های همنهشتی A را با A/I نمایش می‌دهیم که برابر است با

$$A/I = \{x/I : x \in A\},$$

بطوریکه $x/I = \{y \in A : x \sim_I y\}$ است.

ملاحظه ۱۲،۱ [5] در تعریف قبل، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

$$x \in I \Leftrightarrow x/I = 0/I$$

و $(A/I, \oplus, *, \circ)$ با عملهای

$$x/I \oplus y/I = (x \oplus y)/I \quad \text{و} \quad (x/I)^* = x^*/I$$

یک MV -جبر است.

در این حالت روابط زیر برقرار است:

$$d(x, y) \in I \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad x/I = y/I$$

همچنین برای هر $x, y \in A$ داریم:

$$x \odot y^* \in I \text{ اگر تنها و } x/I \leq y/I$$

تعریف ۱۳،۱ [11] اگر I یک ایده آل سره از A باشد، در این صورت اشتراک همه ایده آلهای ماکسیمال A شامل I را رادیکال I تعریف می‌کنند و آن را با $Rad(I)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۱۴،۱ [11] اگر I یک ایده آل سره از A باشد، نتیجه می‌شود:

$$Rad(I) = \{a \in A : na \odot a \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

تعریف ۱۵،۱ [1] MV -جبر A را نیمه ساده گویند، اگر و تنها اگر غیر بدیهی باشد و $Rad(A) = \{0\}$.

تعریف ۱۶،۱ [5] یک MV -جبر A را ساده می‌گویند، اگر A غیر بدیهی باشد و $\{0\}$ تنها ایده آل سره آن باشد.

تعریف ۱۷،۱ [12] ایده‌آل سره I از A را سرسخت گویند، هرگاه برای هر $x, y \in A - I$

$$y \odot x^* \in I \quad \text{و} \quad x \odot y^* \in I$$

تعریف ۱۸،۱ [13] یک MV -جبر حالت یک جفت (A, σ) است بطوریکه A یک MV -جبر است و $\sigma: A \rightarrow A$

یک عمل یکتایی به روی A است به طوری که برای هر $x, y \in A$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$; \sigma(1) = 1 \quad (۱)$$

$$; \sigma(x^*) = \sigma(x)^* \quad (۲)$$

$$; \sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y)) \quad (۳)$$

$$. \sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)) = \sigma(x) \oplus \sigma(y) \quad (۴)$$

لم ۱۹،۱ [13] در یک MV -جبر حالت (A, σ) ، برای هر $x, y \in A$ ویژگیهای زیر برقرار است:

$$; \sigma(0) = 0 \quad (a)$$

$$; \sigma(x) \leq \sigma(y) \text{ آنگاه } x \leq y \quad (b)$$

$$; \sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y) \text{ آنگاه } y \leq x \text{ و } \sigma(x \oplus y) \leq \sigma(x) \oplus \sigma(y) \quad (c)$$

$$; \sigma(x \ominus y) = \sigma(x) \ominus \sigma(y) \text{ آنگاه } y \leq x \text{ و } \sigma(x \ominus y) \geq \sigma(x) \ominus \sigma(y) \quad (d)$$

$$(e) \text{ می‌دانیم } d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \text{ در نتیجه داریم}$$

$$; d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \sigma(d(x, y))$$

$$; \sigma(x) \odot \sigma(y) = 0 \text{ آنگاه } x \odot y = 0 \text{ بنابراین اگر } \sigma(x) \odot \sigma(y) \leq \sigma(x \odot y) \quad (f)$$

$$; \sigma(\sigma(x)) = \sigma(x) \quad (g)$$

$$; \sigma(\sigma(x) \odot \sigma(y)) = \sigma(x) \odot \sigma(y) \quad (h)$$

(i) تصویر $\sigma(A)$ از A تحت σ ، یک زیر MV -جبر از A است.

تعریف ۲۰،۱ [13] یک σ -ایده‌آل (ایده‌آل حالت) از یک MV -جبر حالت (A, σ) ، یک MV -ایده‌آل بسته تحت σ است. به عبارت دیگر $I \subseteq \sigma(I)$ است.

مجموعه‌ی σ -ایده‌آلهای (A, σ) را با $I_\sigma(A)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱،۱ [13] یک ایده‌آل حالت سره از (A, σ) یک ایده‌آل حالت ماکسیمال نامیده می‌شود اگر به طور سره شامل هیچ ایده‌آل حالت سره‌ای از (A, σ) نباشد.

لم ۲۲،۱ [13] یک ایده‌آل حالت I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \notin I$ ، عدد صحیح $n > 0$ وجود داشته باشد. بطوریکه:

$$(n\sigma(a))^* = \sigma(a^*)^n \in I.$$

لم ۲۳،۱ [13] فرض کنید (A, σ) یک MV -جبر حالت باشد و I یک ایده‌آل حالت از A باشد و $a \notin I$. آنگاه مجموعه

$$(I, a]_\sigma = \{x \in A : x \leq i \oplus n(a \oplus \sigma(a)), i \in I, n \geq 1\}.$$

یک ایده‌آل حالت است که به آن ایده‌آل حالت تولید شده توسط I و a می‌گوییم. در حالت خاص،

$$[a]_\sigma = \{x \in A : x \leq n(a \oplus \sigma(a)), n \geq 1\}.$$

گزاره ۲۴،۱ [13] اگر I یک ایده‌آل حالت از (A, σ) باشد، آنگاه $\sigma(I)$ یک ایده‌آل روی $\sigma(A)$ است و

$$\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$$

گزاره ۲۵،۱ [13] اگر I یک ایده‌آل از $\sigma(A)$ باشد، آنگاه $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده‌آل حالت از A است.

تعریف ۲۶،۱ [10] یک ایده‌آل حالت I از (A, σ) یک ایده‌آل حالت بولی از (A, σ) نامیده می‌شود، اگر

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (x^* \oplus \sigma(x^*)) \in I.$$

تعریف ۲۷،۱ [10] یک MV -جبر حالت (A, σ) یک جبر حالت بولی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$

$$\sigma(x) \wedge \sigma(x^*) = 0 \quad \text{یا} \quad \sigma(x) \vee \sigma(x^*) = 1$$

تعریف ۲۸،۱ [10] فرض کنید P یک ایده آل حالت سره از (A, σ) باشد. P را یک ایده آل حالت اول گوئیم اگر برای هر دو عضو $a, b \in A$ ، $(a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in P$ نتیجه شود یا $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف ۲۹،۱ [10] یک MV -جبر حالت (A, σ) ، حالت موضعاً متناهی نامیده می‌شود، اگر برای هر عضو غیر صفر $a \in A$ ، $\sigma(a)$ دارای مرتبه متناهی باشد.

قضیه ۳۰،۱ [10] M یک ایده آل حالت ماکسیمال از (A, σ) است اگر و تنها اگر $(A/M, \bar{\sigma})$ حالت موضعاً متناهی باشد.

تعریف ۳۱،۱ [20] یک σ -ایده آل سره I از (A, σ) یک ایده آل حالت اولیه نامیده می‌شود، اگر برای هر $a, b \in A$ که $a \odot b \in I$ ، یک $n \geq 1$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\sigma(a)^n \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(b)^n \in I$$

۲. ایده آلهای حالت سرسخت n -لایه در MV -جبرهای حالت

تعریف ۲،۱ فرض کنید I یک ایده آل سره حالت از (A, σ) باشد. I را یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) نامند، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\forall x, y \in A: x, y \notin I \Rightarrow \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I.$$

در حالت خاص، ایده آلهای حالت سرسخت ۱-لایه، ایده آلهای حالت سرسخت هستند.

مثال ۲،۲ فرض کنید $A = \{0, a, b, 1\}$ با $0 < a, b < 1$ باشد. همچنین عملهای \odot ، \oplus و $*$ را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

| | | | | |
|---------|---|---|---|---|
| \odot | 0 | a | b | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | 0 | a | 0 | a |
| b | 0 | 0 | b | b |
| 1 | 0 | a | b | 1 |

| | | | | |
|----------|---|---|---|---|
| \oplus | 0 | a | b | 1 |
| 0 | 0 | a | b | 1 |
| a | a | a | 1 | 1 |
| b | b | 1 | b | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| $*$ | 0 | a | b | 1 |
| | 1 | b | a | 0 |

در این صورت $(A, \oplus, \odot, *, 0, 1)$ یک MV -جبر است [16].

(i) تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1 \\ b & \text{اگر } x = a \\ a & \text{اگر } x = b \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که (A, σ) یک MV -جبر حالت است [10].

(ii) تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1, a \\ 0 & \text{اگر } x = 0, b \end{cases}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که (A, σ) یک MV -جبر حالت است. در قسمت (ii)، بوضوح $I = \{0, b\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است. ولی در قسمت (i)، $I = \{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت ۱-لایه از (A, σ) نیست. زیرا به ازای $a, b \in A - I$ داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b)^* = b \odot b = b \notin I \quad \text{و} \quad \sigma(a)^* \odot \sigma(b) = a \odot a = a \notin I$$

قضیه ۳,۲ فرض کنید I یک ایده آل حالت از سره (A, σ) باشد. در این صورت I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه است اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$

$$x \in I \quad \text{یا} \quad (\exists m \in \mathbb{N}) \quad m\sigma(nx)^* \in I.$$

برهان. فرض کنید که I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه باشد و $x \notin I$ از اینکه I سره است، $1 \notin I$. در نتیجه داریم:

$$\sigma(nx)^* = \sigma(nx)^* \odot 1 \in I \quad \text{و} \quad \cdot = \sigma(x) \odot \sigma(n1)^* \in I$$

بنابراین برای $m = 1$ داریم:

$$m\sigma(nx)^* \in I.$$

برعکس، فرض کنید $x, y \notin I$. نشان می‌دهیم که:

$$\sigma(ny)^* \odot \sigma(x) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I$$

بنا به فرض، چون $x, y \notin I$ پس اعداد طبیعی k, m وجود دارند بطوریکه:

$$k\sigma(ny)^* \in I \quad \text{و} \quad m\sigma(nx)^* \in I$$

لذا داریم:

$$\sigma(y) \odot \sigma(nx)^* \leq \sigma(nx)^* \leq m\sigma(nx)^*$$

و

$$\sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \leq \sigma(ny)^* \leq k(\sigma(ny)^*)$$

در نتیجه داریم:

$$\sigma(y) \odot \sigma(nx)^* \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I$$

بنابراین I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

نتیجه ۴,۲ فرض کنید I یک ایده آل حالت سره از (A, σ) باشد. در این صورت I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه است اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$

$$x \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^* \in I$$

برهان. اثبات به کمک تعریف ایده آل و قضیه ۳,۲ بدست می‌آید.

گزاره ۵,۲ هر ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه یک ایده‌آل حالت سرسخت $(n+1)$ -لایه است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد و $x, y \in A - I$. پس طبق فرض داریم:

$$\sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I$$

حال باید نشان داد که:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma((n+1)y)^* \in I$$

بنا به لم ۱۹,۱ (b) داریم:

$$\sigma(ny) \leq \sigma((n+1)y)$$

همچنین، بنا به لم ۱, ۸, (۲), (۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\sigma((n+1)y)^* \odot \sigma(x) \leq \sigma(ny)^* \odot \sigma(x) \in I.$$

بطور مشابه داریم:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \leq \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I.$$

بنا بر ایده‌آل بودن I داریم:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma((n+1)y)^* \odot \sigma(x) \in I$$

قضیه ۶,۲ اگر I یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A, σ) است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد بطوریکه ماکسیمال نباشد. پس یک ایده‌آل حالت سره J وجود دارد بطوریکه $I \subset J$. حال فرض کنید $a \in J - I$.

پس طبق قضیه ۳,۲، $m \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد بطوریکه:

$$m\sigma(na)^* \in I.$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\sigma(na)^* \leq m\sigma(na)^*$$

در نتیجه طبق تعریف ایده آل $\sigma(na)^* \in I$ و به همین ترتیب $\sigma(na)^* \in J$ چون $a \in J$ ، پس بنا به ایده آل بودن J $na \in J$ پس $\sigma(na) \in J$. بنابراین داریم:

$$1 = \sigma(na) \oplus \sigma(na)^* \in J.$$

که یک تناقض است.

مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیه ۶،۲ برقرار نیست.

مثال ۷،۲ در مثال ۲،۲ (i)، به آسانی می‌توان بررسی کرد که $I = \{0\}$ یک ایده آل حالت ماکسیمال است.

مثال زیر نشان می‌دهد که ایده آلهای حالت بولی وجود دارند و یک ایده آل حالت ممکن است یک ایده آل حالت بولی نباشد.

مثال ۸،۲ فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ با $0 < a, b < c < 1$ و

$0 < b < d < 1$ باشد. عملهای \oplus ، \odot و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

| | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| \odot | 0 | a | b | c | d | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | 0 | a | 0 | a | 0 | a |
| b | 0 | 0 | 0 | 0 | b | b |
| c | 0 | a | 0 | a | b | c |
| d | 0 | 0 | b | b | d | d |
| 1 | 0 | a | b | c | d | 1 |

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| \oplus | 0 | a | b | c | d | 1 |
| 0 | 0 | a | b | c | d | 1 |
| a | a | a | c | c | 1 | 1 |
| b | b | c | d | 1 | d | 1 |
| c | c | c | 1 | 1 | 1 | 1 |
| d | d | 1 | d | 1 | d | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $*$ | 0 | a | b | c | d | 1 |
| | 1 | d | c | b | a | 0 |

در این صورت $(A, \oplus, \odot, *, 0, 1)$ یک MV -جبر است [16].

تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x = 0, b, d \\ 1 & \text{اگر } x = 1, c, a \end{cases}$$

به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که (A, σ) یک MV -جبر حالت است و $I_1 = \{0\}$ و

$I_2 = \{0, b, d\}$ و A ایده‌آلهای حالتی از (A, σ) هستند [10]. همچنین، با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که I_2 یک ایده‌آل حالت بولی از (A, σ) است اما $I_1 = \{0\}$ یک ایده‌آل حالت بولی از (A, σ) نیست. زیرا:

$$(c \oplus \sigma(c)) \wedge (b \oplus \sigma(c)^*) = 1 \wedge b = b \notin \{0\}.$$

تعریف ۹،۲ یک ایده‌آل حالت I از (A, σ) یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه از (A, σ) نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in A$

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ایده‌آلهای حالت بولی n -لایه وجود دارند و یک ایده‌آل حالت ممکن است یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه نباشد.

مثال ۱۰،۲ در مثال ۸،۲، با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که $I_2 = \{0, b, d\}$ یک ایده‌آل حالت بولی 2 -لایه از (A, σ) است. اما $I_1 = \{0\}$ به عنوان یک ایده‌آل حالت، یک ایده‌آل حالت بولی 1 -لایه از (A, σ) نیست، زیرا:

$$(c \oplus \sigma(c)) \wedge (c^* \oplus \sigma(c)^*) = 1 \wedge b = b \notin \{0\}.$$

قضیه ۱۱،۲ (خاصیت توسیع برای ایده‌آلهای حالت بولی n -لایه) فرض کنید که I و J دو ایده‌آل حالت سره باشند بطوریکه $I \subseteq J$. اگر I یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه باشد، آنگاه J نیز یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه از (A, σ) است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه باشد و $I \subseteq J$ ، در این صورت برای هر $x \in A$

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I \subseteq J.$$

از این رو برای هر $x \in A$ ، $(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in J$. در نتیجه J یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه از (A, σ) است.

قضیه ۱۲،۲ فرض کنید I یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه و اول از (A, σ) باشد. در این صورت I یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت بولی n -لایه و اول از (A, σ) باشد. در این صورت برای هر $x \in A$ داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

حال چون I ایده آل حالت اول است. نتیجه می‌گیریم که:

$$x \in I \quad \text{یا} \quad (nx)^* \in I.$$

به همین ترتیب چون I ایده آل حالت است داریم:

$$x \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^* \in I.$$

در نتیجه طبق لم ۴،۲، I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

قضیه ۱۳،۲ اگر I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه I ایده آل حالت بولی $(n+1)$ -لایه از

(A, σ) است.

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n -لایه باشد. باید نشان دهیم برای هر $x \in A$

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \in I.$$

چون $nx \leq (n+1)x$ و بنا به لم ۱۹،۱ (b)، $\sigma(nx) \leq \sigma((n+1)x)$. همچنین بنا به لم ۸،۱ (a)،

$$((n+1)x)^* \leq (nx)^*$$

و در نتیجه $\sigma((n+1)x)^* \leq \sigma(nx)^*$ از این رو داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \leq (x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

در نتیجه:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \in I.$$

بنابراین I یک ایده آل حالت بولی $(n+1)$ -لایه از (A, σ) است.

تعریف ۱۴،۲ فرض کنید (A, τ) و (B, σ) دو MV -جبر حالت باشند آنگاه $f: A \rightarrow B$ را یک MV -همریختی

حالت گوییم اگر f همریختی MV -جبری باشد و برای هر $x \in A$

$$f(\tau(x)) = \sigma(f(x)).$$

قضیه ۱۵،۲ فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک MV -همریختی حالت باشد و I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از

(B, σ) باشد، تصویر معکوس I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از (A, τ) است.

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از (B, σ) و $x \in A$ باشد، باید نشان دهیم:

$$(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*) \in f^{-1}(I).$$

برای $x \in A$ خواهیم داشت $f(x) \in B$. چون I یک ایده آل حالت بولی n -لایه است، لذا داریم:

$$(f(x) \oplus \sigma(f(x))) \wedge ((nf(x))^* \oplus \sigma(nf(x))^*) \in I$$

$$\Rightarrow (f(x) \oplus f(\tau(x))) \wedge (f(nx)^* \oplus \sigma(f(nx))^*) \in I,$$

$$\Rightarrow f(x \oplus \tau(x)) \wedge (f(nx)^* \oplus f(\tau(nx))^*) \in I,$$

$$\Rightarrow f(x \oplus \tau(x)) \wedge f((nx)^* \oplus \tau(nx)^*) \in I,$$

$$\Rightarrow f[(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*)] \in I,$$

$$\Rightarrow [(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*)] \in f^{-1}(I).$$

بنابراین $f^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت بولی n -لایه از (A, τ) است.

نکته: فرض کنید I و J ایده آلهای حالتی از A باشند. در این صورت داریم:

$$I \vee J = (I, J] = \{a \in A : a \leq b \oplus c, \exists b \in I, c \in J\}.$$

که یک ایده آل حالت از (A, σ) است. اگر I یا J یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه و $I \vee J \neq A$ باشد. آنگاه طبق قضیه ۶،۲، I یک ایده آل حالت ماکسیمال است و چون $I \subseteq I \vee J$ ، در نتیجه $I = I \vee J$ که $I \vee J$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

نکته: فرض کنید I و J ایده آلهای حالت بولی n -لایه باشند. آنگاه بنا به قضیه ۱۱،۲، $I \vee J$ نیز یک ایده آل حالت بولی n -لایه است.

لم 16.2 $\{0\}$ یک ایده آل حالت بولی n -لایه است اگر و تنها اگر هر ایده آل I نیز یک ایده آل حالت بولی n -لایه باشد.

برهان. بنا به قضیه ۱۱،۲، واضح است.

گزاره ۱۷،۲ اگر (A, σ) یک MV -جبر حالت باشد. آنگاه $(A/I, \bar{\sigma})$ یک MV -جبر حالت است. که در آن

$$\bar{\sigma}(x/I) = \sigma(x)/I.$$

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت از (A, σ) باشد و $x, y \in A$ ابتدا نشان می‌دهیم که $\bar{\sigma}$ خوش تعریف است. فرض کنید که $x/I = y/I$ پس $d(x, y) \in I$ چون I یک ایده آل حالت است، پس $\sigma(d(x, y)) \in I$ بنا به لم ۱۹،۱ (e)، داریم:

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \sigma(d(x, y)) \in I$$

پس $d(\sigma(x), \sigma(y)) \in I$ در نتیجه $\sigma(x)/I = \sigma(y)/I$ بنابراین $\bar{\sigma}(x/I) = \bar{\sigma}(y/I)$

اکنون نشان می‌دهیم که $(A/I, \bar{\sigma})$ یک MV -جبر حالت است. چون A/I یک MV -جبر حالت است، پس

داریم:

$$\bar{\sigma}(1/I) = \sigma(1)/I = 1/I \quad (MV1)$$

$$\bar{\sigma}((x/I)^*) = \bar{\sigma}(x^*/I) = \sigma(x^*)/I = (\sigma(x))^*/I = (\sigma(x)/I)^* = (\bar{\sigma}(x/I))^* \quad (MV2)$$

$$(MV3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\left(\frac{x \oplus y}{I}\right) &= \frac{\sigma(x \oplus y)}{I} = \frac{\sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))}{I} = \sigma(x)/I \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))/I \\ &= \bar{\sigma}(x/I) \oplus \bar{\sigma}(y \ominus (x \odot y))/I; \end{aligned}$$

$$(MV4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\bar{\sigma}(x/I) \oplus \bar{\sigma}(y/I)) &= \bar{\sigma}(\sigma(x)/I \oplus \sigma(y)/I) = \bar{\sigma}((\sigma(x) \oplus \sigma(y))/I) = \\ &= (\sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)))/I = (\sigma(x) \oplus \sigma(y))/I = \sigma(x)/I \oplus \sigma(y)/I = \bar{\sigma}(x/I) \oplus \bar{\sigma}(y/I) \end{aligned}$$

قضیه ۱۸،۲ I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از (A, σ) است اگر و تنها اگر هر ایده آل A/I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از $(A/I, \bar{\sigma})$ باشد.

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت بولی n -لایه از (A, σ) باشد. لذا داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x \oplus \sigma(x))}{I} \wedge \frac{((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*)}{I} = \frac{0}{I}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{I} \oplus \frac{\sigma(x)}{I}\right) \wedge \left(\frac{(nx)^*}{I} \oplus \frac{\sigma(nx)^*}{I}\right) = \frac{0}{I}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{I} \oplus \bar{\sigma}\left(\frac{x}{I}\right)\right) \wedge \left(\frac{(nx)^*}{I} \oplus \bar{\sigma}\left(\frac{(nx)^*}{I}\right)\right) = \frac{0}{I} \in \{[0]\}.$$

لذا $\{[0]\}$ یک ایده آل حالت بولی n -لایه از $(A/I, \bar{\sigma})$ است. لذا بنا به لم ۱۶،۲، نتیجه می‌گیریم که هر ایده آل $(A/I, \bar{\sigma})$ یک ایده آل حالت بولی n -لایه است.

لم ۱۹،۲ اگر $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه تنها ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) ، ایده‌آل حالت $\{0\}$ است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت دلخواه از (A, σ) باشد. چون $\{0\} \subseteq I$ و $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است. پس طبق قضیه ۶،۲، $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت ماکسیمال است. بنابراین $I = \{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

قضیه ۲۰،۲ اگر I یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه $(A/I, \bar{\sigma})$ یک حالت موضعاً متناهی است.

برهان. فرض کنیم که I یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه طبق قضیه ۶،۲، I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A, σ) است. همچنین طبق قضیه ۳۰،۱، نتیجه می‌گیریم که $(A/I, \bar{\sigma})$ یک حالت موضعاً متناهی است.

لم ۲۱،۲ اگر $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه (A, σ) یک MV -جبر حالت موضعاً متناهی است.

برهان. فرض کنید که $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. لذا بنا به قضیه ۶،۲، نتیجه می‌گیریم که $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A, σ) می‌باشد. بنابراین $A/\{0\} \simeq A$ یک حالت موضعاً متناهی است.

در مثال زیر، نشان می‌دهیم که عکس لم بالا درست نیست.

مثال ۲۲،۲ فرض کنید $A = \{0, 1, 2\}$ با $0 < 1 < 2$ باشد. عملهای \oplus ، \odot و $*$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

| | | | |
|----------|---|---|---|
| \oplus | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | |
|---------|---|---|---|
| \odot | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 |

| | | | |
|-----|---|---|---|
| $*$ | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 0 |

بوضوح $(A, \oplus, \odot, *, 0, 2)$ یک MV -جبر موضعاً متناهی است [16].

σ را یک همانی روی A در نظر می‌گیریم. در این صورت (A, σ) یک MV -جبر حالت موضعاً متناهی است. اما $I = \{0\}$ یک ایده‌آل حالت سرسخت ۱-لایه از (A, σ) نیست. زیرا:

$$\forall 1, 2 \in A - I ; \sigma(1)^* \odot \sigma(2) = 1^* \odot 2 = 1 \odot 2 = 1 \notin I.$$

یادآوری می‌کنیم که یک MV -جبر حالت (A, σ) نیمه ساده است اگر و تنها اگر غیر بدیهی باشد و $Rad_\sigma(A) = \{0\}$ [5].

نتیجه ۲۳،۲ اگر $\{0\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد، آنگاه (A, σ) یک MV -جبر حالت نیمه ساده است.

برهان. فرض کنیم $\{0\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. در نتیجه طبق قضیه ۶،۲، $\{0\}$ یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A, σ) است. پس داریم: $Rad_\sigma(A) = \{0\}$. بنابراین (A, σ) یک MV -جبر حالت نیمه ساده است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس نتیجه بالا درست نیست.

مثال ۲۴،۲ در مثال ۳،۲ (i). داریم که $I = \{0\}$ یک ایده آل حالت از (A, σ) است بطوریکه

$Rad_\sigma(A) = \{0\}$ پس (A, σ) یک MV -جبر حالت نیمه ساده است. اما $I = \{0\}$ یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از (A, σ) نیست. زیرا به ازای هر $a, b \in A - I$

$$a = a \odot a = \sigma(b) \odot \sigma(a)^* \notin I \quad \text{و} \quad b = b \odot b = \sigma(a) \odot \sigma(b)^* \notin I$$

قضیه ۲۵،۲ فرض کنید I یک ایده آل حالت از (A, σ) باشد. در این صورت I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه است اگر و تنها اگر $[0]$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از A/I باشد.

برهان. فرض کنید که I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. همچنین فرض کنید

$x/I \notin \{[0]\}$ ، طبق لم ۱۶،۲، کفایت نشان دهیم که $(\sigma(nx)/I)^* \in \{[0]\}$. چون $x/I \notin \{[0]\}$ پس $x/I \neq 0/I$ در نتیجه $d(x, 0) \notin I$ پس $x \notin I$ طبق فرض نتیجه می‌گیریم که $\sigma(nx)^* \in I$ پس داریم:

$$\sigma(nx)^* = d(\sigma(nx)^*, 0) \in I.$$

از طرفی دیگر

$$\bar{\sigma}((nx/I)^*) = \sigma(nx)^*/I \in \{[0]\} \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^*/I = 0/I$$

پس در نتیجه $\{[0]\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است. لذا بنا برلم ۲،۱۹، نتیجه می‌گیریم که هر ایده آل از A/I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه است.

برعکس، فرض کنید که هر ایده آل حالت از جبر خارج قسمتی $(A/I, \bar{\sigma})$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه باشد و $x \in A$ بطوریکه $x \notin I$ حال باید نشان دهیم که $\sigma(nx)^* \in I$. طبق فرض نتیجه می‌گیریم که $x/I \neq 0/I$ پس در نتیجه داریم: $x/I \notin \{[0]\}$ حال چون $\{[0]\}$ یک ایده آل حالت از $(A/I, \bar{\sigma})$ هست. لذا بنا به فرض، $\{[0]\}$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه است.

بنابراین $\bar{\sigma}(nx/I)^* = \sigma(nx)^*/I \in \{[0]\}$ در نتیجه $\sigma(nx)^*/I = 0/I$ پس $\sigma(nx)^* \in I$. بنابراین I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

در قضیه زیر، تصویر معکوس یک ایده‌آل حالت سرسخت n -لایه تحت یک MV -همریختی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲۶،۲ فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک MV -همریختی حالت باشد و I یک ایده آل حالت سرسخت از (B, σ) باشد. تصویر معکوس I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, τ) است.

برهان. فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (B, σ) و $x \in A$ باشد. بطوریکه

$x \notin f^{-1}(I)$ در این صورت $f(x) \notin I$ چون I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (B, σ) است. طبق لم ۴،۲ و چون f ، MV -همریخت حالت است، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(\tau(nx)^*) = f(\tau(nx))^* = \sigma(f(nx))^* = \sigma(nf(x))^* \in I.$$

پس در نتیجه $\tau(nx)^* \in f^{-1}(I)$. بنابراین $f^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, τ) است.

قضیه ۲۷،۲ اگر P یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد، آنگاه P یک ایده آل حالت اولیه از (A, σ) است.

برهان. فرض کنید $a \odot b \in P$ بطوریکه برای هر $n \geq 1$ $\sigma(a)^n \notin P$ چون P یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه است و از طرفی داریم $a \notin P$ و $1 \notin P$ پس در نتیجه:

$$\sigma(n1)^* \odot \sigma(a) \in P \quad \text{و} \quad \sigma(1) \odot \sigma(na)^* \in P$$

لذا نتیجه می‌گیریم که $\sigma(na)^* \in P$. همچنین طبق لم ۱۹،۱ (f) ، داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b) \leq \sigma(a \odot b) \in P$$

پس $\sigma(a) \odot \sigma(b) \in P$ و به همین ترتیب $\sigma(na)^* \oplus (\sigma(a) \odot \sigma(b)) \in P$ از طرفی دیگر داریم

$\sigma(b) \leq \sigma(na)^* \vee \sigma(b) \in P$ در نتیجه برای $n = 1$ $\sigma(b) \in P$. بنابراین P یک ایده آل حالت اولیه از (A, σ) است.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک ایده آل حالت اولیه ممکن است یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه نباشد.

مثال ۲۸،۲ فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ با $0 < a, b < c < 1$ و

$0 < b < d < 1$ باشد. عملهای \oplus ، \odot و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

| | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| \odot | 0 | a | b | c | d | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | 0 | a | 0 | a | 0 | a |
| b | 0 | 0 | 0 | 0 | b | b |
| c | 0 | a | 0 | a | b | c |
| d | 0 | 0 | b | b | d | d |
| 1 | 0 | a | b | c | d | 1 |

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| \oplus | 0 | a | b | c | d | 1 |
| 0 | 0 | a | b | c | d | 1 |
| a | a | a | c | c | 1 | 1 |
| b | b | c | d | 1 | d | 1 |
| c | c | c | 1 | 1 | 1 | 1 |
| d | d | 1 | d | 1 | d | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $*$ | 0 | a | b | c | d | 1 |
| 1 | 1 | d | c | b | a | 0 |

در این صورت $(A, \oplus, \odot, *, 0, 1)$ یک MV -جبر است [۱۶].

فرض کنید σ همانی باشد، به این ترتیب (A, σ) یک MV -جبر حالت است. واضح است که $I = \{0, c\}$ یک ایده آل حالت اولیه است. از طرفی چون به ازای $a, b \in A - I$ داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b)^* = a \odot c = a \notin I \quad \text{و} \quad \sigma(b) \odot \sigma(a)^* = b \odot d = b \notin I$$

پس I یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از A نیست.

گزاره ۲۹،۲ فرض کنید (A, σ) یک MV -جبر حالت باشد.

(i) اگر I یک ایده آل سرسخت n -لایه از $\sigma(A)$ باشد، آنگاه $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از

(A, σ) است.

(ii) اگر I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. آنگاه $\sigma(I)$ یک ایده آل سرسخت n -لایه از $\sigma(A)$ است.

(i) برهان. اگر I یک ایده آل از $\sigma(A)$ باشد، آنگاه بنا به گزاره ۲۵،۱، ثابت می‌شود که $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت از (A, σ) است. اکنون فرض کنیم که I یک ایده آل سرسخت n -لایه از $\sigma(A)$ باشد. همچنین فرض کنیم $a \notin \sigma^{-1}(I)$ پس $\sigma(a) = \sigma(\sigma(a)) \notin I$. در نتیجه بنا به لم ۱۹،۱، (b) ، چون $a \leq na$ در نتیجه $\sigma(a) \leq \sigma(na)$ پس $\sigma(na) \notin I$ چون I یک ایده آل سرسخت n -لایه از $\sigma(A)$ است. پس $\sigma(\sigma(na))^* = \sigma(na)^* \in I$ پس داریم: $\sigma(na)^* \in \sigma^{-1}(I)$. بنابراین $\sigma^{-1}(I)$ یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است.

(ii) فرض کنید I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) باشد. بنا به حکم ۲۴،۱، داریم:

$$\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$$

چون $\sigma(a) \in \sigma(A)$ و $\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$ ، پس در نتیجه $\sigma(a) \notin I$ و لذا $a \notin I$

همچنین، چون I یک ایده آل حالت سرسخت n -لایه از (A, σ) است، پس $\sigma(na)^* \in I$ و در نتیجه

$$\sigma(na)^* = \sigma((na)^*) = \sigma(\sigma(na^*)) = \sigma(\sigma(na)^*) \in \sigma(I).$$

بنابراین $\sigma(I)$ یک ایده آل سرسخت n -لایه از $\sigma(A)$ است.

References

1. L. P. Belluce, Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory, Canad. J. Math., vol. **38** (1986), 1356-1379.
2. L. Birkhoff, American Mathematical Society Raode Island, (1940).
3. A. D. M. Botur, State-morphism algebras general approach, Fuzzy Sets Sys, vol. **218** (2013), 90-102.
4. C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logic, Trans. Amer. Math. Soc, vol. **88** (1958), 467-490.
5. R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning, Kluwer Academic, Dordrecht, (2000).

6. L. C. Ciungu, A. Dvurečenskij, M. Hycko, State *BL*-algebras, *Soft Comput.*, **15** (2011), 619-634.
7. A. Di Nola, A. Dvurečenskij, State-morphism *MV*-algebras. *Ann Pure Appl Logic* **161** (2009), 161-173.
8. A. Di Nola, A. Dvurečenskij, A. Lettieri, On varieties of *MV*-algebras with internal states, *Inter. J. Approx. Reasoning*, (2010), to appear.
9. A. Dvurečenskij, J. Rachůnek, D. Salounova, State operators on generalizations of fuzzy structures, *Fuzzy Sets Syst.*, **187** (2012), 58-76.
10. F. Forouzesh, A. Darijani, Some classes of state ideals in state *MV*-algebras, *Eurasian Mathematical Journal*, Vol. 10, No. 2 (2019), 37-48.
11. F. Forouzesh, E. Eslami, A. Borumand Saeid, Radical of *A*-ideals in *MV*-modules, *Analele, Tiint, Ifice Ale Universitate, II "AL. I. Cuza" Dinias, I (S. N.) Mathematica*, Tomul Lexii, **f.1**(2016), 33-56.
12. F. Forouzesh, E. Eslami, A. Borumand Saeid, On obstinate ideals in *MV*-algebras, *Politehn. Univ. Bucharest. Sci Bull Series A, Appli Math. Phys.* Vol. **76** (2014), 53-62.
13. T. Flaminio, Montagna F, An algebraic approach to states on *MV*-algebras, In: Novák V (ed) *Fuzzy Logic 2*, proceedings of the 5th EUSFLAT conference, September 11–14, Ostrava, vol **II** (2007), 201-206.
14. T. Flaminio, F. Montagna, *MV*-algebras with internal states and probabilistic, fuzzy logic. *Int J Approx Reason* **50** (2009), 138-152.
15. G. Gratzer, *Universal Algebra*, seconded, New York, (1979).
16. A. Iorgulescu, *Algebras of logic as BCK algebras*, Academy of economic, studies Bucharest, Roman(۲۰۰۸).
17. A. Kroupa, Every state on semisimple *MV*-algebra is integral. *Fuzze Setse Syst* **157** (2006), 2771-2782.
18. J. Kuhr, D. Mundici, De Fineti theorem and Borel states in $[0, 1]$ -valued algebraic, logic. *Int J Approx Reason* **46** (2007), 605-616.
19. S. Motamed and A. Borumand, *n*-fold obstinate filters in *BL*-algebras, *Neural Computing and Applications* **20** (2011), 461-472.
20. D. Mundici, Averaging the truth value in Lukasiewicz sentential logic. *Studia Logica* **55** (1995), 113-127.
21. D. Mundici, Interpretation of *AFC*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus, *Journal of Functional Analysis* **65** (1986), 15-63.