



Kharazmi University

Survivable Capacitated Multicommodity Network Design Problem with Independent Demand Uncertainty

S. Khodayifar¹  , M. Farjaie² 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran. ✉ E-mail: s.khodayifar@iasbs.ac.ir
2. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran. E-mail: mhmdfarji@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received: 1 October 2023
Received in revised form:
23 September 2024
Accepted: 24 September 2024
Published online:
10 November 2024

Keywords:

Network design problem,
Survivability,
Joint chance-constrained
programming,
Independent random variables.

ABSTRACT

Introduction

The survivable Capacitated Networks Design Problem (SCNDP for short) is one of the most essential issues in telecommunication and transportation networks. A survivable network is a network that is designed to remain operational in the event of a component(s) failure(s) (cable cuts, electronic failures on switching centers, and so forth). In SCNDP, researchers usually consider survivability in two different ways diversification and reservation. Diversification consists of dividing the demand of source-sink node pairs into two or more node-disjoint (or arc-disjoint) paths, and in reservation after the failure of a component(s) of the network, part of the demand for node pairs can still be satisfied by rerouting. To implement reservation, the links on the network ought to have enough capacity to support the new flows after the rerouting has been made.

Therefore, in this paper, we first present one model for the problem of survivable capacitated network design based on the reservation strategy. In many real-world applications, the observed values are often uncertain, for example random, fuzzy, etc. Therefore, we consider the demand vector (the right-hand side values) randomly and then by using joint chance-constrained and probability concepts, obtain the corresponding deterministic model. Then, we propose an approximation optimization approach and use piecewise tangent approximation and piecewise linear methods to obtain its lower and upper bounds, respectively. Finally, computational results show the efficiency of the proposed model and approximation methods for relatively large-scale networks.

Material and Methods

In many real-world applications, the values of parameters are often uncertain. There are several methods available to tackle this uncertainty, including:

1. Fuzzy programming,
2. Stochastic programming based on scenarios,
3. Robust optimization,
4. Probabilistic programming.

In this paper, we will use the probabilistic programming (joint chance-constrained) method to obtain the corresponding deterministic model according to the type of the initial model and assume an independent non-deterministic demand vector.

The resulting model is the mixed integer non-convex non-linear model which we will use iterative and approximate piecewise tangent and piecewise linear methods to solve it.

Results and discussion

In this article, we first presented a model for the survivable capacitated network design problem, and then by considering the demand vector as non-deterministic and assuming the independence of random variables, we presented the corresponding deterministic model by using joint-chance constrained and probability concepts. Because the resulting model is the mixed integer non-convex non-linear model, two approximations were used to solve the problem. The numerical results obtained from GAMS software and the CPLEX solver were reported for medium to large-scale networks. Next, we will examine the initial model under the assumption of dependence between random variables.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- This paper develops a cost-capacity efficient model for the SCNDP with different capacity levels and piecewise linear convex objective function based on the reservation strategy.
- We suppose the demand vector can be reported as random variables in the case of independence. To deal with uncertainty, we focus on the joint chance-constrained programming method.
- This paper develops a mixed integer non-convex non-linear programming model and finds a lower and upper approximation, using the piecewise tangent approximation and piecewise linear approximation, respectively.

How to cite: Khodayifar, Salman, Farjaie, Mohammadreza, (2024). Survivable capacitated multicommodity network design problem with independent demand uncertainty. *Mathematical Researches*, **10** (3), 33 – 51.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار چندکالایی پایدار با تقاضاهای غیرقطعی مستقل

سلمان خدایی فر^۱، محمدرضا فرجائی^۲

۱. نویسنده مسئول، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، کدپستی ۴۵۱۳۷-۶۶۷۳۱، ایران. رایانامه: s.khodayifar@iasbs.ac.ir

۲. دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، کدپستی ۴۵۱۳۷-۶۶۷۳۱، ایران. رایانامه: mhmdfarji@iasbs.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله، با توجه به اهمیت مسئله طراحی شبکه‌ی ظرفیت‌دار پایدار در شبکه‌های حمل و نقل و مخابرات، ابتدا یک مدل قطعی برای این مسئله طراحی کرده و سپس با توجه به کاربردهای آن در دنیای واقعی، بردار تقاضا را غیرقطعی در نظر گرفته و با استفاده از رویکرد مسئله برنامه‌ریزی احتمالی توام، یک مدل قطعی غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته برای آن ارائه خواهیم داد. سرانجام، با توجه به نوع مدل، از روش‌های تکراری و تقریبی خطی قطعه قطعه‌ای و مماس قطعه‌ای برای حل آن استفاده خواهیم کرد. نهایتاً با ارائه چند مثال، کارایی مدل و روش‌های حل را نشان خواهیم داد.	نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۷/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۷/۳ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰

واژه‌های کلیدی:

طراحی شبکه،
پایداری،
برنامه‌ریزی با محدودیت‌های
احتمالی توام،
متغیرهای تصادفی مستقل.

استناد: خدایی فر، سلمان؛ و فرجائی، محمدرضا (۱۴۰۳). مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار چندکالایی پایدار با تقاضاهای غیرقطعی مستقل. پژوهش‌های

ریاضی، ۱۰ (۳)، ۳۳ - ۵۱.



۱. مقدمه

مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار با کمترین هزینه یکی از موضوعات مهم در حمل و نقل و مخابرات است. شبکه پایدار، شبکه‌ای است که در صورت تخریب مولفه یا مولفه‌هایی از آن همچنان عملیاتی باقی بماند، به این مفهوم که، شبکه همچنان بتواند بخشی از تقاضاها را پس از تخریب تک گره یا تک کمان برآورده کند. محققان دو روش تنوع‌سازی و ذخیره‌سازی را برای رسیدن به پایداری در نظر می‌گیرند.

تنوع‌سازی به معنای تقسیم تقاضای جفت گره‌های منبع و مقصد روی دو یا چند مسیر گره-مجزا (کمان-مجزا) و ذخیره‌سازی به این مفهوم است که پس از تخریب مولفه یا مولفه‌هایی از شبکه، بخشی از تقاضا برای جفت گره‌ها همچنان بتواند با تغییر مسیر برآورده شود. برای اجرای ذخیره‌سازی، بایستی کمان‌های روی شبکه ظرفیت کافی برای حمایت از جریان‌های جدیدی که پس از تغییر مسیر ایجاد شده‌اند را دارا باشند. مینوکس^۱ [۱۱] اولین بار پایداری را تنها با روش ذخیره‌سازی در مدل جریان چندکالایی کلی با ظرفیت‌های پیوسته در نظر گرفت. دال^۲ و استوئر^۳ [۵] اولین محققینی بودند که ساختار ظرفیت گسسته و موضوع‌های پایداری (تنوع‌سازی و ذخیره‌سازی) را برای مدل تحقیقاتی مخابراتی در نروژ بکار بردند. سپس ریوس^۴ و همکاران [۱۲]، مسئله طراحی شبکه‌ی ظرفیت‌دار پایدار را مطالعه کردند که در آن سطوح ظرفیتی قابل دسترس، گسسته و هزینه‌ها بصورت غیرخطی محدب افزایشی بوده که این سطوح ظرفیتی بایستی روی کمان‌ها نصب شوند. حالت سناریوهای کلی شکست به ما اجازه می‌دهد تا کمان‌هایی را در نظر بگیریم که می‌توانند همزمان تخریب شوند. در حالی که برخی شبکه‌ها نیاز دارند که در برابر خرابی تنها یک کمان عملیاتی باقی بمانند. اخیراً صالحی و انیسی [۱۳] مقاله‌ای درباره طراحی شبکه‌ی چندکالایی پایدار ارائه دادند که در آن هر سناریوی شکست می‌تواند شامل چندین کمان باشد، به طوری که این امکان وجود دارد که در صورت تخریب کمانی، تنها بخشی از ظرفیت آن کمان از بین برود. آن‌ها همچنین در مدل‌شان، جریان عبوری از هر گره را نیز محدود کردند.

در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی، مقادیر پارامترها، اغلب غیرقطعی‌اند. بطور کلی سه رویکرد مختلف برای مدل‌سازی در حضور داده‌های غیرقطعی وجود دارد که عبارت‌اند از: تکنیک فازی، بهینه‌سازی تصادفی و تکنیک‌های مبتنی بر بهینه‌سازی استوار. تا جایی که می‌دانیم، نتایج کمتری در زمینه مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار تصادفی وجود دارد، که می‌توان به کارهای تربلانچ^۵ و همکاران [۱۴]، کاستر^۶ و کاتشکا^۷ [۸] و لیویچیک^۸ و همکاران [۹] اشاره کرد. لذا در این مقاله ابتدا مدلی را برای مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار با تابع هزینه محدب خطی قطعه قطعه‌ای ارائه می‌کنیم و سپس با در نظر

¹ Minoux

² Dahl

³ Stoer

⁴ Rios

⁵ Terblanche

⁶ Koster

⁷ Kutschka

⁸ Ljubic

گرفتن عدم قطعیت در بردار تقاضا، با استفاده از برنامه‌ریزی با قیود احتمالی توام و مفاهیم احتمالی، مدل قطعی متناظر با آن را بدست می‌آوریم. مدل قطعی حاصل، یک مدل برنامه‌ریزی صحیح آمیخته غیرخطی و غیرمحدب است.

مسئله محدودیت احتمالی اولین بار در سال ۱۹۵۹ توسط چارنز^۱ و همکاران [۲] معرفی شد. وندی پن^۲ و پاپ^۳ [۱۵] مسئله محدودیت‌های احتمالی فردی خطی کلی با توزیع نرمال را در نظر گرفتند و همزمان کاتانوکا^۴ [۶] همان مسئله را با سمت راست تصادفی بررسی کردند. میلر^۵ و واگنر^۶ [۱۰] مسئله محدودیت‌های احتمالی انفرادی خطی کلی را به مسئله محدودیت‌های احتمالی توام خطی کلی تعمیم دادند و اعضای بردار سمت راست را به عنوان متغیرهای تصادفی مستقل در نظر گرفتند. سپس در سال ۱۹۷۲، جانانان^۷ [۶] نتیجه را به حالت وابسته توسعه داد.

اخیرا چنگ^۸ و همکاران [۳] مسئله محدودیت‌های احتمالی توام با سطرها وابسته در ماتریس ضرایب و بردار سمت راست تصادفی وابسته که دارای توزیع بیضوی برای مسئله بهینه سازی خطی غیرقطعی کلی هستند را بیان کرده‌اند.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار را با سطوح ظرفیت مختلف و تابع هزینه محدب خطی قطعه قطعه‌ای که مبتنی بر استراتژی ذخیره‌سازی است، ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، این مدل را در محیط غیرقطعی با قیود احتمالی توام و با فرض استقلال میان متغیرهای تصادفی تقاضا، در نظر گرفته و مدل قطعی متناظر با آن را بدست می‌آوریم. در بخش ۴، از روش تقریبی مبتنی بر خطوط قطعه قطعه‌ای و مماس قطعه قطعه‌ای برای مدل برنامه‌ریزی صحیح آمیخته غیرخطی و غیرمحدب استفاده کرده و در بخش ۵ نتایج عددی متناظر با این دو روش را ارائه می‌کنیم. سرانجام در بخش ۶، نتیجه‌گیری مقاله گزارش خواهد شد.

۲. مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار در محیط قطعی

شبکه $G=(N,A,K)$ با مجموعه گره‌های N ($|N|=n$) و مجموعه کمان‌های A ($|A|=m$) و مجموعه کالاها K را در نظر بگیرید. برای هر کالای $k, k \in K$ گره مبدا کالای k و $D(k)$ گره مقصد کالای k و M_k مجموعه گره‌های واسطه متناظر با کالای k هستند. حال دو پارامتر مهم متناظر با کالای k را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

d_k : تقاضای کالای k

ρ_k : پارامتر ذخیره‌سازی، یعنی، مینیمم مقدار از تقاضای کالای k که بایستی پس از تخریب یک کمان برآورده شود.

¹ Charnes

² Van de Panne

³ Popp

⁴ Kataoka

⁵ Miller

⁶ Wagner

⁷ Jagannathan

⁸ Cheng

این تعاریف ایجاب می‌کنند که حداقل $\rho_k dk$ واحد جریان بایستی پس از تخریب یک کمان حمل شود. S را مجموعه تمام سناریوها تعریف می‌کنیم، به طوری که، هر سناریو یک حالت عملیاتی از شبکه را نشان می‌دهد. سناریوی $s=0$ نشان دهنده‌ی حالتی است که در آن تمامی کمان‌ها سالم‌اند و سایر سناریوها نشان دهنده‌ی حالتی هستند که در آن‌ها تنها تخریب یک کمان رخ می‌دهد. برای هر سناریوی s ، $G_s=(N, A_s)$ نشان دهنده‌ی شبکه عملیاتی متناظر با آن سناریو بوده و A_s مجموعه تمام کمان‌های عملیاتی در A را نشان می‌دهد.

جدول ۱: تعریف مجموعه‌ها

مجموعه‌ها	تعاریف
N	مجموعه گره‌ها
A	مجموعه تمام کمان‌های در شبکه
K	مجموعه کالاها
A_s	مجموعه تمام کمان‌های عملیاتی در سناریوی s از مجموعه A
M_k	مجموعه گره‌های میانی نسبت به کالای k
$R=\{1,2,\dots,r_{max}\}$	مجموعه سطوح ظرفیتی در دسترس برای نصب روی کمان‌ها

جدول ۲: تعاریف پارامترها

پارامترها	تعاریف
U_{ij}^r	کران بالای سطح ظرفیت r روی کمان (i,j)
U_{ij}^{r-1}	کران پایین سطح ظرفیت r روی کمان (i,j)
e_{ij}^{kr}	وزن جریان کالای k متناظر با سطح ظرفیت r روی کمان (i,j)
f_{ij}^r	هزینه ثابت برای نصب سطح ظرفیت r روی کمان (i,j)
c_{ij}^r	هزینه متغیر متناظر با سطح ظرفیت r روی کمان (i,j)
c_{ij}	تابع هزینه محدب جریان کل روی کمان (i,j)
$\rho_k^s = \begin{cases} 1, & s = 0 \text{ اگر} \\ \rho_k, & s \neq 0 \text{ اگر} \end{cases}$	پارامتر ذخیره‌سازی متناظر با سناریوی s

جدول ۳: تعاریف متغیرهای تصمیم

تعاریف	متغیرهای تصمیم
اگر سطح ظرفیت r روی کمان (i,j) نصب شود، برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر است	y_{ij}^r
جریان کالای k در حالت عملیاتی s به ازای سطح ظرفیت r روی کمان (i,j)	x_{ij}^{ksr}
جریان کل کالای k در حالت عملیاتی s روی کمان (i,j)	x_{ij}^{ks}

قابل ذکر است که هزینهی متغیر بصورت تابع محدب بوده و توسط یک تابع خطی قطعه قطعه‌ای محدب تقریب می‌زنیم. همچنین فرض می‌کنیم که هر تابع محدب خطی قطعه قطعه‌ای دقیقاً شامل r_{max} قطعه خطی است. در این صورت $C_{ij}^1 < C_{ij}^2 < \dots < C_{ij}^{r_{max}}$ ، یعنی هزینه متغیر از یک سطح ظرفیت به سطح ظرفیت بعدی صعودی است. بر اساس تعاریف بالا داریم:

$$x_{ij}^{ks} = \sum_{r \in R} x_{ij}^{ksr}, \quad c_{ij}(x_{ij}^{ks}) = \sum_{r \in R} c_{ij}^r x_{ij}^r.$$

به علاوه، بر اساس تابع هزینه c_{ij} ، جریان قطعه‌ای x_{ij}^{ksr} می‌تواند بر اساس جریان کمانی کل x_{ij}^{ks} با استفاده از فرمول زیر محاسبه شوند:

$$x_{ij}^{ksr} = \begin{cases} 0, & x_{ij}^{ks} \leq U_{ij}^{r-1}, \\ x_{ij}^{ks} - U_{ij}^{r-1}, & U_{ij}^{r-1} \leq x_{ij}^{ks} \leq U_{ij}^r, \\ U_{ij}^r - U_{ij}^{r-1}, & x_{ij}^{ks} \geq U_{ij}^r. \end{cases}$$

بر اساس تعاریف و مفاهیم بالا، مسئله طراحی شبکه ظرفیت دار پایدار به صورت

$$\min \quad z = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{r \in R} f_{ij}^r y_{ij}^r + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} c_{ij}^r x_{ij}^{ksr} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} = 0, \quad \forall i \in M_k, \forall k \in K, \forall s \in S, \quad (2)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \geq \rho_k^s d_k, \quad i = O(k), \forall k \in K, \forall s \in S, \quad (3)$$

$$x_{ij}^{ks} = \sum_{r \in R} x_{ij}^{ksr}, \quad \forall (i,j) \in A_s, \forall k \in K, \forall s \in S, \quad (4)$$

$$1 = y_{ij}^0 \geq y_{ij}^1 \geq \dots \geq y_{ij}^{|R|}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad (5)$$

$$\sum_{k \in K} e_{ij}^{kr} x_{ij}^{ksr} \leq (U_{ij}^r - U_{ij}^{r-1}) y_{ij}^r, \quad \forall (i, j) \in A_s, \forall s \in S, \forall r \in R, \quad (۶)$$

$$X_{ij}^{ksr} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall r \in R, \quad (۷)$$

$$y_{ij}^r \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall r \in R. \quad (۸)$$

فرمول‌بندی شود.

معادله (۱) تابع هدف مسئله را نشان می‌دهد که در آن هدف، مینیمم‌سازی هزینه‌های ثابت و متغیر است. دسته محدودیت‌های (۲) و (۳)، محدودیت‌های محافظ جریان را نشان می‌دهند. دسته محدودیت‌های (۴) بیان می‌کند که جریان کل کالای k روی هر کمان عملیاتی به ازای هر سناریو با مجموع جریان‌های کالای k روی سطوح ظرفیتی نصب شده روی آن کمان برابر است. دسته محدودیت‌های (۵) ایجاب می‌کند که اگر سطح ظرفیت r روی کمانی نصب باشد، بایستی قبل از آن سطح ظرفیت $r-1$ روی کمان نصب شده باشد و فرض بر این است که سطح ظرفیت $r = 0$ همیشه بر روی کمان‌ها نصب است. همچنین، دسته محدودیت‌های (۶) به محدودیت‌های کرانی معروفند و محدودیت‌های (۷) و (۸) به ترتیب پیوسته و صحیح بودن متغیرهای X_{ij}^{ksr} و y_{ij}^r را نشان می‌دهند.

در دنیای واقعی، تقاضاهای مدل بالا معمولاً به صورت غیرقطعی ظاهر می‌شوند. برای مقابله با عدم قطعیت همان‌طور که قبلاً بیان شد، روش‌های مختلفی از جمله برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی تصادفی بر پایه‌ی سناریو، بهینه‌سازی استوار، برنامه‌ریزی احتمالی و ... وجود دارند که در این مقاله با توجه به نوع مدل و با فرض بردار تقاضای غیرقطعی مستقل، از روش برنامه‌ریزی احتمالی در حالت توأم استفاده خواهیم کرد.

۳. مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار تصادفی با قیود احتمالی توأم

با در نظر گرفتن عدم قطعیت در تقاضاها، دسته محدودیت‌های (۳) را به صورت محدودیت احتمالی توأم با پارامتر اطمینان $p \in [0, 1]$ به صورت

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right] \geq \bar{d}_k, \quad i = O(k), \forall k \in K, \forall s \in S \right) \geq p,$$

در نظر می‌گیریم. برای جلوگیری از تکرار متغیرهای تصادفی \bar{d}_k در بردار تصادفی \bar{d} و استفاده مناسب از مفاهیم آمار و احتمال، محدودیت بالا را می‌توان بصورت

$$\mathbb{P} \left(\min_{s \in S} \left\{ \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], i = O(k) \right\} \geq \bar{d}_k, \forall k \in K \right) \geq p, \quad (۹)$$

نوشت. حال مدل طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار با محدودیت‌های احتمالی توأم را می‌توان به صورت

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{r \in R} f_{ij}^r y_{ij}^r + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} c_{ij}^r x_{ij}^{ksr}$$

s.t.

$$(۹) \text{ و } (۸) - (۴), (۲)$$

نوشت.

قضیه ۱: فرض کنید متغیرهای تصادفی \bar{d}_k دارای توزیع نرمال استاندارد با توابع توزیع پیوسته Φ بوده و مستقل از یکدیگر هستند. در این صورت محدودیت احتمالی توام (۹) با دسته محدودیت‌های زیر معادل است:

$$q_k \geq \Phi^{-1}(p^{z_k}), \quad \forall k \in K, \quad (۱۰)$$

$$q_k \leq \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], \quad i = O(k), \forall k \in K, \forall s \in S, \quad (۱۱)$$

$$\sum_{k \in K} z_k = 1, \quad (۱۲)$$

$$z_k \geq 0, q_k \geq 0, \quad \forall k \in K. \quad (۱۳)$$

اثبات: برای اثبات، چون متغیرهای تصادفی \bar{d}_k مستقل از یکدیگرند، پس رابطه (۹) را می‌توان بصورت

$$\mathbb{P} \left(\min_{s \in S} \left\{ \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], i = O(k) \right\} \geq \bar{d}_k \right) \geq p_k, \forall k \in K,$$

نوشت که در آن

$$p_1 p_2 \dots p_K = p. \quad (۱۴)$$

حال با لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه (۱۴) نسبت به مبنای p و با تعریف $\log_p p_k = z_k, \forall k \in K$ داریم

$$\mathbb{P} \left(\min_{s \in S} \left\{ \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], i = O(k) \right\} \geq \bar{d}_k \right) \geq p^{z_k}, \forall k \in K,$$

$$\sum_{k \in K} z_k = 1, \quad z_k \geq 0, \forall k \in K.$$

با توجه به تعریف تابع توزیع تجمعی

$$\min_{s \in S} \left\{ \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], i = O(k) \right\} \geq \Phi^{-1}(p^{z_k}), \forall k \in K,$$

$$\sum_{k \in K} z_k = 1, \quad z_k \geq 0, \forall k \in K.$$

با تعریف

$$q_k = \min_{s \in S} \left\{ \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], i = O(k) \right\},$$

داریم:

$$q_k \geq \Phi^{-1}(p^{z_k}), \quad \forall k \in K,$$

$$q_k \leq \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], \quad i = O(k), \forall k \in K, \forall s \in S,$$

$$\sum_{k \in K} z_k = 1,$$

$$z_k \geq 0, q_k \geq 0, \quad \forall k \in K.$$

حکم اثبات می‌شود.

حال بر اساس قضیه فوق، مدل قطعی متناظر با مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار با محدودیت‌های احتمالی توام و متغیرهای تصادفی مستقل به صورت

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{r \in R} f_{ij}^r y_{ij}^r + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} c_{ij}^r x_{ij}^{ksr}$$

s.t.

$$(۱۳) \text{ و } (۱۲) \text{ و } (۱۱) \text{ و } (۱۰) \text{ و } (۸) - (۴) \text{ ، } (۲)$$

است. این مسئله یک مدل غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته بوده که جز مسائل NP-سخت است. برای حل این مسئله، از روش تقریبی مبتنی بر خطوط قطعه قطعه‌ای و نیز خطوط مماس قطعه قطعه‌ای استفاده می‌کنیم که در قسمت بعدی شرح خواهیم داد. در هر تکرار از روش تقریبی خطوط قطعه قطعه‌ای یک کران بالا و از روش تقریبی خطوط مماس قطعه قطعه‌ای یک کران پایین به دست می‌آید. روش تکراری تا برقراری شرط توقف ادامه خواهد یافت.

۴. روش حل

۴.۱. کران پایین: تقریب مماس قطعه قطعه

در این بخش برای بدست آوردن یک کران پایین برای مدل غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته، از تقریب مماس قطعه قطعه‌ای استفاده خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا برای هر متغیر z_k افزایی را از بازه $[0,1]$ به

صورت $Z_{k1} < Z_{k2} < \dots < Z_{kT}$ در نظر می‌گیریم و سپس تابع $H(z_k) = \Phi^{-1}(p^{z_k})$ را در هر یک از نقاط افراز با بسط تیلور مرتبه اول به صورت زیر

$$H(z_k) \cong H(z_{kt}) + H'(z_{kt})(z_k - z_{kt}) = a_{kt} + b_{kt}z_k,$$

تقریب می‌زنیم.

هر یک از خطوط حاصل از این تقریب در نقاط افراز بر تابع $\Phi^{-1}(p^{z_k})$ مماس‌اند. برای بررسی تحدب $\Phi^{-1}(p^{z_k})$ لم زیر را از [۳] اشاره می‌کنیم.

لم ۱: اگر $p \geq \frac{1}{2}$ آنگاه تابع $H(z) = \Phi^{-1}(p^z)$ در بازه $[0,1]$ محدب است.

اثبات: به [۳] مراجعه شود.

با توجه به تحدب تابع $\Phi^{-1}(p^{z_k})$ قضیه‌ی زیر را برای یافتن کران پایین، ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲: مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$LB: \min t_1 = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{r \in R} f_{ij}^r y_{ij}^r + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} c_{ij}^r x_{ij}^{ksr} \quad (15)$$

s.t.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} = 0, \quad \forall i \in M_k, \forall k \in K, \forall s \in S,$$

$$q_k \geq a_{kt} + b_{kt}z_k, \quad \forall k \in K, \forall t \in T,$$

$$q_k \leq \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], \quad i = O(k), \forall k \in K, \forall s \in S,$$

$$x_{ij}^{ks} = \sum_{r \in R} x_{ij}^{ksr}, \quad \forall (i,j) \in A_s, \forall k \in K, \forall s \in S,$$

$$1 = y_{ij}^0 \geq y_{ij}^1 \geq \dots \geq y_{ij}^{|R|}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\sum_{k \in K} e_{ij}^{kr} x_{ij}^{ksr} \leq (U_{ij}^r - U_{ij}^{r-1}) y_{ij}^r, \quad \forall (i,j) \in A_s, \forall s \in S, \forall r \in R,$$

$$\sum_{k \in K} z_k = 1,$$

$$x_{ij}^{ksr} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall r \in R,$$

$$z_k \geq 0, \quad q_k \geq 0, \quad \forall k \in K,$$

$$y_{ij}^r \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall r \in R,$$

که در آن

$$b_{kt} = H'(z_{kt}), \quad a_{kt} = H(z_{kt}) - b_{kt} z_{kt}. \quad (۱۶)$$

با توجه به لم (۱) یعنی محدب بودن تابع $\Phi^{-1}(\mathbf{p}^k)$ در بازه $[0,1]$ ، مقدار تابع هدف بهینه مسئله فوق یک کران پایین برای مقدار تابع هدف بهینه مسئله غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته است.

اثبات: محدودیت دوم از مسئله (۱۵) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$q_k \geq \max_{t \in \{1,2,\dots,T\}} \{a_{kt} + b_{kt} z_k\}, \quad \forall k \in K.$$

چون تابع $\Phi^{-1}(\mathbf{p}^k)$ در بازه $[0,1]$ محدب است، پس برای هر نقطه مماس داریم:

$$\Phi^{-1}(\mathbf{p}^k) \geq a_{kt} + b_{kt} z_k, \quad \forall k \in K, \forall t \in \{1,2, \dots, T\}.$$

بنابراین:

$$\Phi^{-1}(\mathbf{p}^k) \geq \max_{t \in \{1,2,\dots,T\}} \{a_{kt} + b_{kt} z_k\}, \quad \forall k \in K.$$

سرانجام رابطه‌ی

$$q_k \geq \Phi^{-1}(\mathbf{p}^k) \geq \max_{t \in \{1,2,\dots,T\}} \{a_{kt} + b_{kt} z_k\}, \quad \forall k \in K,$$

به دست می‌آید، که این رابطه با رابطه‌ی

$$\{(z_k, q_k): q_k \geq \Phi^{-1}(\mathbf{p}^k), \forall k \in K\} \subseteq \\ \{(z_k, q_k): q_k \geq a_{kt} + b_{kt} z_k, \forall k \in K, \forall t \in \{1,2, \dots, T\}\}$$

معادل بوده و حکم اثبات می‌شود.

برای بدست آوردن یک کران بالا برای مدل غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته، در ادامه از تقریب خطی قطعه قطعه‌ای استفاده خواهیم کرد.

۲.۴. کران بالا: تقریب خطی قطعه قطعه

در این حالت مقادیر متناظر با هر یک از خطوط گذرنده از دو نقطه افراز متوالی با توجه به تحدب تابع $H(z_k) = \Phi^{-1}(\mathbf{p}^k)$ ، یک کران بالا از تابع $\Phi^{-1}(\mathbf{p}^k)$ میان این دو نقطه افراز متوالی است. حال با توجه به این مطلب، قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۳: مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$UB: \min \quad t_2 = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{r \in R} f_{ij}^r y_{ij}^r + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} c_{ij}^r x_{ij}^{ksr} \quad (۱۷)$$

s.t.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} = 0, \quad \forall i \in M_k, \forall k \in K, \forall s \in S$$

$$q_k \geq g_{kt} + w_{kt} z_k, \quad (\forall k \in K, t < T),$$

$$\begin{aligned}
q_k &\leq \frac{1}{\rho_k^s} \left[\sum_{\{j:(i,j) \in A_s\}} x_{ij}^{ks} - \sum_{\{j:(j,i) \in A_s\}} x_{ji}^{ks} \right], \quad i = O(k), \forall k \in K, \forall s \in S, \\
x_{ij}^{ks} &= \sum_{r \in R} x_{ij}^{ksr}, \quad \forall (i,j) \in A_s, \forall k \in K, \forall s \in S, \\
1 &= y_{ij}^0 \geq y_{ij}^1 \geq \dots \geq y_{ij}^{|R|}, \quad \forall (i,j) \in A, \\
\sum_{k \in K} e_{ij}^{kr} x_{ij}^{ksr} &\leq (U_{ij}^r - U_{ij}^{r-1}) y_{ij}^r, \quad \forall (i,j) \in A_s, \forall s \in S, \forall r \in R, \\
\sum_{k \in K} z_k &= 1, \\
x_{ij}^{ksr} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall r \in R, \\
z_k &\geq 0, \quad q_k \geq 0, \quad \forall k \in K, \\
y_{ij}^r &\in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \forall r \in R,
\end{aligned}$$

که در آن

$$g_{kt} = H(z_{kt}) - w_{kt} z_{kt}, \quad w_{kt} = \frac{H(z_{k,t+1}) - H(z_{kt})}{z_{k,t+1} - z_{kt}}. \quad (18)$$

با توجه به این که تابع $\Phi^{-1}(\mathbf{p}^{z_k})$ در بازه $[0,1]$ محدب است، پس مقدار تابع هدف بهینه مسئله فوق یک کران بالا برای مقدار تابع هدف بهینه مسئله غیرخطی صحیح آمیخته است.

اثبات: اثبات این قضیه، مشابه اثبات قضیه ۲ است.

جدول ۴، الگوریتم روش های محاسبه کران های بالا و پایین را بصورت شبه کد نشان می دهد.

جدول ۴: الگوریتم روش های محاسبه ی کران های بالا و پایین

الگوریتم:

مقدار دهی اولیه: قرار دهید $t = 1$ و به گام ۱ بروید.

گام ۱: بعد از بدست آورد نقاط درون یابی از طریق

$$z_{k1} = 0.01, z_{kt} = 0.1(t - 1), t = 2, 3, \dots, T, k \in K,$$

مقادیر a_{kt} و b_{kt} را از طریق معادله ی (۱۶) و مقادیر w_{kt} و g_{kt} را از طریق معادله ی (۱۸) بدست آورید.

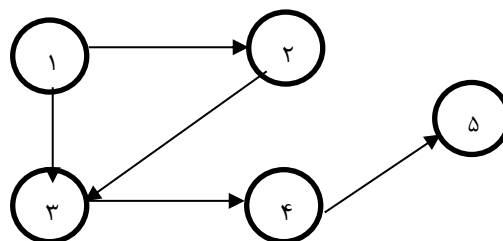
گام ۲: مدل (۱۵) را حل کنید و یک کران پایین t_1^* برای مسئله غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته بدست آورید.

گام ۳: مدل (۱۷) را حل کنید و یک کران بالا t_2^* برای مسئله غیرخطی غیرمحدب صحیح آمیخته بدست آورید.

گام ۴: در صورتی که شکاف $Gap = \frac{UB-LB}{UB} . 100\%$ میان دو کران t_1^* و t_2^* از یک مقدار بسیار کوچک مانند γ کوچکتر باشد، توقف کنید، در غیر اینصورت $t = t + 1$ و به گام ۱ برگردید.

۵. نتایج محاسباتی

در این بخش با ارائه نتایج محاسباتی، کارایی مدل پیشنهادی و روش حل را نشان می‌دهیم. نمونه‌های آزمایشی بر روی کامپیوتر با مشخصات (Core i-5200)، (2.20 GHz) و حافظه داخلی 8.00 GB انجام می‌شوند. همچنین روش حل ارائه شده در بخش ۴ را در نرم افزار ۲۵،۱،۲ GAMS کدنویسی و با حل کنندهی CPLEX اجرا می‌کنیم. در نمونه اول شبکه‌ای در مقیاس متوسط با $n = 5$ گره و $m = 5$ کمان را در نظر می‌گیریم که در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: شبکه‌ای با ۵ گره و ۵ کمان

برای این نمونه، مقدار پارامترها را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

- پارامتر اطمینان ($p = 0.6$).
- نقاط درونیابی متناظر با هر کالای $k \in K$ ، $t = 2, 3, \dots, T$ ، $z_{k1} = 0.01$ ، $z_{kt} = 0.1 * (t-1)$.
- ماکزیمم سطح ظرفیت ($r_{max} = 3$).
- هزینه ثابت f_{ij}^r برای هر کمان $(i, j) \in A$ و $r = 1, 2, \dots, r_{max}$ به طور یکنواخت در بازه (1,6) تولید می‌شود.
- هزینه متغیر c_{ij}^r برای هر کمان $(i, j) \in A$ و $r = 1, 2, \dots, r_{max}$ به طور یکنواخت در بازه $(3r, 3(r+1))$ تولید می‌شود.
- ظرفیت U_{ij}^r برای هر کمان $(i, j) \in A$ و $r = 1, 2, \dots, r_{max}$ به طور یکنواخت در بازه $(2r, 2(r+1))$ تولید می‌شود.

فرض بر این است که دو کالا وجود دارد و هر کالا دارای یک گره منبع و یک گره مقصد است. گره‌های ۱ و ۴ به ترتیب گره‌های منبع و مقصد کالای اول و گره‌های ۲ و ۵ به ترتیب گره‌های منبع و مقصد کالای دوم هستند. برای این نمونه دو

سناریو وجود دارد که در سناریوی اول تمام کمان‌ها بدون تخریب (سالم) هستند و پارامتر ذخیره‌سازی برابر یک و در سناریوی دوم کمان (۱,۳) تخریب می‌شود و پارامتر ذخیره‌سازی برابر ۰/۵ فرض می‌شود. برای راحتی، وزن هر کالا متناظر با هر سطح ظرفیت روی هر کمان برابر یک در نظر گرفته می‌شود. نتایج این مثال در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵: نتایج محاسباتی

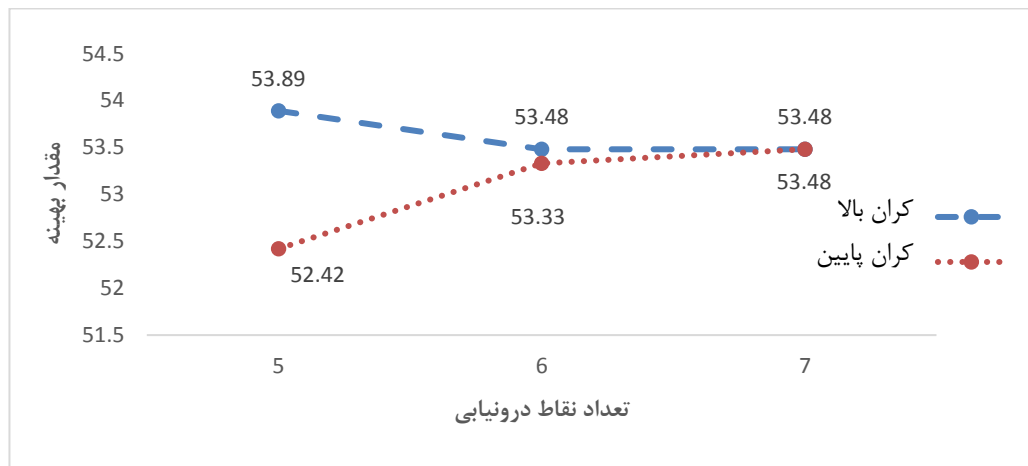
تعداد نقاط درونیابی	t_1^*	t_2^*	شکاف (%)
T = 5	52.42	53.89	2.72
T = 6	53.33	53.48	0.28
T = 7	53.48	53.48	0.00

در این جدول، ستون اول تعداد نقاط درونیابی، ستون دوم و سوم به ترتیب مقادیر توابع هدف بهینه‌ی تقریب مماس قطعه قطعه‌ای (کران پایین) و تقریب خطی قطعه قطعه‌ای (کران بالا) را نشان می‌دهند. همچنین ستون آخر شکاف میان مقادیر این دو تقریب را نشان می‌دهد که از رابطه

$$Gap = \frac{UB-LB}{UB} .100\% ,$$

بدست می‌آید.

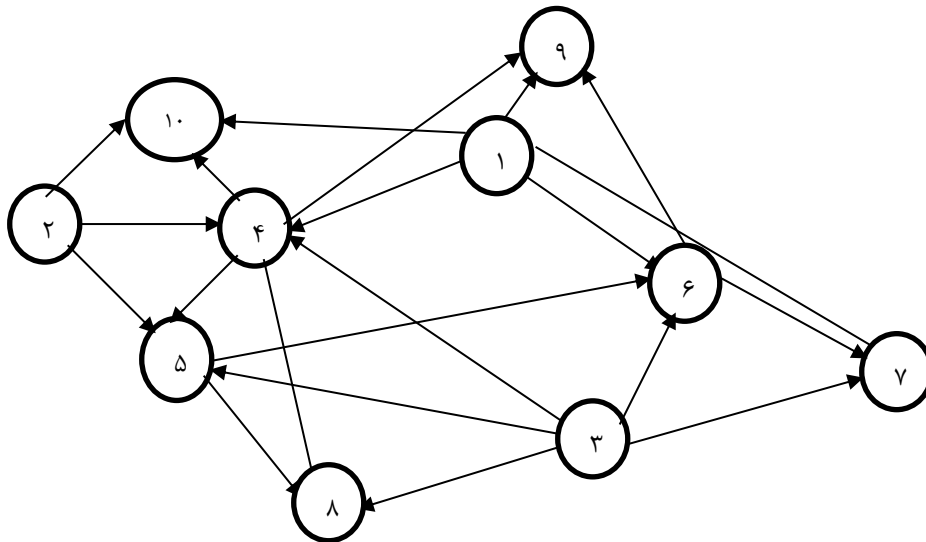
در ادامه نمودار تغییرات مقادیر تقریب کران بالا و پایین را نسبت به تغییرات تعداد نقاط درونیابی نشان می‌دهیم. این نمودار با جزئیات در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: تقریب کران بالا و پایین برای نقاط درونیابی مختلف

با توجه به شکل ۲، با افزایش تعداد نقاط درونیابی، تقریب کران پایین افزایشی و تقریب کران بالا کاهشی است. همچنین با افزایش تعداد نقاط درونیابی، شکاف میان دو تقریب کاهش یافته و زمانی که تعداد نقاط درونیابی به ۷ می‌رسد، شکاف برای این نمونه به صفر رسیده و جواب بهینه حاصل می‌شود.

در نمونه دوم شبکه‌ای در مقیاس بزرگ با $n=10$ گره و $m=21$ کمان را که توسط روش باراباسی [۱] تولید شده است را در نظر می‌گیریم. این نمونه در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: شبکه‌ای با ۱۰ گره و ۲۱ کمان، تولید شده توسط روش باراباسی [۱]

برای این نمونه، مقدار پارامترها را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

- پارامتر اطمینان $(p=0.6)$.
- نقاط درونیابی متناظر با هر کالای $k \in K$ ، $z_{ki}=0.1 \times (i-1)$ ، $i=2,3,\dots,T$ ، $z_{k1}=0.01$.
- ماکزیمم سطح ظرفیت $(r_{max}=3)$.
- هزینه ثابت f_{ij}^r برای هر کمان $(i,j) \in A$ و $r=1,2,\dots,r_{max}$ به طور یکنواخت در بازه $(1,10)$ تولید می‌شود.
- هزینه متغیر c_{ij}^r برای هر کمان $(i,j) \in A$ و $r=1,2,\dots,r_{max}$ به طور یکنواخت در بازه $(3r,3(r+1))$ تولید می‌شود.
- ظرفیت U_{ij}^r برای هر کمان $(i,j) \in A$ و $r=1,2,\dots,r_{max}$ به طور یکنواخت در بازه $(2r,2(r+1))$ تولید می‌شود.

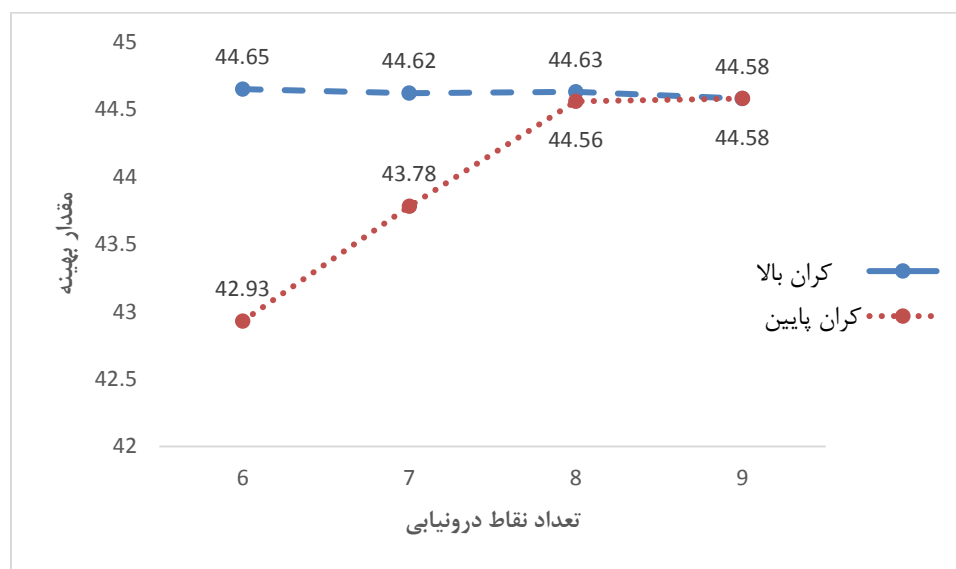
در این نمونه فرض می‌کنیم که دو کالا وجود دارد و هر کالا دارای یک گره منبع و یک گره مقصد است. گره‌های ۲ و ۹ به ترتیب گره‌های منبع و مقصد کالای اول و گره‌های ۱ و ۶ به ترتیب گره‌های منبع و مقصد کالای دوم هستند. برای این

نمونه دو سناریو وجود دارد که در سناریوی اول تمام کمان‌ها بدون تخریب (سالم) هستند و پارامتر ذخیره‌سازی برابر یک و در سناریوی دوم کمان (۵,۶) تخریب می‌شود و پارامتر ذخیره‌سازی برابر ۰/۵ فرض می‌شود. برای راحتی، وزن هر کالا متناظر با هر سطح ظرفیت روی هر کمان برابر یک در نظر گرفته می‌شود. نتایج این مثال در جدول ۶ ارائه شده است.

جدول ۶: نتایج محاسباتی

تعداد نقاط درونیابی	t_1^*	t_2^*	شکاف (%)
T = 6	44.65	42.93	4.00
T = 7	44.62	43.78	1.91
T = 8	44.63	44.56	0.15
T = 9	44.58	44.58	0.00

در این جدول، همانند جدول ۵، ستون اول تعداد نقاط درونیابی، ستون دوم و سوم به ترتیب مقادیر توابع هدف بهینه‌ی تقریب مماس قطعه قطعه‌ای (کران پایین) و تقریب خطی قطعه قطعه‌ای (کران بالا) و ستون چهارم میان مقادیر این دو تقریب را نشان می‌دهند. نمودار تغییرات مقادیر تقریب کران بالا و پایین را نسبت به تغییرات تعداد نقاط درونیابی با جزئیات در شکل ۴ نشان می‌دهیم.



شکل ۴: تقریب کران بالا و پایین برای نقاط درونیابی مختلف

با توجه به شکل ۴ با افزایش تعداد نقاط درونیابی، تقریب کران پایین افزایشی و تقریب کران بالا در کل کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش تعداد نقاط درونیابی، شکاف میان دو تقریب کاهش یافته و زمانی که تعداد نقاط درونیابی به ۹ می‌رسد، شکاف برای این نمونه به صفر می‌رسد.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا مدلی را برای مسئله طراحی شبکه ظرفیت‌دار پایدار ارائه کردیم و سپس با غیرقطعی در نظر گرفتن بردار تقاضا و با فرض مستقل بودن متغیرهای تصادفی، با استفاده از محدودیت‌های احتمالی توام و مفاهیم احتمال، مدل قطعی متناظر با آن را ارائه کردیم. با توجه به اینکه مدل حاصل غیرخطی صحیح آمیخته است، از دو تقریب برای حل مسئله استفاده شد و نتایج عددی با استفاده از حل کننده CPLEX برای شبکه‌هایی در مقیاس متوسط و بزرگ به ترتیب در جدول‌های ۵ و ۶ گزارش شد. در آینده، هدف ما بررسی مدل اولیه در محیط عدم قطعیت و با فرض وابستگی میان متغیرهای تصادفی است.

References

1. Barabasi, A., and Albert, R, Emergence of scaling in random networks, (2002) 509-512.
2. Charnes, A., and Cooper, W.W., Chance-Constrained Programming, Management Sci, **6** (1959) 73-79.
3. Cheng, J., and Lissner, A., A second-order cone programming approach for linear programs with joint probabilistic constraints, Operation Research, **40** (2012) 325-328.
4. Cheng, J., Houda, M., Lissner, A., Chance-constrained 0-1 quadratic programs using Copulas, Optim Lett, (2015).
5. Dahl, G., and Stoer, M., A cutting plane algorithm for multicommodity survivable network design problems, INFORMS Jon Comput, **10** (1998) 1-11.
6. Jagannathan, R., Chance-Constrained Programming with Joint Constraints, Operations Research, **22**(2) (1974) 358-372.
7. Kataoka, S., A stochastic programming model, Econometrica, **31**(1-2) (1963) 181-196.
8. Koster, A., and Kutschka, M., An integrated model for survivable network design under demand uncertainty, 8th International Workshop on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN), (2011).
9. Ljubic, I., Mutzel, P., and Zey, B., Stochastic survivable network design problems: Theory and practice, European Journal of Operation Research, (2016) 1-16.
10. Miller, B.L., Wagner, H.M., Chance constrained programming with joint constraints, Operations Research, **13**(6) (1965) 930-945.

11. Minoux, M., Optimum synthesis of a network with non-simultaneous multicommodity flow Requirements, In P. Hansen, editor, Studies on Graphs and Discrete Programming, pages, (1981) 269-277.
12. Rios, M., Marianov, V., Gutierrez, M., Survivable capacitated network design problem: new formulation and Lagrangean relaxation, The Journal of the Operational Research Society, Vol. **51**, No. 5 (May, 2000), pp, (2000) 574-582.
13. Salehi, H., Anisi, M., Survivable multi-commodity network flow design: case of node capacities and arc Failure, International Journal of Operation Research, **35** (2019) 355-365.
14. Terblanche, S.E., Wessaly, R., Hatting, J.M., Survivable network design with demand Uncertainty, European Journal of Operational Research Volume 210, Issue 1, (2011) 10-26.
15. Van de Panne, C., Popp, W., Minimum-cost cattle feed under probabilistic protein constraints, Management Science, **9**(3) (1963) 405-430.