Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Relative Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tensor product of Relative Cohen-Macaulay Modules

Majid Rahro Zargar

Department of Engineering Sciences, Faculty of Advanced Technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Namin, Ardabil, Iran. E-mail: zargar9077@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 8 November 2023
Received in revised form: 5 May 2024
Accepted: 20 May 2024
Published online: 10 July 2024

Keywords:
Local cohomology,
Maximal Cohen-Macaulay,
Relative Cohen-Macaulay.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this paper, R is a commutative Noetherian ring and $\mathfrak{a}$ is a proper ideal of R. In the case where R is local with maximal ideal $\mathfrak{m}$, $\hat{R}$ denotes the $\mathfrak{m}$-adic completion of R, $E_R(R/\mathfrak{m})$ denotes the injective hull of the residue field $R/\mathfrak{m}$ and $(-)^\vee = \mathrm{Hom}_R(-, E_R(R/\mathfrak{m}))$ denotes the Matlis dual functor. Let $\mathrm{D}_\mathfrak{a} := \mathrm{H}^c_\mathfrak{a}(R)^\vee$ whenever R is a relative Cohen-Macaulay local ring with respect to $\mathfrak{a}$ and $\mathrm{ht}_R\mathfrak{a} = c$ (i.e. there is precisely one non-vanishing local cohomology module of R with respect to $\mathfrak{a}$). The R-module $\mathrm{D}_\mathfrak{a}$ has been studied in [16] by the author. Indeed, we showed that these modules treat like dualizing (canonical) modules over Cohen-Macaulay local rings. In the present paper, the main aim is to introduce and study a concept of maximal relative Cohen-Macaulay modules with respect to an ideal $\mathfrak{a}$ of R. Indeed, this notion can be considered as a natural generalization of the ordinary concept of Maximal Cohen-Macaulay module over a local Cohen-Macaulay ring. Let R be a Cohen-Macaulay local ring with a dualizing R-module Ω_R. Then, there exists the well-known isomorphism $M \cong \mathrm{Ext}_R^{d-t}(\mathrm{Ext}_R^{d-t}(M, \Omega_R), \Omega_R)$, whenever M is a Cohen-Macaulay R-module of dimension t. Also, we know that there are some well-known results in the aria of tensor product of Cohen-Macaulay modules. For this purpose, suppose for a moment that R is a Cohen-Macaulay local ring with a dualizing module Ω_R and that M is a non-zero finitely generated R-module. Kawasaki, in [12, Theorem 3.1], showed that if M has finite projective dimension, then M is Cohen-Macaulay if and only if $M \otimes_R \Omega_R$is Cohen-Macaulay. Next, in [13, Theorem 1.11], Khatami and Yassemi generalized this result. They showed that the above result holds whenever M has finite Gorenstein dimension. In this direction, we show that the above result holds under the assumptions that $\sup\{\, \mathrm{i} \mid \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^\mathrm{i}(M, R) \neq 0\} = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}(M)$ and $\mathrm{Tor}_\mathrm{i}^\mathrm{R}(\mathrm{M}, \Omega_R) = 0$ for all $i > 0$ which are weaker conditions than finiteness of Gorenstein dimension of M.

Material and Methods

In this paper to prove the most results we use the methods of derived category and spectral sequences.

Results and discussion

In the present paper, as a generalization of the notion of maximal Cohen-Macaulay module over a local ring R, we introduce a concept of relative maximal Cohen-Macaulay module with respect to an ideal of R. Then, we investigate some properties and characterizations of such modules and as an

application of them, we provide generalization and improvement for the results [12, Theorem 3.1] and [13, Theorem 1.11].

Conclusion

As a first result in this paper, we show that over a relative Cohen-Macaulay ring R the n-th syzygies of any finitely generated R-module M is zero or maximal relative Cohen-Macaulay for all $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) \leq n$. Next, we generalize a well-known result related to the maximal Cohen-Macaulay modules. Indeed, we show that if R is a relative Cohen-Macaulay local ring with respect to $\mathfrak{a}$, then for any maximal Cohen-Macaulay R-module M there exists the natural isomorphism $M \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}), \mathrm{D}_{\mathfrak{a}})$. More precisely, for all $\mathfrak{a}$-relative Cohen-Macaulay R-modules M with $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = t$, we provide the isomorphism $M \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Ext}_R^{c-t}(\mathrm{Ext}_R^{c-t}(M, \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}), \mathrm{D}_{\mathfrak{a}})$. Also, over relative Cohen-Macaulay local rings, we establish a characterization of maximal relative Cohen-Macaulay modules. Finally, by using the above-mentioned results, we could provide generalization and improvement for some well-known results in the aria of tensor product of Cohen-Macaulay modules. We establish another main result which, by using $\mathrm{D}_{\mathfrak{a}}$ instead of Ω_R, provides a generalization of the above-mentioned result of Khatami and Yassemi. Indeed we prove that if $(R, \mathfrak{m})$ is an $\mathfrak{a}\_RCM$ local ring with $\mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) = c$ and M is a non-zero finitely generated R-module such that $\mathrm{Tor}_i^R(M, D_{\mathfrak{a}}) = 0$ for all $i > 0$. Then the following statements hold true:

(i) $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^i(M \otimes_R D_{\mathfrak{a}}, D_{\mathfrak{a}}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^i(M, \hat{R})$ for all i and $M \otimes_R D_{\mathfrak{a}} \neq 0$,

(ii) Suppose that $\sup\{\, i \mid \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^i(M, R) \neq 0\} = \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) - \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, M)$ and that grad $M = \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) - \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. Then M is $\mathfrak{a}\_RCM$ if and only if $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^i(M \otimes_R \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) = 0$ for all $i \neq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. Furthermore, as an application of the above theorem we could improve the results [12, Theorem 3.1] and [13, Theorem 1.11].

How to cite: Rahro Zargar, Majid. (2024). Relative Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tensor product of Relative Cohen-Macaulay Modules. *Mathematical Researches*, **10** (2), 21 – 33.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مدول‌های کوهن-مکالی نسبی ماکسیمال و حاصل ضرب تانسوری مدول‌های کوهن-مکالی نسبی

مجید راهرو زرگر

گروه علوم مهندسی، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی، نمین، اردبیل، ایران. رایانامه: zargar9077@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی **تاریخ دریافت:** ۱۴۰۲/۸/۱۷ **تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۳/۲/۱۶ **تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۳/۲/۳۱ **تاریخ انتشار:** ۱۴۰۳/۰۴/۲۰ **واژه‌های کلیدی:** کوهمولوژی موضعی، مدول کوهن-مکالی ماکسیمال، مدول کوهن-مکالی نسبی.	در این مقاله، ابتدا بعنوان یک تعمیم از مفهوم مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی یک حلقه موضعی و نوتری ، مفهوم مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال نسبت به یک ایده‌آل دلخواه را معرفی می‌کنیم. سپس به بررسی برخی از ویژگی‌ها و مشخص سازی‌های این گونه مدول‌ها می‌پردازیم. نهایتاً، یک تعمیم و بهبود مناسبی برای قضایای [۱۲, ۳٫۱] و [۱۳, ۱٫۱۱] ارائه می‌دهیم.

استناد: راهرو زرگر، مجید، (۱۴۰۳). مدول‌های کوهن-مکالی نسبی ماکسیمال و حاصل ضرب تانسوری مدول‌های کوهن-مکالی نسبی. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۲)، ۲۱ – ۳۳.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

درسرتاسر این مقاله، R یک حلقه نوتری جابجایی دارای عنصر یکه غیر صفر و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌ال سره از حلقه R خواهد بود. در حالتی که R یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، $\hat{R}$ نشان دهنده حلقه کامل شده R نسبت به توپولوژی $\mathfrak{m}$-ادیک، $E_R(R/\mathfrak{m})$ بیانگر پوشش انژکتیو میدان خارج قسمتی $R/\mathfrak{m}$ و $(-)^\vee = \mathrm{Hom}_R(-, E_R(R/\mathfrak{m}))$ نشان دهنده تابعگون[1] دوگان ماتلیس خواهد بود. فرض کنید R یک حلقه کوهن-مکالی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ با $\mathrm{ht}_R\mathfrak{a} = c$ باشد. (یعنی: مدول کوهمولوژی موضعی R نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ دقیقا یک نقطه ناصفر دارد.) در این صورت مدول $\mathrm{D}_\mathfrak{a} := \mathrm{H}^c_\mathfrak{a}(R)^\vee$ که به وسیله نویسنده در مقاله [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است رفتاری بسیار شبیه به مدول‌های متعارف[2] روی حلقه‌های کوهن-مکالی موضعی دارد. توجه داشته باشیم که R -مدول متناهی مولد با بعد انژکتیو متناهی Ω_R را متعارف می‌گویند، هرگاه برای هر عدد صحیح $i \geq 1$، $\mathrm{Ext}^i_R(\Omega_R, \Omega_R) = 0$ و $\mathrm{Hom}_R(\Omega_R, \Omega_R) \cong R$. فرض کنید R یک حلقه موضعی باشد. در این صورت R -مدول متناهی مولد M را کوهن-مکالی ماکسیمال می‌گویند، هرگاه $\mathrm{depth}_\mathrm{R} M = \dim R$. رسته مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال یکی از رسته های مهم و مورد توجه بسیاری از محققین جبرجابجایی و جبرهمولوژیکی است. به وضوح می‌توان دید که روی حلقه‌های موضعی منظم، رسته‌ی مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال دقیقا رسته‌ی مدول‌های آزاد است و همچنین روی حلقه‌های گرنشتاین موضعی این رسته دقیقا همان رسته‌ی مدول‌های متناهی مولد با بعد گرنشتاین صفر است. (جهت جزییات بیشتر در این زمینه خواننده می‌تواند به مرجع [۳] مراجعه کند.)

در این مقاله، هدف اصلی معرفی و مطالعه مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال نسبت به یک ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از حلقه R است که در حقیقت این مفهوم می‌تواند بعنوان یک تعمیم طبیعی از مفهوم قدیمی مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال روی حلقه کوهن-مکالی در نظر گرفته شود. مطالعات انجام شده روی مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال منجر به برخی نتایج جالب و معروف شده است که در این مقاله عمده هدف ما فراهم نمودن نسخه کوهن-مکالی ماکسیمال نسبی برخی از این نتایج معروف است. بعنوان اولین نتیجه در مقاله حاضر، در تذکر ۲،۲ نشان می‌دهیم که روی یک حلقه کوهن-مکالی نسبی R، برای یک مدول متناهی مولد مانند M و برای تمام اعداد صحیح n ،$\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) \leq n$ -امین سی زی جی[3] از M یک مدول کوهن-مکالی ماکسیمال نسبی یا یک مدول صفر است. سپس در گزاره ۳،۲، یک نتیجه معروف در زمینه مدول‌های کوهن-مکالی را تعمیم می‌دهیم. در حقیقت نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه کوهن-مکالی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ باشد، آنگاه برای هر R-مدول کوهن-مکالی ماکسیمال مانند M یکریختی طبیعی زیر موجود است:

$$M \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a}), \mathrm{D}_\mathfrak{a}).$$

بطور دقیق تر برای همه مدول‌های کوهن-مکالی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ با $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = t$ ، اثبات می‌کنیم که یکریختی زیر همواره برقرار است:

$$M \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Ext}^{c-t}_R(\mathrm{Ext}^{c-t}_R(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a}), \mathrm{D}_\mathfrak{a}).$$

---

[1] Functor
[2] Canonical modules
[3] Syzygy

همچنین در قضیه ۴,۲ روی یک حلقه کوهن-مکالی نسبی با استفاده از مدول $\mathrm{D}_{\mathfrak{a}}$ یک مشخص‌سازی از مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال نسبی ارائه می‌دهیم. نهایتاً، با استفاده از قضیه ۴,۲ یک تعمیم و بهبود برای برخی نتایج معروف در زمینه حاصل ضرب تانسوری مدول‌های کوهن-مکالی مهیا می‌کنیم. برای این منظور فرض کنیم که R یک حلقه کوهن-مکالی موضعی به همراه یک مدول متعارف Ω_R و M یک $R-$مدول ناصفر متناهی مولد باشند. کاوازاکی[1] در [۱۲, ۳,۱] نشان داد که اگر M یک مدول با بعد تصویری متناهی باشد، آنگاه M کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر $M \otimes_R \Omega_R$ کوهن-مکالی باشد. سپس در [۱۳, ۱,۱۱] خاتمی و یاسمی این قضیه را تعمیم دادند. در حقیت آنها نشان دادند که قضیه بالا برای مدول های با بعد گرنشتاین متناهی نیز برقرار می‌باشد. لذا در این راستا در قضیه ۵,۲ بعنوان یک نتیجه اصلی با استفاده از مدول $D_{\mathfrak{a}}$ به جای مدول متعارف Ω_R، تعمیم دیگری از قضیه بالا (قضیه خاتمی و یاسمی) را بدست می‌آوریم. بعلاوه در گزاره ۷,۲ بعنوان کابردی از قضیه بالا توانستیم نتایج [۱۲, ۳,۱] و [۱۳, ۱,۱۱] را بهبود ببخشیم.

۱. پیش نیازها

در این بخش به معرفی برخی از تعاریف، مفاهیم و نمادهایی که در مقاله حاضر مورد نیاز خواهد بود می‌پردازیم.
رسته مشتق شده[2] R- مدول‌ها با نماد $D(R)$ نشان داده می شود و از نماد $\simeq$ جهت نشان دادن یکریختی در رسته مشتق شده مدول‌ها استفاده می‌کنیم. برای همبافت $X \in D(R)$ مفهوم‌های سوپریمم و اینفیموم آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sup X \coloneqq \sup\{i\epsilon\mathbb{Z} \mid H_i(X) \neq 0\}$$

و

$$\inf X \coloneqq \inf\{i\epsilon\mathbb{Z} \mid H_i(X) \neq 0\}$$

مطابق با قرار داد مرسوم داریم که $\sup\emptyset = -\infty$ و $\inf\emptyset = -\infty$. برای عدد صحیح l و همبافت (X, ξ^X)، همبافت $(\Sigma^l X, \xi^{\Sigma^l X})$ نشان دهنده همبافت انتقال یافته X به اندازه l درجه به سمت چپ می‌باشد. یعنی برای هر عدد صحیح v، $(\Sigma^l X)_v = X_{v-l}$ و $\xi_v^{\Sigma^l X} = (-1)^v \xi_{v-l}^X$. توجه داشته باشیم که هر $R-$مدول M را می‌توان بعنوان یک همبافت در نظر گرفت که در آن M در جایگاه صفرام و 0 در سایر نقاط قرار می‌گیرد. همچنین زیر رسته کامل از همبافت‌های بطور همولوژیکی محدود از چپ (یعنی: همبافت‌های با سوپریمم متناهی) و محدود از راست (یعنی: همبافت‌های با اینفیموم متناهی) به ترتیب با استفاده از نمادهای $D_{\sqsubset}(R)$ و $D_{\sqsupset}(R)$ نشان داده می‌شوند. بعلاوه زیر رسته کامل از همبافت‌ها با همولوژی مدول‌های متناهی مولد که بطور همولوژیکی محدود یا بطور همولوژیکی از چپ محدود هستند به ترتیب با نمادهای $D_{\square}^f(R)$ و $D_{\sqsubset}^f(R)$ نشان داده می‌شوند. فرض کنیم $X \in D_{\sqsupset}(R)$ و $Y \in D_{\sqsubset}(R)$. در این صورت همبافت همریختی مشتق شده راست از X و Y با نماد $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ نشان داده می‌شود و همچنین داریم:

[1] Kawasaki
[2] Derived category

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X,Y)\simeq \mathrm{Hom}_R(P,Y)\simeq \mathrm{Hom}_R(X,I)\simeq \mathrm{Hom}_R(P,I)$$

در اینجا همبافت‌های P و I به ترتیب یک تحلیل تصویری برای X و یک تحلیل انژکتیو برای Y هستند. بعلاوه برای هر عدد صحیح i داریم:

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{i}(\mathrm{X},\mathrm{Y}):=H_{-i}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X,Y))$$

و همچنین برای همبافت‌های $X\in D_{\sqsupset}(R)$ و $Y\in D_{\sqsupset}(R)$، همبافت ضرب تانسوری مشتق شده چپ با نماد $X\otimes_R^{\boldsymbol{L}}Y$ نشان داده می‌شود و داریم:

$$X\otimes_R^{\boldsymbol{L}}Y\simeq F\otimes_R Y\simeq X\otimes_R T\simeq F\otimes_R T$$

که در اینجا همبافت‌های F و T به ترتیب تحلیل‌های یکدست برای X و Y هستند. بعلاوه برای هر عدد صحیح i داریم $\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{X},\mathrm{Y}):=H_i(\mathrm{X}\otimes_R^{\boldsymbol{L}}\mathrm{Y})$. برای تعاریف و جزییات بیشتر در مورد رسته مشتق شده مدول‌ها، همبافت همریختی مشتق شده راست و همبافت ضرب تانسوری مشتق شده چپ خواننده می‌تواند به مراجع [۳] و [۴] مراجعه کند. فرض کنید M یک R–مدول و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از حلقه R باشد. در این صورت i–امین مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M):=\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{i}(R/\mathfrak{a}^n,M).$$

همچنین $\mathrm{cd}(\mathfrak{a},M):=\sup\{i\in\mathbb{Z}\mid \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M)\neq 0\}$ نشان دهنده بعد کوهمولوژیکی M نسبت به ایده آل $\mathfrak{a}$ می‌باشد.

۲. نتایج

تعریف ۱.۲. R–مدول متناهی مولد M کوهن-مکالی نسبت به ایده آل $\mathfrak{a}$[1]، نامیده می‌شود، هرگاه

$$\mathrm{grade}(\mathfrak{a},M)=\mathrm{cd}(\mathfrak{a},M),$$

که در آن $\mathrm{grade}(\mathfrak{a},M)$ نشان دهنده طول بزرگترین M-رشته در ایده‌ال $\mathfrak{a}$ است. به عبارت معادل، مدول M کوهن-مکالی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ است، هرگاه R–مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{i}(M)$ تنها در نقطه $i=\mathrm{cd}(\mathfrak{a},M)$ ناصفر باشد. برای راحتی کار مدول کوهن-مکالی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$را با نماد $\mathfrak{a}\_RCM$ نشان می‌دهیم و آن را کوهن-مکالی نسبی نیز می‌نامیم. بعلاوه R–مدول ناصفر متناهی مولد M را $\mathfrak{a}\_RCM$ ماکسیمال می‌گوییم، هرگاه M یک R–مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ با $\mathrm{cd}(\mathfrak{a},M)=\mathrm{cd}(\mathfrak{a},R)$ باشد.

توجه داشته باشیم که تعریف فوق تعمیمی از مفهوم مدول‌های کوهن-مکالی و مدول‌های کوهن-مکالی ماکسیمال را ارائه می‌دهد. همچنین توجه داشته باشیم که مفهوم مدول‌های کوهن-مکالی نسبی با مفهوم ایده‌آل‌های تقاطع کامل کوهمولوژیکی[2] که در [۹] مطالعه شده است، مرتبط است. اخیراً چنین مدول‌هایی در [۱۰]، [۱۴]، [۱۵] و [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

---
[1] Cohen-Macaulay with respect to ideal $\mathfrak{a}$
[2] Cohomologically complete intersection ideals

تذکر ۲،۲. فرض کنید که M یک R−مدول و $\mathbf{F} = \{ \mathrm{F_i}, \lambda_\mathrm{i}^\mathrm{F}\}$ یک تحلیل آزاد برای M باشد. در این صورت، برای هر عدد صحیح i، مدول $\Omega_\mathrm{i}^\mathrm{F}(M) := \ker \lambda_{\mathrm{i}-1}^\mathrm{F}$ را بعنوان i -امین سی زی جی از M تعریف می‌کنیم. با توجه به تمرین [۲, ۲،۱،۲۶] روی یک حلقه کوهن-مکالی موضعی Rبرای هر عدد صحیح $n \geq \dim R$، مدول $\Omega_n^\mathrm{F}(M)$صفر یا یک R−مدول کوهن-مکالی ماکسیمال است. لذا با توجه به گزاره [۲, ۱،۲،۹] یعنی نامساوی

$$\mathrm{grade}\Big(\mathfrak{a}\,, \Omega_\mathrm{n}^\mathrm{F}(M)\Big) \leq \min\{\,\mathrm{n}, \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R)\}$$

می‌توان نتیجه گرفت که روی یک حلقه $\mathfrak{a}\_RCM$ مانند R برای هر عدد صحیح $n \geq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R)$، مدول‌های $\Omega_n^\mathrm{F}(M)$ صفر یا یک R−مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ ماکسیمال هستند.

فرض کنید R یک حلقه کوهن-مکالی موضعی با بعد d همراه با یک R−مدول متعارف Ω_R باشد. در این صورت با توجه به قضیه [۲, ۳،۳،۱۰] برای R−مدول کوهن-مکالی از بعد t مانند M یکریختی معروف زیر موجود است:

$$\mathrm{M} \cong \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{d-t}\big(\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{d-t}(\mathrm{M}, \Omega_R), \Omega_\mathrm{R}\big).$$

لذا در این راستا، در گزاره زیر با استفاده از مدول $\mathrm{D}_\mathfrak{a}$ به جای مدول متعارف Ω_R یک تعمیم طبیعی از یکریختی بالا را فراهم می‌کنیم.

گزاره ۳،۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و $\mathfrak{a}\_RCM$ با $\mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) = c$ باشد. در این صورت، برای هر R−مدول ناصفر و $\mathfrak{a}\_RCM$ مانند M با $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = \mathrm{t}$ یکریختی طبیعی زیر برقرار است:

$$M \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{\mathrm{c-t}}(\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{\mathrm{c-t}}(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a}), \mathrm{D}_\mathfrak{a}).$$

به ویژه اگر M یک R−مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ ماکسیمال باشد، آنگاه $M \otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Hom_R}(\mathrm{Hom_R}(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a}), \mathrm{D}_\mathfrak{a})$.

برهان. فرض کنیم که M یک R−مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ با $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) = t$ باشد. در این صورت با توجه به قضیه [(iv)۳،۴ ,۱۶] برای هر عدد صحیح $j \neq c - t$ داریم که $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{j}(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a}) = 0$. بنابراین، با استفاده از یکریختی‌های زیر برای هر عدد صحیح i:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_R^{i}(\mathrm{M}, \Sigma^{c-t}\mathrm{D}_\mathfrak{a}) &\cong H_{-i}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \Sigma^{c-t}\mathrm{D}_\mathfrak{a}))\\
&\cong \mathrm{H}_{-i}(\Sigma^{\mathrm{c-t}}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a})))\\
&\cong \mathrm{H}_{-i+t-c}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D}_\mathfrak{a}))\\
&\cong \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{i+c-t}(\mathrm{M}, \mathrm{D}_\mathfrak{a}),
\end{aligned}$$

می توان نتیجه گرفت که $\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \Sigma^{\mathrm{c-t}}\mathrm{D}_\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{\mathrm{c-t}}(\mathrm{M}, \mathrm{D}_\mathfrak{a})$ و همچنین برای هر عدد صحیح $i > 0$ داریم $\mathrm{Ext}_\mathrm{R}^{i}(\mathrm{M}, \Sigma^{\mathrm{c-t}}\mathrm{D}_\mathfrak{a}) = 0$. اینجا دقت کنیم که یکریختی دوم در بالا با استفاده از لم [۴, ۲،۳،۱۰] بدست می‌آید. لذا در رسته مشتق شده، یکریختی $\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \Sigma^{\mathrm{c-t}}\mathrm{D}_\mathfrak{a}) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \Sigma^{\mathrm{c-t}}\mathrm{D}_\mathfrak{a})$ را بدست می‌آوریم. از طرف دیگر، با

توجه به تذکر [۱۶, ۳,۸]، یکریختی $\widehat{R} \cong \mathrm{Hom_R}(\mathrm{D_\mathfrak{a}}, \mathrm{D_\mathfrak{a}}) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathrm{D_\mathfrak{a}}, \mathrm{D_\mathfrak{a}})$ موجود است. بنابراین با استفاده از قضیه های [(ii)۱۶, ۳,۴] و [۳, A.۴,۲۴] می‌توان یکریختی های زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}}) &\simeq M \otimes_R^{\boldsymbol{L}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathrm{D_\mathfrak{a}}, \mathrm{D_\mathfrak{a}})\\ &\simeq M \otimes_R^{\boldsymbol{L}} \widehat{R}.\end{aligned}$$

در نتیجه، با توجه به یکریختی‌های زیر:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext_R^{c-t}}(\mathrm{Ext_R^{c-t}}(M, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}}) &\cong H_{t-c}\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext_R^{c-t}}(M, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big)\\ &\cong H_{t-c}\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \Sigma^{\mathrm{c-t}}\mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big)\\ &\cong H_{t-c}\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\Sigma^{\mathrm{c-t}}\mathbf{R}\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big)\\ &\cong H_{t-c}\big(\Sigma^{\mathrm{t-c}}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big)\\ &\cong H_0\big(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big)\\ &\cong M \otimes_R \widehat{R}\end{aligned}$$

که در آن یکریختی‌های چهارم و پنجم به ترتیب از لم های [۴, ۲,۳,۱۰] و [۴, ۲,۳,۱۶] بدستِ می‌آیند، اثبات کامل می شود.

قضیه زیر یک مشخص‌سازی از مدول‌های کوهن-مکالی نسبی ماکسیمال روی حلقه‌های کوهن-مکالی نسبی ارائه می‌دهد.

قضیه ۴,۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه $\mathfrak{a}\_RCM$ موضعی و M یک R−مدول ناصفر متناهی مولد باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) M یک مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ ماکسیمال است.

۲) برای هر عدد صحیح $i > 0$ داریم که $\mathrm{Ext_R}^i(M, \mathrm{D_\mathfrak{a}}) = 0$.

۳) شرایط زیر برقرار هستند

الف) $M \otimes_R \widehat{R} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}})$.

ب) برای هر عدد صحیح $i > 0$ ، $\mathrm{Ext_R}^i(\mathrm{Hom_R}(M, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}}) = 0$.

برهان. ابتدا با توجه به تذکر [۱۶, ۳,۳] و نامساوی $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R)$ که از قضیه [۶ , ۲,۲] بدست می‌آید، معادل بودن گزاره های۱) $\Leftrightarrow$ ۲) بدست می‌آید و همچنین با استفاده از گزاره ۳,۲، گزاره ۱) $\Longrightarrow$ ۳) الف) نتیجه می‌شود. حال دقت کنیم که بنابر نتیجه [۱۶, ۳,۲] برای هرعدد صحیح i، یکریختی زیر برقرار است:

$$\mathrm{Ext_R}^i(\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}}), \mathrm{D_\mathfrak{a}}) \cong \Big(\mathrm{H}_\mathfrak{a}^{c-i}\big(\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big)\Big)^{\vee} \qquad (*)$$

که در آن $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R) = c$. بنابرین برای گزاره ۱) $\Longleftarrow$ ۳) ب) به کاربردن قضیه [(iv)(b)۱۶, ۳,۴] نتیجه می‌دهد که برای هر عدد صحیح $i \neq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$ داریم $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}})) = 0$ و لذا نتیجه با استفاده از یکریختی بالا حاصل می شود. برای‌گزاره ۳) $\Longrightarrow$ ۱) ابتدا با استفاده از فرض۳) ب) برای هر عدد صحیح $j < c$ داریم $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^j(\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}})) = 0$. از طرف دیگر، دقت کنیم که $\mathrm{Supp}\big(\mathrm{Hom_R}(\mathrm{M}, \mathrm{D_\mathfrak{a}})\big) \subseteq \mathrm{Supp}(\mathrm{M})$ و با توجه به مثال [(iii)۱۷, ۵,۳۲] یک

مجموعه اندیس مستقیم[1] I و یک خانواده از زیر مدول‌های متناهی مولد مانند $\{N_i\}_{i\in I}$ از مدول $\mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}})$ موجود است بطوری که:

$$\mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}}) \cong \varinjlim_{i\in I} N_i.$$

لذا با توجه به این امر که برای هر $i \in I$، $\mathrm{Supp}(N_i) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$ و به کار گرفتن قضیه [۶, ۲,۲] می‌توان نتیجه گرفت که $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}})) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R)$. لذا برای هر عدد صحیح $j \neq c$ داریم:

$$H_{\mathfrak{a}}^{j}(\mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}})) = 0.$$

در نتیجه، با استفاده از یکریختی $(*)$، فرض ۳(ب) و قضیه [(iii)۳,۱ ,۱۶] یکریختی‌های زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, M \otimes_R \widehat{R}) &\cong \mathrm{Ext}_R^i\left(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^c(\mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}}))^\vee\right)\\ &\cong \mathrm{Tor}_i^R\left(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^c(\mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}}))\right)^\vee\\ &\cong \mathrm{Tor}_{i-c}^R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_R(M, D_{\mathfrak{a}}))^\vee.\end{aligned}$$

بنابراین، برای هر عدد صحیح $i < c$ داریم که $\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, M \otimes_R \widehat{R}) = 0$ و همچنین با توجه به قضیه [۸, ۲,۲] به سادگی می‌توان دید که برای هر عدد صحیح $i < c$، $H_{\mathfrak{a}}^i(M \otimes_R \widehat{R}) = 0$. نهایتاً، با استفاده از قضیه تغییر پایه یکدست[2] و قضیه استقلال[3] می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عدد صحیح $i < c$، $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ و لذا اثبات کامل می‌شود.

با توجه به بحث انجام شده در مقدمه، قضیه زیر که یکی از نتایج اصلی در این مقاله است، یک تعمیم از قضیه [۱,۱۱ ,۱۳] از خاتمی و یاسمی را فراهم می‌کند. در قضیه زیر از مفهوم درجه برای مدول M استفاده خواهیم کرد که به صورت $\mathrm{grad}\, M = \inf\{\, i \mid \mathrm{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۵,۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه $\mathfrak{a}\_RCM$ موضعی با $\mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) = c$ و M یک R-مدول ناصفر متناهی مولد باشد به طوری که برای هر عدد صحیح $i > 0$ داشته باشیم $\mathrm{Tor}_i^R(M, D_{\mathfrak{a}}) = 0$. در این صورت گزاره های زیر برقرار هستند:

۱) برای هر عدد صحیح i، $\mathrm{Ext}_R^i(M \otimes_R D_{\mathfrak{a}}, D_{\mathfrak{a}}) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M, \hat{R})$ و $M \otimes_R D_{\mathfrak{a}} \neq 0$.

۲) فرض کنیم که $\sup\{\, i \mid \mathrm{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\} = \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) - \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, M)$ و همچنین داشته باشیم $\mathrm{grad}\, M = \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) - \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$. در این صورت M یک مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح $i \neq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$ داشته باشیم $H_{\mathfrak{a}}^i(M \otimes_R D_{\mathfrak{a}}) = 0$.

[1] Directed index set
[2] Flat Base Change Theorem
[3] Independence Theorem

برهان. ۱) فرض کنید P یک R–مدول تصویری باشد. در این صورت با توجه به قضیه [۱۷, ۵,۴۰] یک مجموعه اندیس مستقیم I به همراه خانواده ای از R–مدول های آزاد متناهی مولد مانند $\{\mathrm{F_j}\}_{\mathrm{j\in I}}$ موجود است به طوری که

$$P \cong \varinjlim_{\mathrm{j\in I}} \mathrm{F_j}$$

بنابراین با استفاده از قضیه [(i)۱۶, ۴,۳] برای هر $j \in \mathrm{I}$ و $i \neq 0$ $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{c}-i}(\mathrm{F}_j \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) = 0$. لذا برای هر $i \neq 0$ داریم

$$\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{c-i}(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) \cong \varinjlim_{\mathrm{j\in I}} \mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{c}-i}(\mathrm{F}_j \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) = 0.$$

بنابراین با به کار گرفتن نتیجه [۱۶, ۳,۲] می‌توان دید که برای هر عدد $i \neq 0$، $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{i}(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}, \mathrm{D}_{\mathfrak{a}})$. حال با استفاده از قضیه [۱۶, ۱۰,۴۹] و تذکر [(i)۱۷, ۳,۸] رشته طیفی ربع سومی[1] زیر موجود است.

$$\mathrm{E}_2^{\mathrm{p,q}} := \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{p}}(\mathrm{Tor}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}), \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{p+q}}(\mathrm{M}, \hat{R}).$$

چون برای هر $q > 0$ داریم که $\mathrm{Tor}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{R}}(M, \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) = 0$، پس برای هر $q \neq 0$، $\mathrm{E}_2^{\mathrm{p,q}} = 0$ و لذا رشته طیفی روی ستون $q = 0$ فرو می‌ریزد. بنابرین برای هر عدد i، یکریختی $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}, \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{M}, \hat{R})$ بدست می‌آید. در ادامه توجه کنیم که چون $\hat{R}$ یک R–مدول یکدست است، لذا با استفاده از قضیه [۷, ۳,۲,۱۵] برای هر عدد صحیح i داریم $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{i}(\mathrm{M}, \hat{R}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{i}(\mathrm{M}, \mathrm{R}) \otimes_{\mathrm{R}} \hat{R}$ که نشان می‌دهد $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{D}_{\mathfrak{a}} \neq 0$.

۲) ابتدا باید توجه کنیم که با استفاده از نامساوی‌های $\mathrm{grade}(\mathfrak{a}, \mathrm{M}) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, \mathrm{M}) \leq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, \mathrm{R})$ و فرض اینکه R یک حلقه $\mathfrak{a}\_RCM$ است، $\mathrm{grade}(\mathfrak{a}, R) - \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, \mathrm{M})$ یک عدد نامنفی می‌باشد. حال فرض کنیم M یک مدول $\mathfrak{a}\_RCM$ باشد. در این صورت، برای هر $i \neq \mathrm{grade}(\mathfrak{a}, \mathrm{M})$ داریم $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{i}(\mathrm{M}, \mathrm{R}) = 0$. لذا، با استفاده از گزاره ۱) و نتیجه [۱۶, ۳,۲] می‌توان دید که برای هر عدد صحیح $i \neq \mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$، $\mathrm{H}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{i}}(M \otimes_R \mathrm{D}_{\mathfrak{a}}) = 0$. همچنین عکس گزاره مذکور با استفاده از گزاره ۱) و نتیجه [۱۶, ۳,۲] حاصل می‌شود.

فرض کنید R یک حلقه موضعی و M یک R–مدول ناصفر، متناهی مولد و از بعد گرنشتاین متناهی باشد.(برای تعریف، [۱] دیده شود). در این صورت، نتیجه [۵, ۱,۱۰] و گزاره [۷, ۱۰,۴,۱۷] نتیجه می‌دهند که برای هر عدد $i > 0$، $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \Omega_R) = 0$ که در اینجا Ω_R یک R–مدول متعارف برای حلقه R می‌باشد و همچنین با توجه به قضیه [۳, ۱,۴,۸] داریم که $\sup\{\mathrm{i} \mid \mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{i}}(M, R) \neq 0\} = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}(M)$. تذکر زیر نشان می‌دهد عکس مطلب مذکور برقرار نمی‌باشد. درحقیقت نشان می‌دهیم که اگر برای هر عدد $\mathrm{i} > 0$ ، $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, \Omega_R) = 0$ و

[1] Third quadrant spectral sequence

$\sup\{ i \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(M,R) \neq 0\} = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}(M)$، آنگاه لزوما بعد گرنشتاین مدول M متناهی نمی‌باشد.

تذکر ۶٫۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه کوهن-مکالی موضعی به همراه مدول متعارف Ω_R و M یک R–مدول ناصفر و متناهی مولد باشند بطوری که $\sup\{ i \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(M,R) \neq 0\} = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}(M)$ و همچنین $\mathrm{pd}_{\mathrm{R}}(M) = \infty$. حال فرض کنیم $n \geq \dim \mathrm{R}$ و $\Omega_n^{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$، n–امین سی زی جی مدول از یک تحلیل آزاد $\boldsymbol{F}$ برای M باشد. در این صورت، با توجه به تذکر ۲٫۲ مدول $\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$ کوهن-مکالی ماکسیمال است. همچنین چون برای هر عدد صحیح $\mathrm{i} > 0$، یکریختی $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R}) \cong \mathrm{Ext}^{\mathrm{i+n}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})$ برقرار است، پس برای هر عدد صحیح $\mathrm{i} > 0$ داریم $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R}) = 0$. در نتیجه یکریختی زیر

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R})$$

در رسته مشتق شده مدول‌ها برقرار می‌شود و همچنین R–مدول $\mathrm{Hom}_{R}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R})$ کوهن-مکالی ماکسیمال است و لذا با توجه به نتیجه [۲, ۳٫۵٫۱۱] برای هر $i > 0$ داریم $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R}),\mathrm{R}) = 0$. بنابراین با توجه به [۳, A. ۴٫۲۴] یکریختی‌های زیر

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\mathrm{R}),\Omega_{\mathrm{R}}) \simeq \Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathrm{R}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R},\Omega_{\mathrm{R}}) \simeq \Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathrm{R}} \Omega_{\mathrm{R}}$$

ایجاب می‌کند که برای هر $i > 0$ داشته باشیم $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M}),\Omega_{R}) = 0$. حال با فرض درست بودن عکس مطلب بالا، با به کار بردن لم [۳, ۱٫۲٫۶] برای مدول $\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Gdim}_{\mathrm{R}}\left(\Omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{F}}(M)\right) = 0$ و لذا $\mathrm{Gdim}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}) < \infty$. بنابراین با فرض درست بودن عکس مطلب بالا اثبات کردیم که هر R–مدول ناصفر و متناهی مولد M که در شرط $\sup\{ i \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(M,R) \neq 0\} = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}(M)$ صدق می‌کند دارای بعد گرنشتاین متناهی است که این یک تناقض است. زیرا با توجه به [۱۱]، یک حلقه موضعی و آرتینی مانند R و یک R–مدول ناصفر و متناهی مولد M با شرط $\sup\{ i \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(M,R) \neq 0\} = 0$ موجود است که بعد گرنشتاین M نامتناهی می‌باشد.

با توجه با تذکر اشاره شده در بالا، در گزاره زیر، قضیه [۱۳, ۱٫۱۱] که نشان می‌دهد روی یک حلقه کوهن-مکالی موضعی R همراه با مدول متعارف Ω_R، اگر M یک R–مدول متناهی مولد با بعد گرنشتاین متناهی باشد، آنگاه M کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \Omega_{\mathrm{R}}$ کوهن-مکالی است، را تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۷٫۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه کوهن-مکالی موضعی به همراه مدول متعارف Ω_R و M یک R–مدول ناصفر و متناهی مولد باشد بطوری که $\sup\{ i \mid \mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(M,R) \neq 0\} = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}(M)$ و همچنین برای هر عدد صحیح $i > 0$، $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\Omega_{R}) = 0$. در این صورت، M کوهن-مکالی (کوهن-مکالی ماکسیمال) است اگر و تنها اگر $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \Omega_{\mathrm{R}}$ کوهن-مکالی (کوهن-مکالی ماکسیمال) است.

برهان. ابتدا توجه کنیم با توجه به قضیه [(c) ۳،۳،۵ ,۲]، $\Omega_{\hat{R}} \cong \Omega_{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{R}} \hat{R}$ یک مدول متعارف برای حلقه $\hat{R}$ است و همچنین با توجه به تساوی‌های $\mathrm{depth}(R) = \mathrm{depth}(\hat{R})$ و $\mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(\widehat{M})$ و یکریختی‌های $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{i}}(M,R)\otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Ext}_{\hat{R}}^{\mathrm{i}}(\widehat{M},\hat{R})$ و $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\Omega_R)\otimes_R \hat{R} \cong \mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^{\hat{R}}(\widehat{M},\Omega_{\hat{R}})$ می‌توانیم فرض کنیم R یک حلقه کامل است و لذا می‌توان دید که $\Omega_{\mathrm{R}} \cong \mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$. همچنین چون R کوهن-مکالی است می‌توان نتیجه گرفت که $\mathrm{grad(M)} = \mathrm{depth\ R} - \mathrm{dim\ M}$. بنابراین اثبات با استفاده از قضیه ۲،۵.(۲) کامل می‌شود.

References

1. M. Auslanser, Anneau de Gorenstein et torsion en algèbre commutative, Séminaire d'algèbre commutative, 1966/67, notes by M. Mangeney, C. Peskine and L. Szpiro, École Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris, 1967.
2. W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
3. L. W. Christensen, Gorenstein Dimensions, Lecture notes in Mathematices, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
4. L. W. Christensen and H-B. Foxby, Hyperhomological Algebra with Applications to Commutative Rings, https://www.math.ttu.edu/~lchriste/book.html.
5. L.W. Christensen, H-B. Foxby and H. Holm, Beyond totally reflexive modules and back, In: Noetherian and Non-Noetherian Perspectives, edited by M. Fontana, S-E. Kabbaj, B. Olberding and I. Swanson, Springer Science+Business Media, LLC, New York, (2011) 101-143.
6. K. Divaani-Aazar, R. Naghipour and M. Tousi, Cohomological dimension of certain algebraic varieties, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 3537-3544.
7. E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, Relative homological algebra, de Gruyter, Berlin, 2000.
8. S. H. Hassanzadeh and A. Vahidi, On Vanishing and Cofinitness of Generalized Local Cohomology Modules, Communications in Algebra., **37** (2009), 2290-2299.
9. M. Hellus and P. Schenzel, On cohomologically complete intersections, J. Algebra., **320** (2008), 3733-3748.
10. M. Hellus and P. Schenzel, Notes on local cohomology and duality, J. Algebra., **401** (2014), 48-61.
11. D. Jorgensen and L. M. Sega, Independence of the total reflexivity conditions for modules, Algebras and Representation Theory, **9** (2006), 217-226.
12. T. Kawasaki, Surjective-Buchsbaum modules over Cohen-Macaulay local rings, Math. Z., **218** (1995), 191-205.
13. L. Khatami and S. Yassemi, Cohen-Macaulayness of tensor products, Rocky Mountain J. Math., **34** (2004), 205-213.
14. M. Rahro Zargar and H. Zakeri, On injective and Gorenstein injective dimensions of local cohomology modules, Algebra Colloq., **22** (2015), 935-946.
15. M. Rahro Zargar and H. Zakeri, On flat and Gorenstein flat dimensions of local cohomology modules, Canad. Math. Bull., **59** (2016), 403-416.

16. M. Rahro Zargar, Relative canonical module and some duality results, Algebra Colloq., **26**(02) (2019), 351-360.
17. J. J. Rotman, An introduction to homological algebra, Second ed., Springer, New York, 2009.