



Kharazmi University

Surjective Norm-Additive in Modulus Maps between Real Lipschitz Algebras with Lipschitz Involution

Mansureh Mohammadi¹ , Davood Alimohammadi²

1. Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University, 38481-77584, Arak, Iran. E-mail: s39912131067.phd@araku.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University, 38481-77584, Arak, Iran. E-mail: d-alimohammadi@araku.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received: 24 February 2024

Received in revised form:

9 January 2025

Accepted: 17 February 2025

Published online:

28 February 2025

Keywords:

Lipschitz involution,
Norm-additive in modulus,
Real Lipschitz algebra,
Uniform norm.

ABSTRACT

Introduction

Let X be a topological space. We denote by $C(X)$ the set of all complex-valued functions on X . Then $C(X)$ is a commutative complex algebra. Let $C^b(X)$ denote the set of all $f \in C(X)$ for which f is bounded. It is known that $C^b(X)$ is a commutative complex Banach algebra with the uniform norm $\|\cdot\|_X$ defined by $\|f\|_X = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$ ($f \in C^b(X)$). Note that, $\lambda_X \in C^b(X)$ where $\lambda \in \mathbb{C}$ and λ_X is the constant function on X with value λ . We denote by $C_0(X)$ the set of all $f \in C(X)$ for which f vanishes at infinity. It is known that $C_0(X)$ is a uniformly closed subalgebra of $C^b(X)$. Note that, $1_X \notin C_0(X)$ whenever X is not compact and $C^b(X) = C_0(X) = C(X)$ whenever X is compact.

The symbol \mathbb{k} denotes a field can be \mathbb{R} or \mathbb{C} . Let X and Y be topological spaces, A and B be linear subspaces of $C^b(X)$ and $C^b(Y)$, respectively, over \mathbb{K} and $T: A \rightarrow B$ be a map. We say that T is \mathbb{R}^+ -homogenous if $T(rf) = rT(f)$ for all $r > 0$ and $f \in A$. The map T is called *norm-additive in modulus* if $\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y = \| |f| + |g| \|_X$ for every pair $f, g \in A$.

In [9], Tonev and Yates characterized surjections T from a complex uniform algebra A on X to a complex uniform algebra B on Y for which T is \mathbb{R}^+ -homogenous norm-additive in modulus, where X and Y are compact Hausdorff spaces. They also gave certain conditions under which T is an isometric algebra isomorphism. In [4], Hosseini and Font generalized the main result in [9] for function algebras on locally compact Hausdorff spaces. In fact, they characterized maps T and S from a complex function algebra A on X to a function algebra B on Y for which T and S are surjection \mathbb{R}^+ -homogenous and satisfying

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y = \| |f| + |g| \|_X = \| |S(f)| + |S(g)| \|_Y$$

for all $f, g \in A$, which are called *jointly norm-additive in modulus*, where X and Y are locally compact Hausdorff spaces.

Let (X, d) and (Y, ρ) be metric spaces. A map $\psi: X \rightarrow Y$ is called a *Lipschitz mapping* from (X, d) to (Y, ρ) if there exists a constant C such that $\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$ for all $x_1, x_2 \in X$. A *Lipschitz homeomorphism* from (X, d) to (Y, ρ) is a bijection $\psi: X \rightarrow Y$ such the ψ is a Lipschitz mapping from (X, d) to (Y, ρ) and ψ^{-1} is a Lipschitz mapping from (Y, ρ) to (X, d) .

Let (X, d) be a metric space. For a \mathbb{K} -valued function f on X , the *Lipschitz constant* of f is denoted by $\mathcal{L}_{(X, d)}(f)$ and defined by

$$\mathcal{L}_{(X, d)}(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

A function $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ is called a *\mathbb{K} -valued Lipschitz function* on (X, d) if $\mathcal{L}_{(X, d)}(f) < \infty$. We denote by $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ the set of all \mathbb{K} -valued bounded Lipschitz functions f on (X, d) . Then $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ is a subalgebra of $C^b(X)$ over \mathbb{K} that contains 1_X and a Banach algebra over \mathbb{K} with the Lipschitz sum norm $\|\cdot\|_{\text{Lip}(X, d)}$ defined by

$$\|f\|_{\text{Lip}(X, d)} = \|f\|_X + \mathcal{L}_{(X, d)}(f) \quad (f \in \text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)).$$

The algebra $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ is called *Lipschitz algebra* over \mathbb{K} on (X, d) . This algebra was first introduced by Sherbert in [7]. We write by $\text{Lip}(X, d)$ instead of $\text{Lip}_{\mathbb{C}}(X, d)$.

In [4], Hosseini and Font characterized surjective \mathbb{R}^+ -homogenous and jointly norm-additive maps between complex Lipschitz algebras on compact metric spaces as the following.

Theorem [4, Corollary 3.7]. *Let (X, d) and (Y, ρ) be compact metric spaces and let $T, S: \text{Lip}(X, d) \rightarrow \text{Lip}(Y, \rho)$ be surjective \mathbb{R}^+ -homogenous jointly norm-additive in modulus maps. Then there exists a Lipschitz homeomorphism φ from (Y, ρ) to (X, d) such that $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))| = |S(f)(y)|$ for all $f \in \text{Lip}(X, d)$ and $y \in Y$.*

Let X be a compact Hausdorff Space. A self-map $\tau: X \rightarrow X$ is called a *topological involution* on X if τ is continuous and $\tau(\tau(x)) = x$ for all $x \in X$. For a topological involution τ on X the map $\tau^*: C(X) \rightarrow C(X)$ defined by $\tau^*(f) = \bar{f} \circ \tau, f \in C(X)$, is an algebra involution on $C(X)$ which is called the *induced algebra involution by τ on $C(X)$* where \bar{f} is the conjugate function of f . Define $C(X, \tau) = \{f \in C(X) : \tau^*(f) = f\}$. Then $C(X, \tau)$ is a self-adjoint uniformly closed real subalgebra of $C(X)$ that contains 1_X and separates the points of X . Moreover, $C(X) = C(X, \tau) \oplus iC(X, \tau)$ and $i1_X \notin C(X, \tau)$. This algebra was first introduced by Kulkarni and Limaye in [4]. For a detailed account of several properties of $C(X, \tau)$, we refer to [5].

Let (X, d) be a compact metric space. A self-map τ of X is called a *Lipschitz involution* on (X, d) if τ is a Lipschitz mapping on (X, d) and $\tau(\tau(x)) = x$ for all $x \in X$. For example, the self-map τ on \mathbb{D} defined by $\tau(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{D}$, is a Lipschitz involution on \mathbb{D} where $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Let τ be a Lipschitz involution on (X, d) and τ^* be the induced algebra involution by τ on $C(X)$. Then $\tau^*(\text{Lip}(X, d)) = \text{Lip}(X, d)$. Define

$$\text{Lip}(X, d, \tau) = \{f \in \text{Lip}(X, d) : \tau^*(f) = f\}.$$

Then $\text{Lip}(X, d, \tau)$ is a self-adjoint real subalgebra of $\text{Lip}(X, d)$ and $C(X, \tau)$ that contains 1_X and separates the points of X . Moreover, $\text{Lip}(X, d) = \text{Lip}(X, d, \tau) \oplus i\text{Lip}(X, d, \tau)$ and $\text{Lip}(X, d, \tau) = \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ if and only if τ is the identity map on X . The $\text{Lip}(X, d, \tau)$ -algebras are called *real Lipschitz algebras with Lipschitz involution*. These algebras were first introduced in [2].

Main Results

In this paper, we obtain the following results.

Theorem 1.1. *Let (X, d) and (Y, ρ) be compact metric spaces, τ be a Lipschitz involution on (X, d) , η be a Lipschitz involution on (Y, ρ) , A be a real subalgebra of $C(X, \tau)$ which contains $\text{Lip}(X, d, \tau)$ and B be a real subalgebra*

of $C(Y, \eta)$ which contains $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$. Suppose that $x_\tau = \{x, \tau(x)\}$ for all $x \in X$, and $X_\tau = \{x_\tau: x \in X\}$, $y_\eta = \{y, \eta(y)\}$ for all $y \in Y$ and $Y_\eta = \{y_\eta: y \in Y\}$. Let $T: A \rightarrow B$ be a surjective \mathbb{R}^+ -homogenous norm-additive map. Then $|T(1_X)| = 1_Y$ and there exists a unique bijection $\Phi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ such that if $y \in Y$ and $x \in \Phi(y_\eta)$ then $|T(f)(y)| = |f(x)|$ for all $f \in A$.

Theorem 1.2. Let (X, d) and (Y, ρ) be compact metric spaces. If $T: \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d) \rightarrow \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ is a surjective \mathbb{R}^+ -homogenous norm-additive map, then $|T(1_X)(y)| = 1_Y$ and there exists a Lipschitz homeomorphism φ from (Y, ρ) to (X, d) such that $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|$ for all $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ and $y \in Y$.

How to cite: Mohammadi, M. & Alimohammadi, D. (2024). Surjective norm-additive in modulus maps between real Lipschitz algebras with Lipschitz involution, *Mathematical Researches*, **10** (4), 77 – 99.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

نگاشت‌های نرم-جمعی در قدرمطلق پوشا بین جبرهای حقیقی لیبشیتس با برگشت لیبشیتس

منصوره محمدی^۱، داود علیمحمدی^۲ ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ۳۸۴۸۱-۷۷۵۸۴، اراک، ایران. رایانامه: s39912131067.phd@araku.ac.ir
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، ۳۸۴۸۱-۷۷۵۸۴، اراک، ایران. رایانامه: d-alimohammadi@araku.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده، τ یک برگشت لیبشیتس بر (X, d) و η یک برگشت لیبشیتس بر (Y, ρ) باشند. همچنین فرض کنیم به ازای هر $x \in X$ ، $X_\tau = x_\tau = \{x, \tau(x)\}$ و $Y_\eta = \{y, \eta(y)\}$ ؛ $y \in Y$ یک زیرجبر حقیقی شامل $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است و B یک زیرجبر حقیقی $C(Y, \eta)$ باشد که شامل $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است. ثابت می‌کنیم اگر $T: A \rightarrow B$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد، دوسویی یکتای $\Phi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ وجود دارد به طوری که هرگاه $x \in \Phi(y_\eta)$ و $y \in Y$ آنگاه به ازای هر $f \in A$ داریم $ T(f)(y) = f(x) $. با استفاده از این موضوع نشان می‌دهیم اگر (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده باشند و T یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق از $\text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ به $\text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ باشد، آنگاه یک همسانریختی لیبشیتس φ از (Y, ρ) به (X, d) یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ و $y \in Y$ ؛ $ T(f)(y) = f(\varphi(y)) $.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰	واژه‌های کلیدی: برگشت لیبشیتس، جبر حقیقی لیبشیتس، نرم-جمعی در قدرمطلق، نرم یکنواخت.

استناد: محمدی، منصوره و علیمحمدی، داود؛ (۱۴۰۳). نگاشت‌های نرم-جمعی در قدرمطلق پوشا بین جبرهای حقیقی لیبشیتس با برگشت لیبشیتس.

پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۴)، ۷۷-۹۹.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنیم \mathbb{K} یک میدان باشد که یا میدان اعداد حقیقی \mathbb{R} است یا میدان اعداد مختلط \mathbb{C} .

تعریف ۱.۱. فرض کنیم A و B فضاهای برداری روی میدان \mathbb{K} باشند و $T: A \rightarrow B$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت \mathbb{R}^+ -همگن است هرگاه به ازای هر عدد حقیقی مثبت r و هر $a \in A$ داشته باشیم $T(ra) = rT(a)$.

فرض کنیم E یک مجموعه ناتهی بوده و $B(E)$ مجموعه همه توابع مختلط-مقدار کراندار بر E باشد. می‌دانیم $B(E)$ یک جبر باناخ^۱ تعویض‌پذیر مختلط تحت نرم یکنواخت $\|\cdot\|_E$ است که به صورت

$$\|f\|_E = \sup \{|f(x)| : x \in E\} \quad (f \in B(E)),$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند، A یک زیرفضای خطی $B(X)$ بوده و B یک زیرفضای خطی $B(Y)$ روی میدان \mathbb{K} باشد. همچنین فرض کنیم $T: A \rightarrow B$ یک تابع باشد. گوییم T نرم-جمعی در قدرمطلق است هرگاه

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y = \| |f| + |g| \|_X$$

به ازای هر $f, g \in A$ داشته باشیم.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه همه توابع مختلط-مقدار پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. در این صورت $C(X)$ یک جبر مختلط تعویض‌پذیر است. مجموعه همه توابع مختلط-مقدار پیوسته و کراندار بر X را به $C^b(X)$ نشان می‌دهیم. در این صورت $C^b(X)$ یک زیرجبر مختلط $B(X)$ و $C(X)$ است و با نرم یکنواخت $\|\cdot\|_X$ یک جبر مختلط باناخ تعویض‌پذیر است. توجه کنید که $\lambda_X \in C^b(X)$ که $\lambda \in \mathbb{C}$ و λ_X تابع ثابت با مقدار λ بر X است. مجموعه همه توابع f در $C(X)$ را که در بینهایت به صفر می‌روند، با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $C_0(X)$ یک زیرجبر مختلط یکنواخت بسته $C^b(X)$ است. توجه کنید اگر X فشرده نباشد آنگاه $1_X \notin C_0(X)$ و اگر X فشرده باشد آنگاه

$$C^b(X) = C_0(X) = C(X).$$

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده هاوسدورف^۲ باشد. زیرجبر مختلط A از $C_0(X)$ ، یک جبر تابعی بر X نامیده می‌شود هرگاه A قویاً نقاط X را جدا کند، به این مفهوم که برای هر دو نقطه متمایز x و z در X یک تابع f در A یافت شود به طوری که $f(x) \neq f(z)$ و برای هر $x \in X$ یک تابع g در A یافت شود که $g(x) \neq 0$. یک جبر تابعی یکنواخت بسته بر X ، یک جبر تابعی بر X است که در $(C_0(X), \|\cdot\|_X)$ بسته است. توجه کنید وقتی X فشرده است، فرض می‌کنیم جبرهای تابعی بر X شامل توابع مختلط-مقدار ثابت بر X هستند و در این حالت هر جبر تابعی یکنواخت بسته بر X ، یک جبر تابعی یکنواخت بر X نامیده می‌شود.

¹ Banach

² Hausdorff

تونف^۱ و ییتس^۲ در [8] نگاشت‌های نرم-خطی و نرم-جمعی در قدرمطلق بین جبرهای یکنواخت A و B بر فضاهای فشرده هاوسدورف X و Y را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که نگاشت‌های پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق بین جبرهای مذکور، عملگرهای ترکیبی در قدرمطلق ویژه هستند. به عبارت دقیق‌تر، نتیجه زیر را بدست آوردند.

قضیه ۳.۱. [8, Proposition 10] اگر A و B جبرهای تابعی یکنواخت به ترتیب بر فضاهای فشرده هاوسدورف X و Y باشند و $T: A \rightarrow B$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد، آنگاه یک نگاشت پیوسته ψ از $\text{Ch}(A, X)$ به $\text{Ch}(B, Y)$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $f \in A$ و هر $x \in X$ ؛ $|T(f)(\psi(x))| = |f(x)|$ ، که در آن $\text{Ch}(A, X)$ مرز شوکه A نسبت به X است.

حسینی^۳ و فونت^۴ در [3]، نگاشت‌های نرم-جمعی در قدرمطلق بین جبرهای تابعی، نه لزوماً یکنواخت بسته، بر فضاهای موضعاً فشرده هاوسدورف را بررسی کردند و برخی از نتایج به دست آمده توسط تونف و ییتس را برای جبرهای تابعی بر فضاهای موضعاً فشرده هاوسدورف تعمیم دادند. در واقع، آنها در [3, Corollary 3.6] ساختار نگاشت‌های T و S از یک جبر تابعی A بر X به یک جبر تابعی B بر Y را مشخص کردند که T و S نگاشت‌های \mathbb{R}^+ -همگن پوشا هستند و در شرط

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y = \| |f| + |g| \|_X = \| |S(f)| + |S(g)| \|_Y \quad (f, g \in A),$$

صدق می‌کنند، که در آن X و Y فضاهای موضعاً فشرده هاوسدورف هستند. این نگاشت‌ها تماماً نرم-جمعی در قدرمطلق نامیده می‌شوند.

فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک باشند. نگاشت $\psi: X \rightarrow Y$ یک نگاشت لیپشیتس^۵ از (X, d) به (Y, ρ) می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت C یافت شود به طوری که به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ ؛

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2).$$

نگاشت $\varphi: Y \rightarrow X$ را یک همسانریختی لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) می‌نامیم هرگاه φ دوسویی باشد، φ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) بوده و φ^{-1} یک نگاشت لیپشیتس از (X, d) به (Y, ρ) باشد.

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. تابع $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ را یک تابع \mathbb{K} -مقداری لیپشیتس بر (X, d) می‌نامیم هرگاه f یک نگاشت لیپشیتس از (X, d) به فضای متریک \mathbb{K} با متریک اقلیدسی باشد. ثابت لیپشیتس f را به $\mathcal{L}_{(X, d)}(f)$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}_{(X, d)}(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

¹ Tonév

² Yates

³ Hosseini

⁴ Font

⁵ Lipschitz

مجموعه همه توابع \mathbb{K} -مقداری کراندار لیپشیتس بر (X, d) را به $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر یکانی با نرم-جمعی لیپشیتس $\|\cdot\|_{\text{Lip}(X, d)}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_{\text{Lip}(X, d)} = \|f\|_X + \mathcal{L}_{(X, d)}(f) \quad (f \in \text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)).$$

این جبرها نخستین بار توسط شربرت^۱ در [7] معرفی شده‌اند. توجه داریم که $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ نقاط X را جدا می‌کند. هرگاه $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ، جبر $\text{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ را با $\text{Lip}(X, d)$ نشان می‌دهیم.

حسینی و فونت در [3] ساختار نگاشت‌های پوشای \mathbb{R}^+ -همگن توأم نرم-جمعی در قدرمطلق بین جبرهای مختلط لیپشیتس را تعیین کردند و نشان دادند که این نگاشت‌ها ترکیبی موزون در قدرمطلق هستند. به عبارت دقیق‌تر: قضیه ۴.۱. [3, Corollary 3.7]. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده بوده و S و T نگاشت‌های پوشای \mathbb{R}^+ -همگن توأم نرم-جمعی در قدر مطلق از $\text{Lip}(X, d)$ به $\text{Lip}(Y, \rho)$ باشند. در این صورت یک همسانریختی لیپشیتس φ از (Y, ρ) به (X, d) یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $f \in \text{Lip}(X, d)$ و هر $y \in Y$

$$|S(f)(y)| = |f(\varphi(y))| = |T(f)(y)|.$$

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. خودنگاشت $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت بر X نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ ؛ $\tau(\tau(x)) = x$ ، گوییم زیرمجموعه E از X یک مجموعه τ -پایا است هرگاه $\tau(E) \subseteq E$ واضح است که در این صورت $\tau(E) = E$ در صورتی که X یک فضای توپولوژیک باشد، خودنگاشت $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت توپولوژیک بر X نامیده می‌شود هرگاه τ برگشت بر X بوده و یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده هاوسدورف بوده و $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت توپولوژیک بر X باشد. در این صورت نگاشت $\tau^*: C(X) \rightarrow C(X)$ تعریف شده به صورت

$$\tau^*(f) = \bar{f} \circ \tau \quad (f \in C(X)),$$

یک برگشت جبری بر $C(X)$ است که برگشت جبری القایی توسط τ بر $C(X)$ نامیده می‌شود، که \bar{f} تابع مزدوج f است. قرار می‌دهیم

$$C(X, \tau) = \{f \in C(X) : \tau^*(f) = f\}.$$

کولکارنی^۲ و لیمایه^۳ در [5] نشان دادند $C(X, \tau)$ یک زیرجبر حقیقی خودالحاقی $C(X)$ است که نقاط X را جدا می‌کند، $1_X \in C(X, \tau)$ ، $i1_X \notin C(X, \tau)$ و $C(X) = C(X, \tau) \oplus iC(X, \tau)$. جبر $C(X, \tau)$ اولین بار توسط کولکارنی و لیمایه در [5] معرفی شده است. برای دانستن جزئیات بیشتر در مورد $C(X, \tau)$ و زیرجبرهای حقیقی آن به [6] مراجعه شود.

¹ Sherbert
² Kulkarni
³ Limaye

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. خودنگاشت $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت لپشیتس بر (X, d) نامیده می‌شود هرگاه τ یک برگشت بر X بوده و یک نگاشت لپشیتس از (X, d) به (X, d) باشد. توجه کنید اگر τ یک برگشت لپشیتس بر (X, d) باشد، $C > 0$ و به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(\tau(x), \tau(y)) \leq Cd(x, y)$ آنگاه $C \geq 1$. برای مثال، خودنگاشت τ بر \mathbb{D} را به صورت

$$\tau(z) = \bar{z} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت τ یک برگشت لپشیتس بر \mathbb{D} است، که $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد، τ یک برگشت لپشیتس بر (X, d) بوده و τ^* برگشت جبری القایی بر $C(X)$ توسط τ باشد. در این صورت $\tau^*(\text{Lip}(X, d)) = \text{Lip}(X, d)$ قرار می‌دهیم

$$\text{Lip}(X, d, \tau) = \{f \in \text{Lip}(X, d) : \tau^*(f) = f\}.$$

در واقع، $\text{Lip}(X, d, \tau) = \text{Lip}(X, d) \cap C(X, \tau)$. در [2] ثابت شده است که $\text{Lip}(X, d, \tau)$ یک زیرجبر خودالحاقی جبرهای $\text{Lip}(X, d)$ و $C(X, \tau)$ است که نقاط X را جدا می‌کند، $1_X \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ ، $i1_X \notin \text{Lip}(X, d, \tau)$ ، $\text{Lip}(X, d) = \text{Lip}(X, d, \tau) \oplus i\text{Lip}(X, d, \tau)$ با نرم $\|\cdot\|_{\text{Lip}(X, d)}$ یک جبر باناخ حقیقی است. به علاوه، $\text{Lip}(X, d, \tau) = \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ اگر و فقط اگر τ نگاشت همانی بر X باشد. جبر $\text{Lip}(X, d, \tau)$ نخستین بار در [2] معرفی شده است.

فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضای متریک فشرده بوده، τ و η به ترتیب برگشت‌های لپشیتس بر (X, d) و (Y, ρ) باشند، برای هر $x \in X$ $x_\tau = \{x, \tau(x)\}$ و $x_\tau = \{x_\tau : x \in X\}$ ، برای هر $y \in Y$ $y_\eta = \{y, \eta(y)\}$ و $Y_\eta = \{y_\eta : y \in Y\}$ همچنین فرض می‌کنیم A یک زیرجبر حقیقی $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است و B یک زیرجبر حقیقی $C(Y, \eta)$ باشد که شامل $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است. در بخش ۲، ابتدا نشان می‌دهیم که اگر T یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق از A به B باشد، آنگاه $|T(1_X)| = 1_Y$ بر Y و دو سویی یکتای $\Phi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $f \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ ، هر $y \in Y$ و هر $x \in \Phi(Y_\eta)$

$$|T(f)(y)| = |f(x)|.$$

سپس ثابت می‌کنیم اگر (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده باشند و $T: \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d) \rightarrow \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد، آنگاه $|T(1_X)| = 1_Y$ بر Y و یک همسانریختی لپشیتس φ از (Y, ρ) به (X, d) یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ و هر $y \in Y$ ؛

$$|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|.$$

۲. نتایج اصلی

برای تعیین ساختار نگاشت‌های پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق بین جبرهای حقیقی لپشیتس، به چند لم نیاز داریم.

لم ۱،۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده بوده و $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) باشد. همچنین فرض کنیم $x \in X$ و U زیرمجموعه‌ای τ -پایا از X باشد که در (X, d) باز است و $x \in U$ در این صورت تابع $g \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ وجود دارد به طوری که $g(x) = g(\tau(x)) = 1$ ، به ازای هر $z \in X$ ؛ $0 \leq g(z) \leq 1$ و به ازای هر $z \in X \setminus U$ ؛ $g(z) = 0$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $U = X$. قرار می‌دهیم $g = 1_X$. در این صورت $g \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ تابع مطلوب است. حال فرض کنیم U یک زیرمجموعه سره X باشد. در این صورت x_τ و $X \setminus U$ مجموعه‌های ناتهی فشرده در (X, d) هستند و $x_\tau \cap X \setminus U = \emptyset$. بنابراین $d(X \setminus U, x_\tau) > 0$ که

$$d(X \setminus U, x_\tau) = \inf \{d(s, t) : s \in X \setminus U, t \in x_\tau\}.$$

تابع $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ را به صورت

$$f(z) := \max \left\{ 0, 1 - \frac{d(z, x_\tau)}{d(X \setminus U, x_\tau)} \right\} \quad (z \in X)$$

تعریف می‌کنیم، که

$$d(z, x_\tau) = \inf \{d(z, t) : t \in x_\tau\} = \min \{d(z, x), d(z, \tau(x))\}.$$

در این صورت $f \in \text{Lip}(X, d)$ ، به ازای هر $z \in X$ ؛ $0 \leq f(z) \leq 1$ و $f(x) = f(\tau(x)) = 1$. به علاوه، اگر $z \in X \setminus U$ آنگاه $d(z, x_\tau) \geq d(X \setminus U, x_\tau) > 0$ و لذا $f(z) = 0$. حال قرار می‌دهیم $g = (f \circ \tau)f$. در این صورت $g \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ ، $g(x) = g(\tau(x)) = 1$ ، به ازای هر $z \in X$ ؛ $0 \leq g(z) \leq 1$ و به ازای هر $z \in X \setminus U$ ؛ $g(z) = 0$. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۲،۲. فرض کنیم X یک فضای فشرده هاوسدورف باشد و $f \in C(X)$. مجموعه ماکسیمم f در X با $M(f)$ نشان داده و به صورت $M(f) = \{x \in X : \|f\|_X = |f(x)|\}$ تعریف می‌شود. واضح است که $M(f)$ یک زیرمجموعه ناتهی فشرده X است.

نمادگذاری ۳،۲. فرض کنیم X یک فضای فشرده هاوسدورف باشد، E یک زیرمجموعه ناتهی X بوده و A یک زیرمجموعه ناتهی $C(X)$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{F}_E(A) = \{f \in A : E \subseteq M(f), \|f\|_X = 1\}.$$

واضح است که $1_X \in \mathcal{F}_E(A)$. در صورتی که $x \in X$ به جای $\mathcal{F}_{\{x\}}(A)$ می‌نویسم $\mathcal{F}_x(A)$ اگر τ یک برگشت توپولوژیک بر X بوده، A یک زیرمجموعه ناتهی $C(X, \tau)$ باشد و $x \in X$ ، آنگاه به آسانی دیده می‌شود

$$\mathcal{F}_{x_\tau}(A) = \mathcal{F}_x(A) = \mathcal{F}_{\tau(x)}(A).$$

لم ۴،۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد، $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) بوده، A یک زیرجبر $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است و $x, z \in X$. در این صورت $x_\tau = z_\tau$ اگر و فقط اگر $\mathcal{F}_x(A) \subseteq \mathcal{F}_z(A)$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $x, z \in X$ و $x_\tau = z_\tau$ در این صورت $x = z$ یا $x = \tau(z)$. بنابراین $\mathcal{F}_x(A) = \mathcal{F}_z(A)$ یا $\mathcal{F}_x(A) = \mathcal{F}_{\tau(z)}(A)$ چون $\mathcal{F}_z(A) = \mathcal{F}_{\tau(z)}(A)$ لذا $\mathcal{F}_x(A) = \mathcal{F}_z(A)$ پس لزوم برقرار است. اینک فرض می‌کنیم $x, z \in X$ و $x_\tau \neq z_\tau$. در این صورت $x_\tau \cap z_\tau = \emptyset$. فشردگی مجموعه‌های x_τ و z_τ در فضای متریک فشرده (X, d) ایجاب می‌کنند یک مجموعه باز τ -پایا در فضای متریک (X, d) مانند U وجود دارد به طوری که $x_\tau \subseteq U$ و $z_\tau \subseteq X \setminus U$. با توجه به لم ۱، ۲، تابع $g_x \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $t \in X$ $0 \leq g_x(t) \leq 1$ ، $g_x(x) = g_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $t \in X \setminus U$ $g_x(t) = 0$. واضح است که تابع g_x عضوی از $\mathcal{F}_x(A)$ است. از این که $z \in X \setminus U$ نتیجه می‌شود $g_x(z) = 0$ که ایجاب می‌کند $g_x \notin \mathcal{F}_z(A)$ پس $\mathcal{F}_x(A) \not\subseteq \mathcal{F}_z(A)$. بنابراین نشان داده‌ایم که اگر $\mathcal{F}_x(A) \subseteq \mathcal{F}_z(A)$ آنگاه $x_\tau = z_\tau$. پس کفایت برقرار است و اثبات کامل می‌شود.

نکته. توجه داریم که در لم ۴، ۲ از $x, z \in X$ و $x_\tau = z_\tau$ نتیجه شد $\mathcal{F}_x(A) = \mathcal{F}_z(A)$ اما در صورتی که $x, z \in X$ برای بدست آوردن $x_\tau = z_\tau$ کافی است داشته باشیم $\mathcal{F}_x(A) \subseteq \mathcal{F}_z(A)$

لم ۵، ۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد، $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت لپیشیتس بر (X, d) بوده و A یک زیرفضای $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است. اگر $x \in X$ و $f \in A \setminus \{0_x\}$ آنگاه $|f(x)| + \|f\|_X = \inf \{ \| |f| + |h| \|_X : h \in \|f\|_X \mathcal{F}_x(A) \}$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $x \in X$ و $f \in A \setminus \{0_x\}$ که $\|f\|_X = 1$. قرار می‌دهیم

$$E = \{ \| |f| + |g| \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A) \}.$$

ثابت می‌کنیم $\inf E$ موجود است و

$$|f(x)| + 1 = \inf E. \quad (۲، ۱)$$

از این که $1_x \in \mathcal{F}_x(A)$ نتیجه می‌شود که E یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی است. اگر $g \in \mathcal{F}_x(A)$ ، آنگاه

$$|f(x)| + 1 = |f(x)| + |g(x)| \leq \| |f| + |g| \|_X.$$

بنابراین $|f(x)| + 1$ یک کران پایین E است. فرض کنیم $\epsilon > 0$. قرار می‌دهیم

$$U_\epsilon = \{ z \in X : |f(z)| < |f(x)| + \epsilon \}.$$

در این صورت U_ϵ یک زیرمجموعه τ -پایای X است که در فضای متریک (X, d) باز است و $x \in U_\epsilon$. طبق لم ۱، ۲، تابع $g_\epsilon \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in X$ $0 \leq g_\epsilon(z) \leq 1$ ، $g_\epsilon(x) = g_\epsilon(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $z \in X \setminus U_\epsilon$ $g_\epsilon(z) = 0$. واضح است که $g_\epsilon \in \mathcal{F}_x(A)$. اگر $z \in U_\epsilon$ آنگاه

$$|f(z)| + |g_\epsilon(z)| \leq |f(z)| + 1 < |f(x)| + \epsilon + 1 = |f(x)| + 1 + \epsilon.$$

اگر $z \in X \setminus U_\epsilon$ آنگاه

$$|f(z)| + |g_\epsilon(z)| = |f(z)| + 0 = |f(z)| \leq \|f\|_X = 1 < |f(x)| + 1 + \epsilon.$$

پس نشان داده‌ایم که به ازای هر $z \in X$

$$|f(z)| + |g_\epsilon(z)| < |f(x)| + 1 + \epsilon.$$

بنابراین با توجه به پیوستگی تابع حقیقی-مقدار $|f| + |g_\epsilon|$ بر X و فشردگی X در (X, d) نتیجه می‌گیریم

$$\| |f| + |g_\epsilon| \|_X < |f(x)| + 1 + \epsilon.$$

پس طبق خاصیت مشخصه اینفیموم، $(2, 1)$ برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $x \in X$ و $f \in A \setminus \{0_X\}$. قرار می‌دهیم $f_1 = \frac{1}{\|f\|_X} f$. در این صورت $f_1 \in A \setminus \{0_X\}$ و $\|f_1\|_X = 1$. طبق استدلال ارائه‌شده، داریم

$$|f_1(x)| + 1 = \inf \{ \| |f_1| + |g| \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A) \}.$$

این ایجاب می‌کند

$$\|f\|_X |f_1(x)| + \|f\|_X = \inf \{ \|f\|_X \| |f_1| + |g| \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A) \}.$$

پس با توجه به این که $f = \|f\|_X f_1$ ، داریم

$$\begin{aligned} |f(x)| + \|f\|_X &= \inf \{ \| \|f\|_X |f_1| + \|f\|_X |g| \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A) \} \\ &= \inf \{ \| |f| + \|f\|_X |g| \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A) \} \\ &= \inf \{ \| |f| + |h| \|_X : h \in \|f\|_X \mathcal{F}_x(A) \}. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۶,۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده بوده و $\tau : X \rightarrow X$ و $\eta : Y \rightarrow Y$ به ترتیب برگشت‌های لیپشیتس بر (X, d) و (Y, ρ) باشند. همچنین فرض کنیم A یک زیرجبر حقیقی $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است، B یک زیرجبر حقیقی $C(Y, \eta)$ باشد که شامل $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است و $T : A \rightarrow B$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد. در این صورت دوسویی یکتای $\Phi : Y_\eta \rightarrow X_\tau$ وجود دارد به طوری که اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$ ، آنگاه به ازای هر $f \in A$ ؛ $|T(f)(y)| = |f(x)|$.

برهان: اثبات را در چند گام انجام می‌دهیم.

گام ۱. $T(0_X) = 0_Y$ و T حافظ نرم یکنواخت است.

برهان: با توجه به این که $T : A \rightarrow B$ یک نگاشت نرم-جمعی در قدرمطلق است، $0_X \in A$ و $0_Y \in B$ ، داریم

$$\begin{aligned} 2\|T(0_X)\|_Y &= 2\| |T(0_X)| \|_Y = \| |T(0_X)| + |T(0_X)| \|_Y \\ &= \| |0_X| + |0_X| \|_X = 2\| |0_X| \|_X \\ &= 2\|0_X\|_X = 0. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که $\|T(0_X)\|_Y = 0$ و لذا $T(0_X) = 0_Y$.

اگر $f \in A$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_Y &= \| |T(f)| \|_Y = \| |T(f)| + |0_Y| \|_Y = \| |T(f)| + |T(0_X)| \|_Y \\ &= \| |f| + |0_X| \|_X = \| |f| + 0_X \|_X = \| |f| \|_X = \|f\|_X. \end{aligned}$$

بنابراین T حافظ نرم یکنواخت است و اثبات گام ۱ کامل می‌شود.

گام ۲. به ازای هر $y \in Y$ یک تابع f_y در A یافت می‌شود به طوری که $T(f_y) \in \mathcal{F}_y(B)$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$. طبق [1, Lemma 2.1] یک تابع h_y در $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ یافت می‌شود به طوری که

$$h_y(y) = h_y(\eta(y)) = 1 \text{ و به ازای هر } w \in Y \setminus \{y, \eta(y)\} \text{؛ } 0 \leq h_y(w) < 1. \text{ بنابراین}$$

$$\|h_y\|_Y = 1 = |h_y(y)| = |h_y(\eta(y))|.$$

پس $h_y \in \mathcal{F}_y(B)$ پوشا بودن $T: A \rightarrow B$ ایجاب می‌کند تابع $f_y \in A$ وجود دارد به طوری که $h_y = T(f_y)$ بنابراین $T(f_y) \in \mathcal{F}_y(B)$ و اثبات گام ۲ کامل می‌شود.

گام ۳. فرض کنیم $y \in Y$ و B_y اشتراک همه $M(f)$ هایی باشد که $f \in A$ و $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$. در این صورت B_y یک زیرمجموعه ناتهی $-T$ پایای X است که در (X, d) فشرده است.

برهان: طبق گام ۲، تابع $f_y \in A$ یافت می‌شود به طوری که $T(f_y) \in \mathcal{F}_y(B)$. از این که به ازای هر $f \in A$ ؛ $M(f)$ یک مجموعه فشرده ناتهی است و X با متریک توپولوژی یک فضای فشرده است، برای اثبات ناتهی بودن B_y از خاصیت اشتراک متناهی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $f_1, \dots, f_n \in A$ به طوری که $T(f_1), \dots, T(f_n) \in \mathcal{F}_y(B)$ قرار می‌دهیم $h = \prod_{j=1}^n T(f_j)$ واضح است که $h \in B$ به علاوه، داریم

$$\|h\|_Y \geq |h(y)| = \prod_{j=1}^n |T(f_j)(y)| = \prod_{j=1}^n \|T(f_j)\|_Y \geq \left\| \prod_{j=1}^n T(f_j) \right\|_Y = \|h\|_Y.$$

این ایجاب می‌کند $\|h\|_Y = |h(y)|$. از طرف دیگر،

$$|h(y)| = \left| \prod_{j=1}^n T(f_j) \right| = \prod_{j=1}^n |T(f_j)| = 1.$$

بنابراین $h \in \mathcal{F}_y(B)$ پوشایی $T: A \rightarrow B$ ایجاب می‌کند تابع $f \in A$ وجود دارد به طوری که $h = T(f)$. با توجه به گام ۱، T حافظ نرم یکنواخت است. بنابراین

$$\|f\|_X = \|T(f)\|_Y = \|h\|_Y = 1.$$

این ایجاب می‌کند $x \in X$ یافت می‌شود به طوری که $|f(x)| = 1$. ادعا می‌کنیم $x \in \bigcap_{j=1}^n M(f_j)$ در غیر این صورت $l \in \{1, \dots, n\}$ وجود دارد به طوری که $x \notin M(f_l)$ که ایجاب می‌کند $\|f_l\|_X = 1 < |f_l(x)|$. پیوستگی f_l در x ایجاب می‌کند که یک مجموعه باز V در (X, d) وجود دارد به طوری که $x \in V$ و به ازای هر $z \in V$ ؛ $|f_l(z)| < 1$. قرار می‌دهیم $U = V \cup \tau(V)$. در این صورت $x \in U$ ، یک مجموعه $-T$ پایای باز در فضای متریک (X, d) است و به ازای هر $z \in U$ ؛ $|f_l(z)| < 1$. با توجه به لم ۱، ۲، تابع $g_x \in A$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $z \in X$ ؛ $0 \leq g_x(z) \leq 1$ و $g_x(x) = g_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $z \in X \setminus U$ ؛ $g_x(z) = 0$. اگر $z \in U$ آنگاه

$$|g_x(z)| + |f_l(z)| < |g_x(z)| + 1 \leq 1 + 1 = 2.$$

اگر $z \in X \setminus U$ آنگاه

$$|g_x(z)| + |f_l(z)| = 0 + |f_l(z)| < 1 + |f_l(z)| \leq 1 + \|f_l\|_X = 1 + 1 = 2.$$

پس به ازای هر $z \in X$ ؛ $|g_x(z)| + |f_l(z)| < 2$. با توجه به پیوستگی تابع حقیقی مقدار $|g_x| + |f_l|$ بر X و فشردگی X در (X, d) نتیجه می‌شود $\| |g_x| + |f_l| \|_X < 2$. بنابراین با توجه به این که T نرم-جمعی در قدرمطلق است، داریم

$$\| |T(g_x)| + |T(f_l)| \|_Y < 2.$$

از طرف دیگر، به ازای هر $w \in Y$ داریم

$$\begin{aligned} |T(g_x)(w)| + |T(f)(w)| &= |T(g_x)(w)| + |h(w)| \\ &= |T(g_x)(w)| + \left| \prod_{j=1}^n T(f_j)(w) \right| \\ &= |T(g_x)(w)| + |T(f_l)(w)| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n |T(f_j)(w)| \\ &\leq \|T(g_x)\|_Y + |T(f_l)(w)| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \|T(f_j)\|_Y \\ &= \|g_x\|_X + |T(f_l)(w)| \\ &= 1 + |T(f_l)(w)| \\ &< 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به پیوستگی تابع حقیقی-مقدار $|T(g_x)| + |T(f)|$ بر Y و فشردگی Y در (Y, ρ) نتیجه می‌شود

$$\| |T(g_x)| + |T(f)| \|_Y < 2. \quad (۲,۲)$$

از طرف دیگر، با توجه به نرم-جمعی در قدرمطلق بودن T ، داریم

$$2 = |1 + 1| = \| |g_x(x)| + |f(x)| \| \leq \| |g_x| + |f| \|_X = \| |T(g_x)| + |T(f)| \|.$$

این با (۲,۲) تناقض دارد. بنابراین ادعای ما برقرار است. پس $x \in \bigcap_{j=1}^n M(f_j) \neq \emptyset$ و بنابراین خانواده $\{M(f): f \in A; T(f) \in \mathcal{F}_Y(B)\}$ خاصیت اشتراک متناهی دارد. پس B_Y ناتهی است. از این‌که به ازای هر $f \in A$ یک زیرمجموعه τ -پایای X است که در فضای متریک (X, d) بسته است، نتیجه می‌گیریم B_Y یک زیرمجموعه τ -پایای X است که در (X, d) بسته است. فشردگی X در (X, d) ایجاب می‌کند B_Y در (X, d) فشرده است و اثبات گام ۳ کامل می‌شود.

گام ۴. فرض کنیم $x \in X$ و A_x اشتراک همه $M(T(f))$ هایی باشد که $f \in \mathcal{F}_X(A)$ در این صورت A_x یک زیرمجموعه ناتهی η -پایای Y است که در (Y, ρ) فشرده است.

برهان: با توجه به این‌که به ازای هر $f \in A$ ؛ $M(T(f))$ یک مجموعه ناتهی فشرده در فضای متریک (Y, ρ) است، برای اثبات ناتهی بودن A_x از خاصیت اشتراک متناهی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_X(A)$ ثابت می‌کنیم $\bigcap_{j=1}^n M(T(f_j)) \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم $f = \prod_{j=1}^n f_j$ در این صورت $f \in A$ و به آسانی دیده می‌شود که $f \in \mathcal{F}_X(A)$ این ایجاب می‌کند که $\|f\|_X = 1$. با توجه به این‌که $T(f) \in B$ ، نتیجه می‌شود $\gamma \in B$ وجود دارد به طوری که $|T(f)(\gamma)| = \|T(f)\|_Y$. چون T حافظ نرم یکنواخت است، داریم $\|T(f)\|_Y = \|f\|_X$. پس

$|T(f)(y)| = 1$. ادعا می‌کنیم به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$: $y \in M(T(f_j))$. فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت

$\{1, \dots, n\}$ می‌یافت می‌شود به طوری که $y \notin M(T(f_l))$. بنابراین

$$|T(f_l)(y)| < \|T(f)\|_Y = \|f\|_X = 1.$$

چون $|T(f_l)(\eta(y))| = |T(f_l)(y)|$ ، با توجه به پیوستگی $T(f_l)$ در نقاط $\eta(y)$ و y نتیجه می‌گیریم یک مجموعه

τ -پایای باز در فضای متریک (Y, ρ) مانند V یافت می‌شود به طوری که $y \in V$ و به ازای هر $w \in V$

$$|T(f_l)(w)| < 1.$$

با توجه به لم ۱، ۲، تابع $k \in \text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ وجود دارد به طوری که $k(y) = k(\eta(y)) = 1$ ، به ازای هر $w \in V$ ؛

$0 \leq k(w) \leq 1$ و به ازای هر $w \in Y \setminus V$ ؛ $k(w) = 0$. واضح است که $k \in B$. پوشا بودن نگاشت T از A به B

ایجاب می‌کند تابع $g \in A$ وجود دارد به طوری که $T(g) = k$. اگر $w \in V$ ، آنگاه

$$|T(f_l)(w)| + |T(g)(w)| = |T(f_l)(w)| + |k(w)| < 1 + |k(w)| \leq 1 + 1 = 2.$$

اگر $w \in Y \setminus V$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} |T(f_l)(w)| + |T(g)(w)| &= |T(f_l)(w)| + |k| = |T(f_l)(w)| + 0 \\ &< \|T(f_l)\|_Y + 1 = \|f_l\|_X + 1 = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

پس به ازای هر $w \in Y$ ؛ $|T(f_l)(w)| + |T(g)(w)| < 2$. بنابراین با توجه به فشردگی Y در (Y, ρ) و پیوستگی

تابع حقیقی-مقدار $|T(f_l)| + |T(g)|$ بر Y نتیجه می‌گیریم $\| |T(f_l)| + |T(g)| \|_Y < 2$. این ایجاب می‌کند که

$$\| |f_l| + |g| \|_X < 2, \quad (۲,۳)$$

زیرا T یک نگاشت نرم-جمعی در قدرمطلق است. با توجه به این که به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$ ؛ $\|f_j\|_X = 1$ ، به آسانی

می‌توان نشان داد که به ازای هر $z \in X$ ؛ $|f(z)| \leq |f_l(z)|$. این ایجاب می‌کند که به ازای هر $z \in X$

$$|f(z)| + |g(z)| \leq |f_l(z)| + |g(z)| \leq \| |f_l| + |g| \|_X.$$

بنابراین با توجه به (۲،۳) نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $z \in X$

$$|f(z)| + |g(z)| < 2.$$

این ایجاب می‌کند

$$\| |f| + |g| \|_X < 2, \quad (۲,۴)$$

زیرا X در (X, d) فشرده است و $|f| + |g|$ یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته بر X است. با توجه به (۲،۴) و نرم-جمعی

در قدرمطلق بودن T ، نتیجه می‌گیریم

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y < 2. \quad (۲,۵)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \| |T(f)| + |T(g)| \|_Y &\geq |T(f)(y)| + |T(g)(y)| = 1 + |k(y)| \\ &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

که با (۲،۵) تناقض دارد. پس ادعای ما برقرار است. بنابراین $\bigcap_{j=1}^n M(T(f_j))$ ناتهی است. با توجه به خاصیت اشتراک

متناهی نتیجه می‌گیریم که A_X ناتهی است. از این که به ازای هر $h \in B$ ؛ $M(h)$ یک زیرمجموعه η -پایای Y است که

در (Y, ρ) بسته است، نتیجه می‌گیریم A_x یک زیرمجموعه η -پایای Y است که در (Y, ρ) بسته است. فشردگی Y در (Y, ρ) ایجاب می‌کند A_x در (Y, ρ) فشرده است. بنابراین اثبات گام ۴ کامل می‌شود.

گام ۵. اگر $x \in X$ و $w \in A_x$ ، آنگاه $T(\mathcal{F}_x(A)) \subseteq \mathcal{F}_w(B)$

برهان: فرض کنیم $x \in X$ و $w \in A_x$. برای اثبات حکم، فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_x(A)$. از این که $w \in A_x$ نتیجه می‌شود $w \in M(T(f))$. بنابراین $\|T(f)\|_Y = \|f\|_X = 1$ ، زیرا T حافظ نرم یکنواخت است. پس $T(f) \in \mathcal{F}_w(B)$ بنابراین اثبات گام ۵ کامل می‌شود.

گام ۶. اگر $y \in Y$ و $x \in B_y$ ، آنگاه $T^{-1}(\mathcal{F}_y(B)) \subseteq \mathcal{F}_x(A)$

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in B_y$. برای اثبات حکم، فرض کنیم $f \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$. در این صورت $f \in A$ و $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$ بنابراین $\|T(f)\|_Y = |T(f)(y)| = 1$ و $\|f\|_X = |f(x)| = 1$ زیرا $x \in B_y$. پس $f \in \mathcal{F}_x(A)$ و لذا گام ۶ برقرار است.

گام ۷. اگر $y \in Y$ و $x \in B_y$ ، آنگاه $T(\mathcal{F}_x(A)) \subseteq \mathcal{F}_y(B)$

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in B_y$. همچنین فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_x(A)$. گام ۴ ایجاب می‌کند A_x ناتهی است. فرض کنیم $w \in A_x$. در این صورت $w \in Y$ و طبق گام ۵، $T(f) \in \mathcal{F}_w(B)$. ادعا می‌کنیم $w \in \mathcal{W}_\eta = \mathcal{Y}_\eta$. در غیر این صورت، واضح است که $w \in \mathcal{W}_\eta \cap \mathcal{Y}_\eta = \emptyset$. فشردگی \mathcal{W}_η و \mathcal{Y}_η در فضای متریک فشرده (Y, ρ) ایجاب می‌کنند که مجموعه‌های باز و η -پایای W و V در فضای متریک (Y, ρ) یافت می‌شوند به طوری که $\mathcal{W}_\eta \subseteq W$ و $\mathcal{Y}_\eta \subseteq V$ و $W \cap V = \emptyset$. طبق لم ۱، ۲، تابع $k \in \text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $v \in Y$ ؛ $0 \leq k(v) \leq 1$. $k(y) = k(\eta(y)) = 1$ و به ازای هر $v \in Y \setminus V$ ؛ $k(v) = 0$. پس با توجه به این که $w \in Y \setminus V$ نتیجه می‌گیریم $k(w) = 0$. واضح است که $k \in \mathcal{F}_y(B)$. پوشایی $T: A \rightarrow B$ ایجاب می‌کند که تابع $g \in A$ وجود دارد به طوری که $T(g) = k$ پس $T(g) \in \mathcal{F}_y(B)$ و لذا $g \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$. گام ۶ ایجاب می‌کند $g \in \mathcal{F}_x(A)$. با توجه به این که $w \in A_x$ ، گام ۵ ایجاب می‌کند $T(g) \in \mathcal{F}_w(B)$ بنابراین $\|T(g)\|_Y = |T(g)(w)| = 1$ چون $w \in W$ و $W \cap V = \emptyset$ نتیجه می‌شود $w \in Y \setminus V$. بنابراین $T(g)(w) = k(w) = 0$ که با $|T(g)(w)| = 1$ تناقض دارد. پس ادعای ما برقرار است، یعنی $w \in \mathcal{W}_\eta = \mathcal{Y}_\eta$. بنابراین $T(\mathcal{F}_x(A)) \subseteq \mathcal{F}_y(B)$. پس **گام ۷** برقرار است.

گام ۸. اگر $y \in Y$ و $x \in B_y$ ، آنگاه $B_y = \{x, \tau(x)\}$

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in B_y$. با توجه τ -پایا بودن B_y ، نتیجه می‌گیریم $\tau(x) \in B_y$. بنابراین

$$x_\tau = \{x, \tau(x)\} \subseteq B_y. \quad (۲,۶)$$

فرض کنیم $z \in B_y \setminus \{x, \tau(x)\}$ در این صورت $z \in B_y$ و $z_\tau \cap x_\tau = \emptyset$ بنابراین یک زیرمجموعه τ -پایای U از X یافت می‌شود که در (X, d) باز است، $x_\tau \subseteq U$ و $z_\tau \subseteq X \setminus U$. با توجه به لم ۱، ۲، تابع $f_x \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ یافت

می‌شود به طوری که به ازای هر $u \in X$ ؛ $0 \leq f_x(u) \leq 1$ ، $f_x(x) = f_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $u \in X \setminus U$ ؛ $f_x(u) = 0$ واضح است که $f_x \in \mathcal{F}_x(A)$. با توجه به این که $x \in B_y$ ، گام ۷ ایجاب می‌کند $T(f_x) \in \mathcal{F}_y(B)$. بنابراین $f_x \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$ حال با توجه به گام ۶ نتیجه می‌گیریم $f_x \in \mathcal{F}_z(A)$ زیرا $z \in B_y$. بنابراین $|f_x(z)| = 1$ و لذا $z \notin X \setminus U$ که با $z \in X \setminus U$ تناقض دارد. پس

$$B_y \setminus \{x, \tau(x)\} = \emptyset. \quad (۲,۷)$$

با توجه به (۲,۶) و (۲,۷) نتیجه می‌گیریم $B_y = \{x, \tau(x)\}$ و اثبات گام ۸ کامل می‌شود. گام ۸ به ما این اجازه را می‌دهد که نگاشت $\Phi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ را به صورت $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ تعریف کنیم که در آن $y \in Y$ و $x \in B_y$.

گام ۹. نگاشت $\Phi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ تعریف شده به صورت $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ که در آن $y \in Y$ و $x \in B_y$ ، دوسویی است. **برهان.** ابتدا نشان می‌دهیم Φ یک به یک است. فرض کنیم $w, y \in Y$ به طوری که $\Phi(y_\eta) = \Phi(w_\eta)$. فرض کنیم $h \in \mathcal{F}_y(B)$ از این که $T: A \rightarrow B$ پوشا است، تابع $f \in A$ یافت می‌شود به طوری که $T(f) = h$. این ایجاب می‌کند که $f \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$ فرض کنیم $x \in X$ به طوری که $\Phi(y_\eta) = x_\tau$. طبق تعریف Φ ، $x \in B_y$ بنابراین با توجه به گام ۶ نتیجه می‌گیریم $f \in \mathcal{F}_x(A)$ از این که $x_\tau = \Phi(w_\eta)$ نتیجه می‌گیریم $x \in B_w$. حال با توجه به این که $f \in \mathcal{F}_x(A)$ ، گام ۷ ایجاب می‌کند $T(f) \in \mathcal{F}_w(B)$. پس $h \in \mathcal{F}_w(B)$ بنابراین $\mathcal{F}_y(B) \subseteq \mathcal{F}_w(B)$. اینک با توجه به لم ۲,۴ نتیجه می‌گیریم $w_\eta = y_\eta$. پس Φ یک به یک است.

حال نشان می‌دهیم Φ پوشا است. فرض کنیم $x \in X$. طبق گام ۴، A_x ناتهی است. فرض کنیم $y \in A_x$ و $\Phi(y_\eta) = z_\tau$ که $z \in X$ در این صورت $z \in B_y$. فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_x(A)$ با توجه به این که $y \in A_x$ ، گام ۵ ایجاب می‌کند $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$ و لذا $f \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$ بنابراین از این که $y \in Y$ و $z \in B_y$ ، طبق گام ۶ داریم $f \in \mathcal{F}_z(A)$ پس $\mathcal{F}_x(A) \subseteq \mathcal{F}_z(A)$ و لذا طبق لم ۲,۴ داریم $x_\tau = z_\tau$ بنابراین $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ و لذا Φ پوشا است. پس گام ۹ برقرار است.

گام ۱۰. فرض کنیم $y \in Y$ ، $x \in \Phi(y_\eta)$ و $r > 0$ و $f \in A$. در این صورت $f \in r\mathcal{F}_x(A)$ فقط و فقط وقتی که $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $f \in r\mathcal{F}_x(A)$ در این صورت تابع $g \in \mathcal{F}_x(A)$ یافت می‌شود به طوری که $f = rg$. از این که $x \in \Phi(y_\eta)$ ، طبق گام ۶ نتیجه می‌شود $B_y = x_\tau$ و لذا $x \in B_y$. پس طبق گام ۷ داریم $T(g) \in \mathcal{F}_y(B)$ و $T(f) = rT(g)$ بنابراین $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$ پس $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$ و لذا $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$ همگن بودن T ایجاب می‌کند $T(rg) = rT(g)$ بنابراین $T(f) = rT(g)$ پس $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$ و لذا لزوم برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$ بنابراین تابع $k \in \mathcal{F}_y(B)$ یافت می‌شود به طوری که $T(f) = rk$. قرار می‌دهیم $f_r = \frac{1}{r}f$ در این صورت $f_r \in A$ و با توجه به $-\mathbb{R}^+$ همگن بودن T داریم

$$T(f_r) = T\left(\frac{1}{r}f\right) = \frac{1}{r}T(f) = \frac{1}{r}rk = k,$$

که ایجاب می‌کند $T(f_r) \in \mathcal{F}_y(B)$ به علاوه، داریم

$$\|f_r\|_X = \frac{1}{r} \|f\|_X = \frac{1}{r} \|T(f)\|_Y = \frac{1}{r} \|rk\|_Y = \|k\|_Y = 1.$$

ادعا می‌کنیم $|f_r(x)| = 1$ فرض کنیم چنین نباشد در این صورت $|f_r(x)| < 1$ زیرا $|f_r(x)| \leq \|f_r\|_X = 1$. با توجه به $|f_r(\tau(x))| = |f_r(x)|$ و پیوستگی f_r در x و $\tau(x)$ نتیجه می‌گیریم یک مجموعه τ -پایای باز در (X, d) مانند U یافت می‌شود به طوری که $x \in U$ و به ازای هر $z \in U$ ، $|f_r(z)| < 1$. با توجه به لم ۱، ۲، تابع g_x در $\text{Lip}(X, d, \tau)$ یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $z \in X$ ، $0 \leq g_x(z) \leq 1$ ، $g_x(x) = g_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $z \in X \setminus U$ ، $g_x(z) = 0$. واضح است که $g_x \in \mathcal{F}_x(A)$ چون $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ لذا $x \in \Phi(y_\eta)$ و در نتیجه $x \in B_y$ بنابراین گام ۷ ایجاب می‌کند $T(g_x) \in \mathcal{F}_y(B)$ اگر $z \in U$ آنگاه

$$|f_r(z)| + |g_x(z)| < 1 + |g_x(z)| \leq 1 + 1 = 2.$$

اگر $z \in X \setminus U$ آنگاه

$$|f_r(z)| + |g_x(z)| = |f_r(z)| + 0 \leq \|f_r\|_X = 1 < 2.$$

پس به ازای هر $z \in X$ ، $|f_r(z)| + |g_x(z)| < 2$. بنابراین با توجه به پیوستگی تابع حقیقی-مقدار $|f_r| + |g_x|$ بر X و فشردگی X در (X, d) داریم

$$\| |f_r| + |g_x| \|_X < 2. \quad (۲,۸)$$

از این که T یک نگاشت نرم-جمعی در قدرمطلق است، نتیجه می‌گیریم

$$\| |T(f_r)| + |T(g_x)| \|_Y = \| |f_r| + |g_x| \|_X. \quad (۲,۹)$$

از (۲,۸) و (۲,۹) نتیجه می‌شود

$$\| |T(f_r)| + |T(g_x)| \|_Y < 2. \quad (۲,۱۰)$$

چون $y \in Y$ و $T(f_r), T(g_x) \in \mathcal{F}_y(B)$ لذا داریم

$$\| |T(f_r)| + |T(g_x)| \|_Y \geq |T(f_r)(y)| + |T(g_x)(y)| = 1 + 1 = 2,$$

که با (۲,۱۰) تناقض دارد. پس ادعای ما برقرار است. بنابراین $f_r \in \mathcal{F}_x(A)$ و لذا $f \in r\mathcal{F}_x(A)$. پس کفایت برقرار است و اثبات گام ۱۰ کامل می‌شود.

گام ۱۱. اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$ آنگاه به ازای هر $f \in A$ ، $|T(f)(y)| = |f(x)|$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$ اگر $f = 0_X$ ، آنگاه طبق گام ۱ داریم $T(f) = 0_Y$ و لذا

$$|T(f)(y)| = |0_Y(y)| = |0| = |0_X(x)| = |f(x)|.$$

فرض کنیم تابع $f \in A \setminus \{0_X\}$ یافت شود به طوری که $|T(f)(y)| \neq |f(x)|$ (فرض خلف). در این صورت یا

$$|T(f)(y)| < |f(x)| \quad \text{یا} \quad |f(x)| < |T(f)(y)|$$

ابتدا فرض می‌کنیم $|f(x)| < |T(f)(y)|$. با توجه به این که $f \in A \setminus \{0_X\}$ ، طبق لم ۵، ۲ داریم

$$|f(x)| + \|f\|_X = \inf \{ \| |f| + |g| \|_X : g \in \|f\|_X \mathcal{F}_x(A) \}. \quad (۲,۱۱)$$

چون $\|f(x)\| + \|f\|_X < |T(f)(y)| + \|f\|_X$ ، لذا با توجه به (۲،۱۱) تابع $g \in \|f\|_X \mathcal{F}_X(A)$ یافت می‌شود به طوری که

$$\| |f| + |g| \|_X < |T(f)(y)| + \|f\|_X. \quad (۲،۱۲)$$

از این که T نرم-جمعی در قدرمطلق است و $f, g \in A$ داریم

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y = \| |f| + |g| \|_X. \quad (۲،۱۳)$$

از (۲،۱۲) و (۲،۱۳) نتیجه می‌شود

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y < |T(f)(y)| + \|f\|_X. \quad (۲،۱۴)$$

با توجه به $g \in \|f\|_X \mathcal{F}_X(A)$ و گام ۱۰ برای $r = \|f\|_X$ ، نتیجه می‌گیریم $T(g) \in \|f\|_X \mathcal{F}_Y(B)$ این ایجاب می‌کند $|T(g)(y)| = \|f\|_X$ پس

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y \geq |T(f)(y)| + |T(g)(y)| = |T(f)(y)| + \|f\|_X,$$

که با (۲،۱۴) تناقض دارد.

حال فرض می‌کنیم $|T(f)(y)| < |f(x)|$ چون T حافظ نرم یکنواخت است و $f \in A \setminus \{0_X\}$ ، لذا داریم

$$\|Tf\|_Y = \|f\|_X > 0.$$

این ایجاب می‌کند $T(f) \in B \setminus \{0_Y\}$ بنابراین با توجه به لم ۵،۲ داریم

$$|T(f)(y)| + \|T(f)\|_Y = \inf \{ \| |T(f)| + |k| \|_Y : k \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_Y(B) \}. \quad (۲،۱۵)$$

چون $|T(f)(y)| + \|T(f)\|_Y < |f(x)| + \|T(f)\|_Y$ ، باتوجه به (۲،۱۵) تابع $k \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_Y(B)$ یافت می‌شود به طوری که

$$\| |T(f)(y)| + |k| \|_Y < |f(x)| + \|T(f)\|_Y. \quad (۲،۱۶)$$

پوشا بودن $T: A \rightarrow B$ و $k \in B$ ایجاب می‌کنند تابع $g \in A$ یافت می‌شود به طوری که $k = T(g)$ با توجه به این که $g \in A$ ، $y \in Y$ ، $x \in \Phi(y_\eta)$ و $T(g) \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_Y(B)$ ، گام ۱۰ ایجاب می‌کند $g \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_X(A)$ پس با توجه به $\|T(f)\|_Y = \|f\|_X$ داریم $g \in \|f\|_X \mathcal{F}_X(A)$ این ایجاب می‌کند تابع $g_x \in \mathcal{F}_X(A)$ یافت می‌شود به طوری که $g = \|f\|_X g_x$ پس داریم $\|g\|_X = \|f\|_X$ و $|g(x)| = \|f\|_X$ بنابراین با توجه به نرم-جمعی بودن T ، $k = T(g)$ و (۲،۱۶) داریم

$$\begin{aligned} \| |f| + |g| \|_X &= \| |T(f)| + |k| \|_Y = \| |T(f)| + |T(g)| \|_Y < |f(x)| + \|T(f)\|_Y \\ &= |f(x)| + \|f\|_X = |f(x)| + |g(x)| \leq \| |f| + |g| \|_X, \end{aligned}$$

که غیر ممکن است. بنابراین به ازای هر $f \in A$ داریم $|T(f)(y)| = |f(x)|$ و اثبات گام ۱۱ کامل می‌شود.

$$\text{گام } ۱۲. |T(1_X)| = 1_Y.$$

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ در این صورت $y_\eta \in Y_\eta$ قرار می‌دهیم $x_\tau = \Phi(y_\eta)$ که $x \in X$ پس $x \in \Phi(y_\eta)$ و

لذا طبق گام ۱۱ داریم

$$|T(1_X)(y)| = |1_X(x)| = |1| = 1.$$

بنابراین $|T(1_X)(y)| = 1_Y(y)$ چون تساوی اخیر به ازای هر $y \in Y$ برقرار است، لذا $|T(1_X)| = 1_Y$. بنابراین گام ۱۲ برقرار است.

گام ۱۳. فرض کنیم $\Psi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ یک نگاشت دوسویی باشد به طوری که به ازای هر $f \in A$ ، $y \in Y$ و $x \in \Psi(y_\eta)$ داشته باشیم $|T(f)(y)| = |f(x)|$. در این صورت $\Psi = \Phi$ بر Y_η برهان: فرض کنیم $y \in Y$. قرار می‌دهیم $x_\tau = \Psi(y_\eta)$ که $x \in X$ چون $y \in Y$ ، فرض کنیم $f \in A$ به طوری که $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$ توجه داریم که طبق گام ۲ تابع f واجد خاصیت مذکور وجود دارد. در این صورت

$$\|T(f)\|_Y = |T(f)(y)| = 1. \quad (۲,۱۷)$$

از این که $y \in Y$ ، $x \in \Psi(y_\eta)$ و $f \in A$ ، طبق فرض داریم

$$|T(f)(y)| = |f(x)|. \quad (۲,۱۸)$$

با توجه به گام ۱، T حافظ نرم یکنواخت است. بنابراین

$$\|T(f)\|_Y = \|f\|_X. \quad (۲,۱۹)$$

با توجه به (۲,۱۷)، (۲,۱۸) و (۲,۱۹) نتیجه می‌گیریم $\|f\|_X = |f(x)|$. بنابراین $x \in M(f)$. پس نشان داده‌ایم x به اشتراک همه $M(f)$ ‌هایی تعلق دارد که $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$ ، تعریف B_y ایجاب می‌کند $x \in B_y$. حال با توجه به گام ۸ داریم $B_y = x_\tau$. بنابراین با توجه به تعریف Φ داریم $\Phi(y_\eta) = x_\tau$. از $x \in \Psi(y_\eta)$ و دوسویی بودن Ψ نتیجه می‌شود $\Psi(y_\eta) = x_\tau$ پس $\Psi(y_\eta) = \Phi(y_\eta)$. با توجه به این که تساوی اخیر به ازای هر $y \in Y$ برقرار است، نتیجه می‌شود $\Psi = \Phi$ بر Y_η بنابراین گام ۱۳ برقرار است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

اینک با استفاده از قضیه ۶,۲ ساختار نگاشت‌های پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق بین جبرهای حقیقی لیبشیتس بر فضای متریک فشرده را تعیین می‌کنیم و نشان می‌دهیم این نگاشت‌ها عملگرهای ترکیبی موزون در قدرمطلق هستند.

قضیه ۷,۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده باشند و $T: \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d) \rightarrow \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد. در این صورت $|T(1_X)| = 1_Y$ و یک همسانریختی لیبشیتس φ از (Y, ρ) به (X, d) یافت می‌شود به طوری که به ازای هر $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ و $y \in Y$:

$$|T(f)(y)| = |f(\varphi)(y)|.$$

برهان: فرض کنیم $\tau: X \rightarrow X$ خودنگاشت همانی بر X و $\eta: Y \rightarrow Y$ خودنگاشت همانی بر Y باشند. در این صورت τ یک برگشت لیبشیتس بر (X, d) است، $\text{Lip}(X, d, \tau) = \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ ، η یک برگشت لیبشیتس بر (Y, ρ) است و $\text{Lip}(Y, \rho, \eta) = \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$. پس T یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق از $\text{Lip}(X, d, \tau)$ به $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است. قضیه ۶,۲ ایجاب می‌کند $|T(1_X)| = 1_Y$ و دوسویی یکتای $\Phi: Y_\eta \rightarrow X_\tau$ یافت می‌شود به طوری که اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$ آنگاه به ازای هر $f \in \text{Lip}(X, d, \tau)$ ، $|T(f)(y)| = |f(x)|$ همانی بودن خودنگاشت τ بر X ایجاب می‌کند اگر $y \in Y$ و $x_\tau = \Phi(y_\eta)$ که $x \in X$ آنگاه داریم

$$\Phi(y_\eta) = \{x, \tau(x)\} = \{x\}.$$

حال نگاشت φ از Y به X را به صورت $\varphi(y) = x$ تعریف می‌کنیم که در آن $y \in Y$ و x تنها عضو $\Phi(y_\eta)$ است. بنابراین به ازای هر $y \in Y$ و هر $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ داریم

$$|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|.$$

اینک ثابت می‌کنیم که φ به یک به یک است. فرض کنیم $w, y \in Y$ به طوری که $\varphi(w) = \varphi(y)$. در این صورت داریم $\{\varphi(y)\} = \{\varphi(w)\}$. بنابراین با توجه به تعریف φ داریم $\Phi(y_\eta) = \Phi(w_\eta)$. این ایجاب می‌کند $w_\eta = y_\eta$ زیرا Φ یک به یک است. پس $\{y\} = \{w\}$ ، زیرا η تابع همانی بر Y است. بنابراین $y = w$ و لذا φ یک به یک است. برای اثبات پوشا بودن φ ، فرض کنیم $x \in X$ در این صورت $x_\tau \in X_\tau$ ، پوشا بودن $\Phi : Y_\eta \rightarrow X_\tau$ ایجاب می‌کند $y \in Y$ یافت می‌شود به طوری که $x_\tau = \Phi(y_\eta)$. حال با توجه به همانی بودن τ بر X داریم $\{x\} = \Phi(y_\eta)$. تعریف φ ایجاب می‌کند $x = \varphi(y)$. بنابراین φ پوشا است.

حال نشان می‌دهیم φ یک نگاشت پیوسته از (Y, ρ) به (X, d) است. فرض کنیم $y \in Y$ ، ثابت می‌کنیم φ در y پیوسته است. نگاشت $f_{\varphi(y)} : X \rightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_{\varphi(y)}(z) = d(z, \varphi(y)) \quad (z \in X).$$

به آسانی دیده می‌شود $f_{\varphi(y)} \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ و $f_{\varphi(y)}(\varphi(y)) = 0$ چون $y \in Y$ و $f_{\varphi(y)} \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ ، لذا داریم

$$|T(f_{\varphi(y)})(y)| = |f_{\varphi(y)}(\varphi(y))| = |0| = 0.$$

پس $T(f_{\varphi(y)})(y) = 0$ فرض کنیم $\varepsilon > 0$ انتخاب شده باشد. پیوستگی $T(f_{\varphi(y)})$ در y ایجاب می‌کند عدد حقیقی مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که به ازای هر $w \in Y$ اگر $\rho(w, y) < \delta$ آنگاه

$$|T(f_{\varphi(y)})(w) - T(f_{\varphi(y)})(y)| < \varepsilon.$$

فرض کنیم $w \in Y$ به طوری که $\rho(w, y) < \delta$ در این صورت

$$|T(f_{\varphi(y)})(w) - T(f_{\varphi(y)})(y)| < \varepsilon. \quad (۲,۲۰)$$

از $T(f_{\varphi(y)})(y) = 0$ و (۲,۲۰) نتیجه می‌شود که

$$|T(f_{\varphi(y)})(w)| < \varepsilon. \quad (۲,۲۱)$$

از طرف دیگر، داریم

$$|T(f_{\varphi(y)})(w)| = |f_{\varphi(y)}(\varphi(w))|. \quad (۲,۲۲)$$

از (۲,۲۲) و (۲,۲۱) نتیجه می‌شود $|f_{\varphi(y)}(\varphi(w))| < \varepsilon$ و لذا

$$d(\varphi(w), \varphi(y)) = |d(\varphi(w), \varphi(y))| = |f_{\varphi(y)}(\varphi(w))| < \varepsilon.$$

پس φ در y پیوسته است. چون $y \in Y$ دلخواه فرض شده بود، لذا φ یک نگاشت پیوسته از (Y, ρ) به (X, d) است.

از این که (Y, ρ) یک فضای متریک فشرده است و $\varphi: Y \rightarrow X$ یک نگاشت دوسویی است که از (Y, ρ) به (X, d) پیوسته است، نتیجه می‌شود که $\varphi^{-1}: X \rightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته از (X, d) به (Y, ρ) است.

اینک نشان می‌دهیم $\varphi: Y \rightarrow X$ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است. فرض کنیم چنین نباشد. طبق [4, Lemma 2.3]، دنباله‌های $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ در Y ، عضوی از Y مانند y و تابع $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ یافت می‌شوند به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $y_n \neq w_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = y$ در فضای متریک (Y, ρ) و به ازای

$$f(\varphi(y_n)) = d(\varphi(y_n), \varphi(w_n)), f(\varphi(w_n)) = 0, n \in \mathbb{N}$$

$$n < \frac{d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))}{\rho(y_n, w_n)}.$$

بنابراین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(Y, \rho)}(T(f)) &\geq \frac{|T(f)(y_n) - T(f)(w_n)|}{\rho(y_n, w_n)} \\ &\geq \frac{|T(f)(y_n)| - |T(f)(w_n)|}{\rho(y_n, w_n)} \\ &= \frac{|f(\varphi(y_n))| - |f(\varphi(w_n))|}{\rho(y_n, w_n)} \\ &= \frac{|d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))| - |0|}{\rho(y_n, w_n)} \\ &= \frac{d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))}{\rho(y_n, w_n)} \\ &> n. \end{aligned}$$

این با $T(f) \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ تناقض دارد. پس φ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است.

حال نشان می‌دهیم $\varphi^{-1}: X \rightarrow Y$ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است. فرض کنیم چنین نباشد. طبق [4, Lemma 2.3]، دنباله‌های $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X ، عضوی از X مانند x و تابع $h \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ یافت می‌شوند به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \neq z_n$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, x) = 0$ و

$$h(\varphi^{-1}(z_n)) = 0, h(\varphi^{-1}(x_n)) = \rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n)), n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n))}{d(x_n, z_n)} > n.$$

پوشا بودن نگاشت $T: \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d) \rightarrow \text{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ ایجاب می‌کند تابع $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ یافت می‌شود به طوری

که $T(f) = h$ حال به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\mathcal{L}_{(X, d)}(f) \geq \frac{|f(x_n) - f(z_n)|}{d(x_n, z_n)} \geq \frac{|f(x_n)| - |f(z_n)|}{d(x_n, z_n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|f(\varphi(\varphi^{-1}(x_n)))| - |f(\varphi(\varphi^{-1}(z_n)))|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{|T(f)(\varphi^{-1}(x_n))| - |T(f)(\varphi^{-1}(z_n))|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{|h(\varphi^{-1}(x_n))| - |h(\varphi^{-1}(z_n))|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{|\rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n))| - |0|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{\rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n))}{d(x_n, z_n)} \\
&> n.
\end{aligned}$$

این با $f \in \text{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ تناقض دارد. پس φ^{-1} یک نگاشت لیپشیتس از (X, d) به (Y, ρ) است. بنابراین φ یک همسانریختی لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است و اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۸،۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده باشند، $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) و $\eta: Y \rightarrow Y$ یک برگشت لیپشیتس بر (Y, ρ) باشند. همچنین فرض کنیم A یک زیرجبر حقیقی $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است، B یک زیرجبر حقیقی $C(Y, \rho)$ باشد که شامل $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است و $T: A \rightarrow B$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد. با توجه به قضیه ۶،۲، دوسویی یکتای $\Phi: Y_{\eta} \rightarrow X_{\tau}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in A$ ، $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_{\eta})$ ، $|T(f)(y)| = |f(x)|$. نگاشت Φ واجد خاصیت فوق را نگاشت دوسویی وابسته به T از Y_{η} به X_{τ} می‌نامیم.

اینک با استفاده از قضیه ۶،۲ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

قضیه ۹،۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک بوده، $\tau: X \rightarrow X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) و $\eta: Y \rightarrow Y$ یک برگشت لیپشیتس بر (Y, ρ) باشند، A یک زیرجبر $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\text{Lip}(X, d, \tau)$ است و B یک زیرجبر $C(Y, \rho)$ باشد که شامل $\text{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است. همچنین فرض کنیم $T: A \rightarrow B$ یک نگاشت پوشای \mathbb{R}^+ -همگن نرم-جمعی در قدرمطلق باشد و $\Phi: Y_{\eta} \rightarrow X_{\tau}$ نگاشت دوسویی وابسته به T باشد. به علاوه فرض کنیم به ازای هر $f \in A$ داشته باشیم $T(1_X + f) = 1_Y + T(f)$. اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_{\eta})$ آنگاه به ازای هر $f \in A$ ؛ $T(f)(y) = f(x)$ یا $T(f)(y) = \overline{f(x)}$. بالاخص، اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_{\eta})$ آنگاه به ازای هر تابع حقیقی-مقدار f در $\text{Lip}(X, d, \tau)$ داریم $T(f)(y) = f(x)$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_{\eta})$ طبق قضیه ۶،۲ به ازای هر $g \in A$ داریم

$$|T(g)(y)| = |g(x)|. \quad (۲،۲۳)$$

فرض کنیم $f \in A$. در این صورت $1_X + f \in A$. بنابراین با توجه به (۲،۲۳) برای $g = 1_X + f$ داریم

$$|T(1_X + f)(y)| = |(1_X + f)(x)| = |1 + f(x)|. \quad (۲،۲۴)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض داریم $T(1_X + f) = 1_Y + T(f)$ بنابراین

$$|1 + T(f)(y)| = |(1_Y + T(f))(y)| = |T(1_X + f)(y)|. \quad (۲,۲۵)$$

از (۲,۲۴) و (۲,۲۵) نتیجه می‌شود

$$|1 + T(f)(y)| = |1 + f(x)|. \quad (۲,۲۶)$$

از طرف دیگر با توجه به (۲,۲۳)، برای $g = f$ داریم

$$|T(f)(y)| = |f(x)|. \quad (۲,۲۷)$$

از این که $f(x), T(f)(y) \in \mathbb{C}$ ، با توجه به (۲,۲۶) و (۲,۲۷) به آسانی نتیجه می‌گیریم که $T(f)(y) = f(x)$ یا $T(f)(y) = \overline{f(x)} = f(\tau(x))$. این اثبات را کامل می‌کند.

References

1. D. Alimohammadi and S. Daneshmand, Generalized peripherally multiplicative maps between real Lipschitz algebras with involution, *Khayyam J. Math.*, **7**(1) (2021), 1-31.
2. D. Alimohammadi and A. Ebadian, Hedberg's theorem in real Lipschitz algebras, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32**(10) (2001), 1479-1493.
3. M. Hosseini and J.J Font, Norm-additive in modulus maps between function algebras, *Banach J. Math. Anal.*, **8**(2) (2014), 79-92.
4. A. Jiménez-Vargas and K. Lee, A. Luttman and M. Villegas-Vallecillos, Generalized weak peripheral multiplicativity in algebras of Lipschitz functions, *Cent. Eur. J. Math.*, **11**(7) (2013), 1197-1211.
5. S. H. Kulkarni and B.V. Limaye, Gleason parts of real function algebras, *Canadian J. Math.*, **33** (1981), 181-200.
6. S. H. Kulkarni and B. V. Limaye, *Real Function Algebras*, Marcel Dekker, 1992.
7. D. R. Sherbert, Banach algebras of Lipschitz functions, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1387-1399.
1. 8. T. Toné and R. Yates, Norm-linear and norm-additive operators between uniform algebras, *J. Math. Anal. Appl.*, **357**(1) (2009), 45-53.