

A novel view of p -valent functions defined by q -derivative and Gegenbauer polynomials

Ebrahim Amini⁽¹⁾ ¹ and Vali Soltani Masih⁽¹⁾

⁽¹⁾Department of Mathematics, Payame Noor University, P. O. Box 19395-4697, Tehran, IRAN.

Received: 5 October 2023

Accepted: 26 December 2025

Published online: 12 June 2026

Abstract: In this paper, we define and discuss the properties of various classes of analytic multivalent functions by using Gegenbauer polynomials. We make use of Gegenbauer polynomials to introduce the new differential operator. This operator is based on the convolution Hadamard product. Also, we define a new subclass of p -valent starlike and convex functions of order α by using the q -derivative operator. In addition, we derive families of analytic univalent functions associated with Gegenbauer polynomials and q -derivative operators. Also, we obtain coefficient bounds for the functions in such new subclasses of analytic functions. Moreover, we obtain several corollaries and results for p -valent starlike and convex functions of order α . We establish certain growth and distortion theorems in such new subclasses of analytic functions. Moreover, using the concept of the (q, δ) -neighborhood, we provide several inclusion symmetric relations for certain (q, δ) -neighborhoods of analytic univalent functions with negative coefficients. Various q -inequities are also discussed in more detail.

Keywords: Analytic functions, Neighborhood, Hankel determinant, Gegenbauer polynomials, q -derivative.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (Ebrahim Amini) eb.amini.s@pnu.ac.ir, (Vali Soltani Masih) v_soltani@pnu.ac.ir



دیدگاه نوین به توابع p -ارز مبتنی بر q -مشتق و چندجمله‌ای گگن باوئر

ابراهیم امینی^(۱) و ولی سلطانی مسیح^(۱)

^(۱) گروه ریاضی دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی -۴۶۹۷، ۱۹۳۹۵ تهران ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۳/۲۲

چکیده: در این مقاله رده خاصی از توابع تحلیلی و چند ارز با موضوع q -ستاره گون و q -محدب را با استفاده از چندجمله‌ای‌های گگن باوئر ارائه می‌دهیم. این رده‌ها با استفاده از عملگر q -مشتق تعریف می‌شوند. علاوه بر این، (δ, q) -همسایگی‌های برای این رده توابع p -ارز را تعریف می‌کنیم. هم‌چنین کران ضرایب و رابطه‌ی شمول (δ, q) -همسایگی برای توابع p -ارز با ضرایب منفی، که با عملگر q -مشتق و چندجمله‌ای‌های گگن باوئر تعریف می‌شوند، را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: توابع تحلیلی، همسایگی، دترمینان هانکل، چندجمله‌ای‌های گگن باوئر، عملگر q -مشتق.

رده‌بندی ریاضی: 05A30; 26D15; 30C45

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، حساب q -کسری در نظریه تقریب به کار گرفته شده است که این تعمیم جدیدی از عملگرهای کلاسیک است. این مفهوم کاربردهای گسترده‌ای در بسیاری از زمینه‌ها مانند توابع خاص و فیزیک کوانتومی دارد [۱، ۲]. جکسون اولین کسی بود که عملگر q -مشتق و عملگر q -انتگرال را معرفی و تحلیل کرد [۳، ۴]. پورویت یکی از اولین افرادی بود که با استفاده از عملگر q -مشتق کسری، یک کلاس مشخص از توابع تحلیلی در دیسک واحد را تعمیم داد [۵]. در ادامه، نظریه هندسی توابع در زمینه آنالیز مختلط با استفاده از عملگر q -مشتق توسط سیروستاوا توسعه داده شده است [۶]. از آن به بعد، بسیاری از محققان مفهوم عملگر q -مشتق را در زیر مجموعه‌های

^۱ نویسنده مسئول مقاله

مختلف از توابع تک‌ارز به کار برده‌اند. اسمعیل و هم‌کاران برخی از خواص توابع ستاره‌گون را با استفاده از عملگر q -مشتق به‌دست آورده‌اند [۷]. کاناس و هم‌کاران عملگر متقارن را با استفاده از عملگر q -مشتق در ناحیه مخروطی تحلیل کرده‌اند [۸]. ژانگ و هم‌کاران توابع q -ستاره‌گون مرتبط با دامنه مخروطی تعمیم یافته $\Omega_{k,\alpha}$ را مورد بحث قرار داده‌اند [۹]. آلتین‌تا و هم‌کاران (n, δ) -همسایگی برای توابع تحلیلی با ضرایب منفی را بررسی کرده‌اند [۱۰]. محمد و داروس یک عملگر q -تفاضل تعمیم یافته برای بررسی توابع q -فراهندسی ارائه نموده‌اند [۱۱]. با توجه به اهمیت بسیار زیادی که q -عملگرها دارند، بسیاری از محققان به‌طور جامع این عملگرها را در زمینه‌های مختلف توابع تحلیلی مطالعه کرده‌اند [۱۲-۱۵].

برای $q \in (0, 1)$ ، عملگر q -مشتق تابع f به‌صورت زیر است:

$$D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{z(1-q)}, \quad z \neq 0, \quad q \neq 1. \quad (1.1)$$

توجه کنید که عملگر q -مشتق همگرا به مشتق معمولی به‌صورت زیر است:

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q f(z) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} = f'(z).$$

تعریف ۱.۱. [۱۷] فرض کنید $q \in (0, 1)$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد. q -عدد را با $[n]_q$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

توجه کنید در حالتی که $q \rightarrow 1^-$ خواهیم داشت $[n]_q \rightarrow n$.

فرض کنید $p \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{A}_p$ شامل توابع p -ارز تحلیلی f باشد که روی دیسک باز یکه‌ی $D = \{z : |z| < 1\}$ تعریف می‌شوند و دارای نمایش سری به شکل $f(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} z^{k+p}$ هستند. در حالت خاص اگر $p = 1$ داریم $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. اگر تابع $f \in \mathcal{A}$ یک‌به‌یک باشد، به آن تک‌ارز گفته می‌شود. رده توابع تک‌ارز را با S نمایش می‌دهیم. این رده توسط گراهام و کوهر بررسی شده است [۱۸].

هم‌چنین، فرض کنید $p \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{U}_p$ مجموعه توابع p -ارز و تحلیلی روی دیسک باز یکه‌ی D در صفحه مختلط با نمایش سری زیر باشند:

$$f(z) = z^p - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} z^{k+p}, \quad a_{k+p} \geq 0, \quad z \in D. \quad (2.1)$$

با توجه به تعریف عملگر q -مشتق، اگر تابع f با رابطه (۲.۱) نمایش داده شده باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$D_q f(z) = [p]_q z^{p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q a_{k+p} z^{k+p-1}.$$

فرض کنید تابع f با سری (۲.۱) داده شده باشد و $g(z) = z^p - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p} z^{k+p}$ پیش‌دو تابع f و g را با $f * g$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * g)(z) = z^p - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} b_{k+p} z^{k+p}, \quad a_{k+p} \geq 0, \quad b_{k+p} \geq 0, \quad z \in D.$$

نونان و توماس در مقاله [۱۹] دترمینان‌های هانکل مرتبه‌ی m -ام تابع f را به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$\mathcal{H}_m(k) = \begin{vmatrix} b_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \cdots & \cdots & b_{k+m-1} \\ b_{k+1} & b_{k+2} & b_{k+3} & \cdots & \cdots & b_{k+m} \\ b_{k+2} & b_{k+3} & b_{k+4} & \cdots & \cdots & b_{k+m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k+m-1} & b_{k+m} & b_{k+m+1} & \cdots & \cdots & b_{k+2(m-1)} \end{vmatrix}$$

که در آن $m, k \in \mathbb{N}$ و $m \geq 1, k \geq 1$.

دترمینان‌های هانکل توسط بسیاری از نویسندگان بررسی شده‌اند. بعنوان مثال، دترمینان هانکل $b_3 - b_2^2$ ، $\mathcal{H}_2(1) = b_3 - b_2^2$ ، اولین بار فکته-سگو بررسی شده است [۲۱]. نویسندگان در [۲۲] نشان داده‌اند که کران بالای دترمینان هانکل برای تابع f برابر با $|b_2 b_4 - b_3^2|$ است. وین و دیل در سال ۱۹۹۹ دترمینان هانکل برای توابع تحلیلی و بسیاری از خواص این دترمینان را بررسی کرده‌اند [۲۳].

چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر که به عنوان چندجمله‌ای‌های فوق کروی $G_j^{(\mu)}$ شناخته می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها با توجه به تابع وزن $(1-t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}$ در بازه $[-1, 1]$ متعامد هستند. آن‌ها نمونه‌های خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند و چندجمله‌ای‌های لژاندر و چیشیف را تعمیم می‌دهند. از تابع مولد زیر برای تعریف این چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کنیم.

$$H(t, z) = \frac{1}{(1-2tz+z^2)^\mu} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k^{(\mu)}(t) z^k.$$

چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر جواب ویژه‌ای از معادله‌ی دیفرانسیل زیر است:

$$(1+t^2)y'' - (2\mu+1)ty' + k(k+2\mu)y = 0.$$

این معادله به ازای $\mu = \frac{1}{2}$ معادله‌ی لژاندر است. در این حالت چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر به چند جمله‌ای لژاندر تبدیل می‌شوند. این معادله در حالت که $\mu = 1$ معادله چیشیف است. در این حالت چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر به چند جمله‌ای چیشیف مرتبه دوم تبدیل می‌شود. چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر در زمینه آنالیز هارمونیک مطالعه شده‌اند. اخیراً بعضی از محققان در ریاضی و فیزیک این چندجمله‌ای‌ها را مطالعه کرده‌اند [۲۴، ۲۵]. رابطه بازگشتی زیر برای این چندجمله‌ای‌ها برقرار است:

$$\begin{aligned} G_0^{(\mu)}(t) &= 1, \\ G_1^{(\mu)}(t) &= 2\mu t, \\ kG_k^{(\mu)}(t) &= 2t(kj + \mu - 1)G_{k-1}^{(\mu)}(t) - (k + 2\mu - 2)G_{k-2}^{(\mu)}(t). \end{aligned}$$

با استفاده از چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر، می‌توانیم سری زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}_p^\mu(t, z) = z^p - \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) z^{k+p}.$$

اکنون با استفاده از تعریف تابع $\mathcal{M}_p^\mu(t, z)$ و تعریف پیچش دو تابع تحلیلی، عملگر $\mathcal{F}_p^\mu : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{U}_p$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_p^\mu(t, z) = \mathcal{M}_p^\mu(t, z) * f(z) = z^p - \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} z^{k+p}, \quad a_{k+p} \geq 0, z \in D. \quad (3.1)$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $t > 0$ ، $\mu > 0$ و $\mathcal{F}_p^\mu \in \mathcal{U}_p$ با (۳.۱) داده شده باشد. کلاس توابع $NS_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$NS_q^{\mu,p}(t, \alpha) = \left\{ \mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p : \Re \left(\frac{z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)}{[p]_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)} \right) > \alpha, \quad z \in D \right\}.$$

تعریف ۳.۱. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $t > 0$ ، $\mu > 0$ و $\mathcal{F}_p^\mu \in \mathcal{U}_p$ با (۳.۱) داده شده باشد. کلاس توابع $NC_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$NC_q^{\mu,p}(t, \alpha) = \left\{ \mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p : \Re \left(1 + \frac{D_q(z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z))}{[p]_q D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)} \right) > \alpha, \quad z \in D \right\}.$$

در حالت خاص، هرگاه $p = 1$ خواهیم داشت:

$$NS_q^{\mu,1}(t, \alpha) = NS_q^\mu(t, \alpha), \quad NC_q^{\mu,1}(t, \alpha) = NC_q^\mu(t, \alpha).$$

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\delta > 0$ و

$$\mathcal{G}_p^\mu(t, z) = z^p - \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) b_{k+p} z^{k+p}, \quad b_{k+p} \geq 0, z \in D. \quad (4.1)$$

در این صورت (δ, q) -همسایگی تابع $\mathcal{F}_p^\mu \in \mathcal{U}_p$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{p,q}^\delta(\mathcal{F}_p^\mu(t, z)) = \left\{ \mathcal{G}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) [k+p]_q |a_{k+p} - b_{k+p}| \leq \delta \right\}, \quad (5.1)$$

بنابراین (۳.۱) اگر $h(z) = z^p$ ، $p \in \mathbb{N}$ ، آنگاه

$$N_{p,q}^\delta(h) = \left\{ \mathcal{G}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p, \quad \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) [k+p]_q |b_{k+p}| \leq \delta \right\}. \quad (6.1)$$

هدف اصلی این مقاله بررسی ویژگی‌ها و خواص توابع p -ارز متعلق به کلاس $T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ است. این کلاس شامل توابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ است که در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\Re \left\{ \frac{z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z) + \lambda z D_q (z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z))}{(1 - \lambda) [p]_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z) + \lambda [p]_q z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)} \right\} > \alpha, z \in D, 0 \leq \alpha < 1.$$

واضح است که داریم:

$$T_q^{\mu,p}(t, \circ, \alpha) = NS_q^{\mu,p}(t, \alpha) \quad \text{و} \quad T_q^{\mu,p}(t, 1, \alpha) = NC_q^{\mu,p}(t, \alpha).$$

همچنین، فرض کنید $R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ زیر کلاسی از $\mathcal{U}_p$ شامل توابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ باشد به طوری که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\Re \left\{ \mathcal{F}_p^\mu(t, z) + \frac{z\lambda}{[p]_q} D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z) \right\} > \alpha.$$

ساختار اصلی این مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲ نامساوی‌هایی جهت تخمین ضرایب توابع متعلق به کلاس‌های $T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ و $R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ را ارائه می‌دهیم. علاوه بر این قضیه رشد و دگرشکلی را برای توابع متعلق به این کلاس‌ها را به دست می‌آوریم. در بخش ۳ چندین رابطه شمول با (δ, q) - همسایگی برای توابع تحلیلی برای ضرایب منفی از زیر کلاس‌های تعریف شده را اثبات می‌کنیم. در پایان، در بخش ۴ چند نکته پایانی را می‌آوریم.

۲ نامساوی ضرایب

در این بخش کران‌هایی برای ضرایب توابع متعلق به زیر کلاس‌های $T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ و $R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $1 < q < \infty$ و $\mathcal{F}_p^\mu(z) \in \mathcal{U}_p$ و $\mathcal{F}_p^\mu(z) \in T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ آنگاه اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\alpha(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\alpha[p]_q)[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^2 \right) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \phi_p, \quad (1.2)$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \phi_p(1-\lambda+\lambda[p]_q) < \lambda[p]_q, \quad z \in D, \quad p, \mu \in \mathbb{N},$$

که در آن

$$\phi_p = (1 + \alpha\lambda - \alpha)[p]_q + (\lambda - \alpha\lambda)[p]_q^2. \quad (2.2)$$

اثبات. فرض کنید $\mathcal{F}_p^\mu(z) \in T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\Re \left\{ \frac{(1 + \lambda[p]_q)z^p - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^2}{[p]_q} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} z^{k+p}}{(1 - \lambda + \lambda[p]_q)z^p - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda + \lambda[k+p]_q) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} z^{k+p}} \right\} > \alpha,$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \phi_p(1 - \lambda + \lambda[p]_q) < \lambda[p]_q, \quad z \in D, \quad p, \mu \in \mathbb{N}.$$

اگر z را روی محور اعداد حقیقی در نظر بگیریم و $z \rightarrow 1^-$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{(1 + \lambda[p]_q) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^2}{[p]_q} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p}}{(1 - \lambda + \lambda[p]_q) - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda + \lambda[k+p]_q) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p}} \geq \alpha,$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \alpha(1 - \lambda) + \lambda[p]_q > 1, \quad z \in D, \quad p, \mu \in \mathbb{N}.$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\alpha(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\alpha[p]_q)[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^{\lambda} \right) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \\ & \geq (\alpha - \alpha\lambda - 1)[p]_q + (\alpha\lambda - \lambda)[p]_q^{\lambda}, \\ & 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \lambda \leq 1, \phi_p(1 - \lambda + \lambda[p]_q) < \lambda[p]_q, z \in D, p, \mu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

در نتیجه نامساوی (۱.۲) از قضیه ۱.۲ به دست می آید.
برعکس، فرض کنید نامساوی (۱.۲) برقرار است. قرار می دهیم:

$$z \in \partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

آنگاه بنابر تعریف (۳.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z D_q \mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) + \lambda z D_q (z D_q \mathcal{F}_p^{\mu}(t, z))}{(1-\lambda)[p]_q \mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) + \lambda [p]_q z D_q \mathcal{F}_p^{\mu}(t, z)} - \phi_p \right| \\ & = \frac{|(-\phi_p(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\phi_p[p]_q)[p]_q + \lambda[p]_q^{\lambda})z^p - \sum_{k=1}^{\infty} (-\phi_p(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\phi_p[p]_q)[p+k]_q + \lambda[p+k]_q^{\lambda}) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} z^{k+p}|}{|(1-\lambda + \lambda[p]_q)[p]_q z^p - \sum_{k=1}^{\infty} (1-\lambda + \lambda[k+p]_q)[p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} z^{k+p}|} \\ & = \frac{(-\phi_p(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\phi_p[p]_q)[p]_q + \lambda[p]_q^{\lambda})|z|^p + \sum_{k=1}^{\infty} (-\phi_p(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\phi_p[p]_q)[p+k]_q + \lambda[p+k]_q^{\lambda}) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} |z|^{k+p}}{(1-\lambda + \lambda[p]_q)[p]_q |z|^p - \sum_{k=1}^{\infty} (1-\lambda + \lambda[k+p]_q)[p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} |z|^{k+p}} \\ & \leq \phi_p - \alpha. \\ & 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \lambda \leq 1, \phi_p(1 - \lambda + \lambda[p]_q) < \lambda[p]_q, z \in D, p, \mu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

در نتیجه در می یابیم که نامساوی (۱.۲) برقرار است. با به کار بردن اصل ماکسیمم مطلق به دست می آوریم
 $\mathcal{F}_p^{\mu} \in T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$. لذا اثبات قضیه کامل می شود.
اکنون تابع تحلیلی ارائه می دهیم که نشان می دهد تساوی برای نامساوی (۱.۲) از قضیه ۱.۲ برقرار است. این
تابع انتهایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^p - \frac{(1 + \alpha\lambda - \alpha)[p]_q + (\alpha\lambda - \lambda)[p]_q^{\lambda}}{-\alpha(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\alpha[p]_q)[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^{\lambda}} \frac{1}{G_{k+p}^{(\mu)}(t)} z^{k+p}, \quad z \in D, \\ & 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \lambda \leq 1, \phi_p(1 - \lambda + \lambda[p]_q) < \lambda[p]_q, z \in D, p, \mu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

□

با استفاده از قضیه فوق، نتایج زیر را ارائه می دهیم.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) \in U_p$. در این صورت $\mathcal{F}_p^{\mu} \in NS_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\alpha[p]_q + [k+p]_q \right) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq (1-\alpha)[p]_q, \quad z \in D.$$

تساوی برای نامساوی فوق با تابع داده شده به صورت زیر برقرار است:

$$f(z) = z^p - \frac{(1-\alpha)[p]_q}{(-\alpha[p]_q + [k+p]_q) G_{k+p}^{(\mu)}(t)} z^{k+p}, \quad z \in D.$$

نتیجه ۳.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in U_p$. در این صورت $\mathcal{F}_p^\mu \in NC_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((1 - \alpha[p]_q)[k+p]_q + [k+p]_q^2 \right) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq [p]_q + (1 - \alpha)[p]_q^2, \quad z \in D,$$

تساوی برای نامساوی فوق با تابع داده شده به صورت زیر برقرار است:

$$f(z) = z^p - \frac{[p]_q + (1 - \alpha)[p]_q^2}{\left((1 - \alpha)[k+p]_q + [k+p]_q^2 \right) G_{k+p}^{(\mu)}(t)} z^{k+p}, \quad z \in D.$$

قضیه ۴.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in U_p$ با (۳.۱) نمایش داده شده باشد. در این صورت $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda[k+p]_q}{[p]_q} \right) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq 1 + \lambda - \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

تساوی برای نامساوی فوق با تابع داده شده به صورت زیر برقرار است:

$$f(z) = z^p - \frac{(1 + \lambda - \alpha)[p]_q}{([p]_q + \lambda[k+p]_q) G_{k+p}^{(\mu)}(t)} z^{k+p}, \quad z \in D.$$

قضیه ۵.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ و $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p$ با نمایش (۳.۱) متعلق به کلاس $T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ باشد. در این صورت

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{\phi_p}{\phi_{k+p}} \quad (3.2)$$

و

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{\phi_p [k+p]_q}{\phi_{k+p}}, \quad (4.2)$$

که در آن ϕ_p با رابطه (۲.۲) و ϕ_{k+p} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{k+p} = -\alpha(1 - \lambda)[p]_q + (1 - \lambda\alpha[p]_q)[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

اثبات. بنابر نامساوی (۱.۲) در قضیه ۱.۲ خواهیم داشت:

$$\left(-\alpha(1 - \lambda)[p]_q + (1 - \lambda\alpha[p]_q)[k+p]_q + \lambda[k+p]_q^2 \right) \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha(1-\lambda)[p]_q + (1-\lambda\alpha[p]_q)[k+p]_q + \lambda[k+p]_q) G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \\ &\leq (1+\alpha\lambda-\alpha)[p]_q + (\lambda-\alpha\lambda)[p]_q, \end{aligned}$$

در نتیجه نامساوی (۳.۲) از قضیه ۵.۲ به دست می آید.

همچنین با به کار بردن نامساوی (۱.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &-\alpha(1-\lambda)[p]_q \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} + \left((1-\lambda\alpha[p]_q) + \lambda[k+p]_q \right) \sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{k+p} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \phi_p. \end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ((1-\lambda\alpha[p]_q) + \lambda[k+p]_q) \sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} &\leq \phi_p + \alpha(1-\lambda)[p]_q \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \\ &= \phi_p + \alpha(1-\lambda)[p]_q \frac{\phi_p}{\phi_{k+p}}. \end{aligned}$$

بنابراین به دست می آوریم:

$$\frac{\phi_{k+p} + \alpha(1-\lambda)[p]_q}{[k+p]_q} \sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{\phi_p (\phi_{k+p} + \alpha(1-\lambda)[p]_q)}{\phi_{k+p}}.$$

□

در نتیجه نامساوی مورد نظر که در (۴.۲) ارائه شده است به دست می آید.

با استفاده از قضیه فوق، نتایج زیر را به دست می آوریم.

نتیجه ۶.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $NS_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{(1-\alpha)[p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q}$$

و

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{(1-\alpha)[p]_q [k+p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q}.$$

نتیجه ۷.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $NC_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ باشد. در

این صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{[p]_q + (1 - \alpha)[p]_q^{\gamma}}{(1 - \alpha[p]_q)[k+p]_q + [k+p]_q^{\gamma}}$$

و

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{[p]_q + (1 - \alpha)[p]_q^{\gamma}}{(1 - \alpha[p]_q) + [k+p]_q^{\gamma}}.$$

به طور مشابه، می‌توانیم قضیه زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۸.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{(1 + \lambda - \alpha)[p]_q}{[p]_q + \lambda[k+p]_q}$$

و

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k+p]_q G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{(1 + \lambda - \alpha)[p]_q[k+p]_q}{[p]_q + \lambda[p+k]_q}.$$

در ادامه قضیه رشد و دگر شکلی را برای توابع متعلق به کلاس‌های تعریف شده، به دست می‌آوریم.

قضیه ۹.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ و تابع $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z)$ با (۳.۱) نمایش داده شده باشد. اگر $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) \in T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ آنگاه خواهیم داشت:

$$r^p - r^{p+1} \frac{\phi_p}{\phi_{k+p}} \leq |\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z)| \leq r^p + r^{p+1} \frac{\phi_p}{\phi_{k+p}}, \quad (6.2)$$

که در آن ϕ_p با رابطه (۲.۲) و ϕ_{k+p} با رابطه (۵.۲) داده شده‌اند.

اثبات. از این‌که $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z) \in T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ نامساوی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq \frac{\phi_p}{\phi_{k+p}}. \quad (7.2)$$

هم‌چنین از این‌که تابع $\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z)$ با رابطه (۳.۱) نمایش داده شده است خواهیم داشت:

$$|z|^p - |z|^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} |z|^{k-1} \leq |\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z)| \leq |z|^p + |z|^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} |z|^{k-1}.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$|z|^p - |z|^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p} \leq |\mathcal{F}_p^{\mu}(t, z)| \leq |z|^p + |z|^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) a_{k+p}.$$

□

بنابراین بنابر رابطه‌ی (۷.۲)، نامساوی مورد نظر ارائه شده در (۶.۲) به دست می‌آید.

با استفاده از قضیه‌ی فوق نتایج زیر را می‌آوریم.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ با (۳.۱) نمایش داده شده باشد. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in NS_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$r^p - r^{p+1} \frac{(1-\alpha)[p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q} \leq |\mathcal{F}_p^\mu(t, z)| \leq r^p + r^{p+1} \frac{(1-\alpha)[p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q}.$$

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ با (۳.۱) نمایش داده شده باشد. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in NC_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$r^p - r^{p+1} \frac{[p]_q + (1-\alpha)[p]_q^2}{(1-\alpha[p]_q)[k+p]_q + [k+p]_q^2} \leq |\mathcal{F}_p^\mu(t, z)| \leq r^p + r^{p+1} \frac{[p]_q + (1-\alpha)[p]_q^2}{(1-\alpha[p]_q)[k+p]_q + [k+p]_q^2}.$$

مشابه اثبات قضیه ۹.۲، قضیه زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ با رابطه (۳.۱) نمایش داده شده باشد. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$r^p - r^{p+1} \frac{\phi_p[k+p]_q}{\phi_{k+p}} \leq |z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)| \leq r^p + r^{p+1} \frac{\phi_p[k+p]_q}{\phi_{k+p}},$$

که در آن ϕ_p با رابطه (۲.۲) و ϕ_{k+p} با رابطه (۵.۲) داده شده‌اند.

با استفاده از قضیه‌ی فوق نتایج زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱۳.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ با رابطه (۳.۱) نمایش داده شده باشد. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in NS_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$r^p - r^{p+1} \frac{(1-\alpha)[p]_q[k+p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q} \leq |z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)| \leq r^p + r^{p+1} \frac{(1-\alpha)[p]_q[k+p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q}.$$

نتیجه ۱۴.۲. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ با رابطه (۳.۱) نمایش داده شده باشد. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in NC_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$r^p - r^{p+1} \frac{[p]_q + (1-\alpha)[p]_q^2}{(1-\alpha[p]_q) + [k+p]_q} \leq |z D_q \mathcal{F}_p^\mu(t, z)| \leq r^p + r^{p+1} \frac{[p]_q + (1-\alpha)[p]_q^2}{(1-\alpha[p]_q) + [k+p]_q}. \quad (۸.۲)$$

۳ روابط شمول شامل (n, δ) - همسایگی

در این بخش، ویژگی‌های همسایگی را برای هر یک از کلاس‌های زیر تعیین می‌کنیم.

$$T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha), \quad R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha), \quad NS_q^{\mu,p}(t, \alpha), \quad NC_q^{\mu,p}(t, \alpha).$$

قضیه ۱.۳. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ و $0 < \alpha < 1$. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ باشد، آنگاه

$$T_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha) \subset N_{p,q}^\delta(h), \quad (1.3)$$

که در آن $h(z) = z^p$ ، $z \in D$ و

$$\delta := \frac{\phi_p[k+p]_q}{\phi_{k+p}}.$$

اثبات. رابطه‌ی (۱.۳) به راحتی از تعریف $N_{\delta,q}(h, f)$ که با (۶.۱) بیان شده است و با جایگزین کردن $\mathcal{G}_p^\mu(t, z)$ به جای $\mathcal{F}_p^\mu(t, z)$ و رابطه (۳.۲) از قضیه ۵.۲ به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۲.۳. فرض کنید $0 < q < 1$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ و $0 < \alpha < 1$. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ باشد، آنگاه

$$R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha) \subset N_{p,q}^\delta(h),$$

که در آن $h(z) = z^p$ ، $z \in D$ و

$$\delta := \frac{(1 + \lambda - \alpha)[p]_q[k+p]_q}{[p]_q + \lambda[p+k]_q}.$$

در قضیه ۱.۳ قرار می‌دهیم $\lambda = 0$ و نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $0 < q < 1$ و $0 \leq \alpha < 1$. اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $NS_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ باشد، آنگاه

$$S_q^*(p, \alpha) \subset N_{p,q}^\delta(h),$$

که در آن $h(z) = z^p$ ، $z \in D$ و

$$\delta := \frac{(1 - \alpha)[p]_q[k+p]_q}{-\alpha[p]_q + [k+p]_q}.$$

در قضیه ۱.۳ قرار می‌دهیم $\lambda = 1$ و نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه ۴.۳. فرض کنید $0 < q < 1$ و $0 \leq \alpha < 1$. اگر تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $NC_q^{\mu,p}(t, \alpha)$ باشد، آنگاه

$$C_q(p, \alpha) \subset N_{p,q}^\delta(h),$$

که در آن $h(z) = z^p$ ، $z \in D$ و

$$\delta := \frac{[p]_q + (1 - \alpha)[p]_q}{(1 - \alpha[p]_q) + [k+p]_q}.$$

تعریف ۵.۳. گوئیم تابع $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in \mathcal{U}_p$ متعلق به کلاس $S_q^{\mu,p}(t, \beta, \lambda)$ است اگر $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\left| \frac{\mathcal{F}_p^\mu(t, z)}{\mathcal{G}_p^\mu(t, z)} - 1 \right| < \beta.$$

قضیه ۶.۳. اگر $G_p^\mu(t, z) \in R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ و

$$\beta = 1 - \frac{\delta}{[1+p]_q} \frac{\lambda[k+p]_q + [p]_q}{\lambda[k+p]_q - (\lambda - \alpha)[p]_q},$$

آنگاه

$$N_{p,q}^\delta(G_p^\mu(t, z)) \subseteq S_q^{\mu,p}(t, \beta, \lambda),$$

که در آن ϕ_p با (۲.۲)، ϕ_{k+p} با (۵.۲) و $G_p^\mu(t, z)$ با (۴.۱) داده شده‌اند.

اثبات. از این‌که $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in N_{p,q}^\delta(G_p^\mu(t, z))$ و با استفاده از رابطه‌ی (۳.۱) خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)[k+p]_q |a_{k+p} - b_{k+p}| \leq \delta. \quad (۲.۳)$$

از این‌که $\{[n]_q\}, n \in \mathbb{N}$ یک دنباله‌ی نanzولی است، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)[1+p]_q |a_{k+p} - b_{k+p}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)[k+p]_q |a_{k+p} - b_{k+p}|.$$

این ایجاب می‌کند

$$[1+p]_q \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) |a_{k+p} - b_{k+p}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)[k+p]_q |a_{k+p} - b_{k+p}|.$$

با به کار بردن رابطه‌ی (۲.۳) به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) |a_{k+p} - b_{k+p}| \leq \frac{\delta}{[1+p]_q}, \quad 0 \leq q < 1, \delta > 0.$$

بنابراین با توجه به این‌که تابع $G_p^\mu(t, z)$ با نمایش (۴.۱) متعلق به مجموعه‌ی $R_q^{\mu,p}(t, \lambda, \alpha)$ است، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t) b_{k+p} \leq \frac{(1 + \lambda - \alpha)[p]_q}{[p]_q + \lambda[k+p]_q},$$

بنابر معادلات (۳.۱) و (۴.۱) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{F}_p^\mu(t, z)}{\mathcal{G}_p^\mu(t, z)} - 1 \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)(a_{k+p} - b_{k+p})z^{k+p-1}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)b_{k+p}z^{k+p-1}} \right| \leq \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)(a_{k+p} - b_{k+p})}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)b_{k+p}} \right| \\ &\leq \frac{\delta}{[1+p]_q} \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} G_{k+p}^{(\mu)}(t)b_{k+p}} \right) \\ &\leq \frac{\delta}{[1+p]_q} \frac{\lambda[k+p]_q + [p]_q}{\lambda[k+p]_q - (\lambda - \alpha)[p]_q}. \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$\beta \leq 1 - \frac{\delta}{[1+p]_q} \frac{\lambda[k+p]_q + [p]_q}{\lambda[k+p]_q - (\lambda - \alpha)[p]_q},$$

در نتیجه، با توجه به تعریف ۵.۳ و به کار بردن نامساوی (۳.۳)، به دست می‌آوریم $\mathcal{F}_p^\mu(t, z) \in S_q^{\mu, p}(t, \beta, \lambda)$. بنابراین اثبات قضیه ۶.۳ کامل می‌شود. $\square$

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، زیر کلاس‌های جدیدی از توابع تحلیلی با ضرایب منفی با استفاده از q -مشتق را معرفی و تحلیل نموده‌ایم. این زیر کلاس‌ها با استفاده از چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر تعریف شده‌اند. همچنین، (δ, q) -همسایگی برای توابع p -ارز با چندجمله‌ای‌های گگن‌باوئر را تعریف کرده‌ایم. علاوه بر این، کران ضرایب برای این توابع را به دست آورده‌ایم. همچنین، چندین رابطه‌ی شمول برای (δ, q) -همسایگی و توابع متعلق به زیرکلاس‌های تعریف شده را به دست آورده‌ایم.

مراجع

- [1] Da Cruz, A. M. and Martins, N. 2012 The q -symmetric variational calculus, Comput. Math. Appl., 64, pp. 2241–2250. doi: 10.1016/j.camwa.2012.01.076
- [2] Lavagno, A., 2009. Basic-deformed quantum mechanics, Rep. Math. Phys., volume 64, pp.79–88. doi: 10.1016/S0034-4877(09)90021-0
- [3] Jackson, F. H., 1910. q -difference equations, Am. J. Math., 32, pp.305–314. doi:10.2307/2370183
- [4] F. H. Jackson, F. H. 1909. On q -functions and a certain difference operator, Trans. R. Soc. Edinb., 46(2), 1909, pp.253-281. doi:10.1017/S0080456800002751
- [5] Purohit, S. D., 2012. A new class of multivalently analytic functions associated with fractional q -calculus operators, Fract. Differ. Calc., 2, pp.129-138. doi:10.7153/fdc-02-10
- [6] Srivastava, H. M., 2020. Operators of basic (or q -)calculus and fractional q -calculus and their applications in geometric function theory of complex analysis, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci. 44, pp.327–344. doi: 10.1007/s40995-019-00815-0
- [7] Ismail, M., Merkes, E. and Styer, D. 2007. A generalization of starlike functions, Complex Variables, Theory and Application: An International Journal, 14, pp.77–84. doi:10.1080/17476939008814407
- [8] Kanas, S., Altinkaya, S. and Yalçın, S., 2019. Subclass of k -Uniformly Starlike Functions Defined by the Symmetric q -Derivative Operator, Ukr. Math. J., 70, pp.1727–1740. doi:10.1007/s11253-019-01602-1

- [9] Zhang, X., Khan, S., Hussain, S., Tang, H., and Shareef, Z., 2020. New subclass of q -starlike functions associated with generalized conic domain, AIMS Math., 5, pp. 4830–4848. doi:10.3934/math.2020308
- [10] Altinta, S. O., Irmak, H. and Srivastava, H. M., 1995. Fractional calculus and certain starlike functions with negative coefficients, Comp. Math. Appl., 30, pp. 9–15. doi:10.1016/0898-1221(95)00073-8
- [11] Mohammed, A. and Darus, M. A., 2013. A generalized operator involving the q -hypergeometric function, Mat. Vesn., 65, pp.454–465.
- [12] Aldweby, H. and Darus, M., 2014. Some subordination results on q -analogue of Ruscheweyh differential operator, Abstr. Appl. Anal., 2014, pp.958563. doi:10.1155/2014/958563
- [13] Uçar, H. E. 2016. Coefficient inequality for q -starlike functions, Appl. Math. Comput., 276, pp.122–126. doi:10.1016/j.amc.2015.12.008
- [14] Arif, M., Srivastava, H. M. and Umar, S., 2019. Some applications of a q -analogue of the Ruscheweyh type operator for multivalent functions, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat., 113(2), pp.1211–1221. doi:10.1007/s13398-018-0539-3
- [15] Amini, E. Al-Omari, S., Nonlaopon, K. S., and Baleanu, D. 2022. Estimates for coefficients of bi-univalent functions associated with a fractional q -difference operator, Symmetry, 14(5), pp. 879. doi:10.3390/sym14050879
- [16] Brito da Cruz, A. M. C. and Martins, N., 2012. The q -symmetric variational calculus, Comput. Math. Appl., 64, pp.2241–2250. doi: 10.1016/j.camwa.2012.01.076
- [17] Gasper, G. and Rahman, M., 2004. Basic Hypergeometric Series, 2nd ed. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96. Cambridge University Press, Cambridge.
- [18] Graham, I. and Kohr, G. Geometric Function Theory in one and Higher Dimensions, Marcel Dekker, Inc, NewYork.
- [19] Noonan, J. W., and Thomas, D. K. 1976. On the second Hankel determinant of areally mean p -valent functions, Trans Am Math Soc., 223, pp.337–346. doi:10.2307/1997533
- [20] Khan, S., Hussain, S., Naeem, M., Darus, M. and Rasheed, A., 2022. A subclass of q -starlike functions defined by using a symmetric q -derivative operator and related with generalized symmetric conic domains, Matematiche, 9, pp.917. doi: 10.3390/math9090917
- [21] Szego, G. and Fekete, M. 1933. Eine Bemerkunguber ungerade schlichte Funktionen, J. London Math. Soc., 2, pp. 85–89 . doi:10.1112/jlms/s1-8.2.85
- [22] Thomas, D. K. and Noonan, J. W., 1976. On the second Hankel determinant of a really mean p -valent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 223, pp.337–346. doi:10.2307/1997533

- [23] Vein, R. and Dale, P., 1999. Determinants and Their Applications in Mathematical Physics, Applied Mathematical Sciences, Springer: New York, NY, USA, 1999; 134.
- [24] Unyong, B., Govindan V., Bowmiya, S., Rajchakit, G., Gunasekaran, N., Vadivel, R., Lim, C. G. and Agarwal, P. 2021. Generalized linear differential equation using Hyers–Ulam stability approach, AIMS Math., 6(2), pp.1607–1623. doi:10.3934/math.2021096
- [25] Khan, S., Al-Gonah, A. A. and Yasmin, G. 2012. Generalized and mixed type Gegenbauer polynomials, J. Math Anal Appl. 390(1), pp.197–207. doi:10.1016/j.jmaa.2012.01.026