

An Approach to Generalized Rényi Entropy and Exponential Rényi Entropy on Effect Algebras with the Riesz Decomposition Property

Zahra Eslami Giski⁽¹⁾ 

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Sirjan Branch, Islamic Azad University, Sirjan, Iran.

Received: 9 July 2022

Accepted: 5 November 2025

Published online: 12 June 2026

Abstract: Entropy is an important concept in many branches of science. The aim of this paper is to introduce mathematical models of Rényi entropy and exponential Rényi entropy on effect algebras with the Riesz decomposition property. To this end, the concepts of partitions of an effect algebra, refinement of partitions, the join of two partitions, and state functions on effect algebras with the Riesz decomposition property are first presented. Then, Rényi entropy and exponential Rényi entropy of order q for a partition are introduced. It is shown that these entropies are positive, decreasing with respect to q , and that finer partitions possess larger entropy values. In addition, the concavity property of state functions for Rényi entropy on effect algebras with the Riesz decomposition property is proved. Furthermore, Rényi conditional entropy and exponential Rényi conditional entropy of order q of a partition with respect to another partition are defined, and their ergodic properties are investigated. Finally, it is shown that the introduced Rényi entropies are generalizations of Shannon entropy.

Keywords: Rényi entropy, exponential Rényi entropy, Rényi conditional entropy, exponential Rényi conditional entropy, effect algebra.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (Zahra Eslami Giski) Zeslami@iau.ir



رویکردی به آنتروپی‌های تعمیم‌یافته رنی و نمایی رنی روی جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس

زهرا اسلامی گیسکی^(۱)

^(۱) گروه ریاضی، واحد سیرجان، دانشگاه آزاد اسلامی، سیرجان، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۱۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۳/۲۲

چکیده: آنتروپی، یک مفهوم مهم در اغلب علوم است. هدف از این پژوهش، معرفی مدل‌های ریاضی از آنتروپی‌های رنی و نمایی رنی روی جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس است. بدین منظور، ابتدا مفاهیم افراز یک جبر مؤثر، نظریف افراز، الحاق دو افراز و تابع حالت روی یک جبر مؤثر بیان شده، سپس آنتروپی رنی و آنتروپی نمایی رنی از مرتبه یک افراز، معرفی شده‌اند. این آنتروپی‌ها مثبت بوده، افرازهای ظریف‌تر، آنتروپی بزرگ‌تری داشته و نسبت به، توابعی نزولی به شمار می‌روند. علاوه بر این، خاصیت مقعر بودن دو تابع حالت برای آنتروپی رنی روی جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس برقرار است. در ادامه، آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی شرطی نمایی رنی از مرتبه یک افراز نسبت به افراز دیگر نیز تعریف شده و خواص ارگودیک آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین ثابت شده است که آنتروپی‌های رنی معرفی شده، تعمیمی از آنتروپی‌های شانون می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی رنی، آنتروپی نمایی رنی، آنتروپی شرطی رنی، آنتروپی نمایی شرطی رنی، جبر مؤثر.

رده‌بندی ریاضی: 37A35; 28D20

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی، یک مفهوم اساسی در نظریه‌ی اطلاعات محسوب می‌شود. رویکرد عمومی در تئوری اطلاعات، مبتنی بر آنتروپی شانون است [۱]. این آنتروپی، معیاری از اشتباهات تصادفی است که در هنگام انتقال یک سیگنال به وجود می‌آیند. اگر $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ ، یک توزیع احتمال باشد، آنتروپی شانون P ، کمیت

$$H(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$$

^۱ نویسنده مسئول مقاله

خواهد بود. اگرچه مفهوم معرفی شده توسط شانون در ابتدا برای نظریه اطلاعات ارائه شده بود، اما خیلی زود، حوزه‌های دیگر، از جمله هواشناسی [۲]، بیولوژی [۳]، اقتصاد [۴]، نظریه تشخیص الگو [۵] و سایر علوم، از این مدل ریاضی قدرتمند برای بررسی رفتارهای جوی، مشخص ساختن نمونه‌های هدف، بررسی الگوها و غیره استفاده کردند. به دلیل اهمیت مدل شانون و کاربردهای آن، مدل‌های تعمیم‌یافته این مفهوم، معرفی شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۶-۹]. آنتروپی رنی از مرتبه q ، یکی از تعمیم‌های مفید و مهم از آنتروپی شانون است که در سال ۱۹۶۱ توسط آلفرد رنی معرفی گردید [۱۰]. اگر $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ یک توزیع احتمال باشد، آنتروپی رنی P از مرتبه q ، عدد $H_q(P) = \frac{1}{(1-q)} \log_2 \sum_{i=1}^n (P_i)^q$ تعریف می‌شود. آنتروپی رنی از آنتروپی شانون انعطاف‌پذیرتر بوده و به عنوان تعمیمی از آنتروپی شانون برای محاسبه مینیمم آنتروپی و ماکسیمم آنتروپی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. آنتروپی رنی نیز مانند آنتروپی شانون، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته و از مدل‌های ریاضی معرفی شده برای این آنتروپی، در سایر علوم استفاده شده است. برای پردازش تصاویر، الگوریتم‌های آستانه‌گذاری مختلفی وجود دارند. به کمک آنتروپی رنی، الگوریتم‌های آستانه‌گذاری جدیدی ارائه شده، بطوریکه این الگوریتم‌ها، دقت بالاتر و نویز کمتری نسبت به الگوریتم‌های دیگر دارند [۱۱، ۱۲]. یکی از مسائل اساسی در زمینه‌ی یک سیستم رمزنگاری شده، اثبات امنیت آن است. با استفاده از آنتروپی رنی، روشی برای اثبات امنیت سیستم‌های رمزنگاری شده ارائه شده است [۱۳]. از طرف دیگر، ثابت شده است که با استفاده از آنتروپی رنی می‌توان تعداد حدس‌های لازم برای رمزگشایی را محدود ساخته و سرعت شکستن کدها را بالا برد [۱۴]. در کوانتوم، آنتروپی رنی برای تحلیل بی‌نظمی و آشفتگی سیستم‌های کوانتومی، مورد استفاده قرار گرفته و مشخص شده است آنتروپی رنی یک سیستم منظم به صورت خطی کاهش می‌یابد، در حالی که آنتروپی رنی سیستم آشوبناک به صورت نمایی کاهش پیدا می‌کند [۱۵]. اندازه‌های آنتروپی رنی و نمایی رنی، یک معیار ریسک مالی بوده و ثابت شده است این آنتروپی‌ها حق بیمه سهام را به روشی ساده‌تر و در عین حال با قدرت توضیحی بالاتری نسبت به پارامتر بتا در مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای توضیح می‌دهند [۱۶]. مقاله حاضر به مطالعه‌ی آنتروپی رنی و آنتروپی شرطی رنی روی جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس اختصاص دارد. جبرهای مؤثر توسط فولیس و بنت و برای مدل‌سازی اندازه‌های غیرتیز در سیستم‌های مکانیک کوانتومی معرفی شده‌اند [۱۷]. جبر مؤثر، تعمیم ساختارهای جبری، مانند جبرهای بولی، شبکه‌های ارتومدل و MV -جبرها بوده و یک ابزار مفید برای توصیف فرآیندهای چندارزشی به شمار می‌رود. آنتروپی این ساختار جبری توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته [۱۸-۲۱]، اما تا کنون، آنتروپی رنی این ساختار جبری مهم، مطالعه و بررسی نشده است. از آنجا که جبرهای مؤثر، یک مدل ریاضی قدرتمند در مطالعه سیستم‌های مکانیک کوانتومی هستند، ارائه و بررسی آنتروپی انعطاف‌پذیر رنی می‌تواند ابزاری مفید را برای مطالعه در خصوص میزان عدم قطعیت و بی‌نظمی این سیستم‌ها فراهم آورد. همچنین این مدل ریاضی، پیش‌بینی وضعیت آینده سیستم‌های مکانیک کوانتومی را آسان‌تر ساخته و در نتیجه، برنامه‌ریزی برای آینده را راحت‌تر و واقع‌گرایانه‌تر می‌کند.

یکی از ویژگی‌های مهم یک جبر مؤثر، خاصیت تجزیه ریس است. در واقع، خاصیت تجزیه ریس، وجود نگاشت حالت و امکان تعریف آنتروپی را مهیا می‌کند. در این نوشتار، با استفاده از خاصیت تجزیه ریس، مفاهیم آنتروپی رنی و آنتروپی شرطی رنی روی جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس - که تا کنون ارائه نشده‌اند - تعریف شده و مورد بررسی قرار می‌گیرند. هرچند نتایج آنتروپی نمایی بدیهی هستند، اما در این پژوهش، مطالعه و بررسی می‌شوند، زیرا ثابت شده است این اندازه می‌تواند در مطالعه‌ی نویزها و رفتار سیستم‌ها مؤثر باشد [۱۶]. به این منظور در بخش بعد، تعاریف و مفاهیم اولیه بیان می‌شوند. در بخش سوم، آنتروپی رنی و آنتروپی نمایی رنی افزایش جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس معرفی و خواص آن تحلیل خواهد شد. در بخش آخر، مفاهیم آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی افزایش جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس ارائه گردیده و ثابت می‌شود این مفاهیم، تعمیمی از آنتروپی شانون هستند که از خاصیت یکنوایی برخوردارند.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه و پیش‌نیازها

در این بخش به معرفی تعاریف اساسی، مفاهیم و برخی از نتایج اولیه‌ی مورد نیاز پرداخته شده است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید E ، یک مجموعه‌ی غیرتهی، $\circ$ و $\oplus$ ، یک عمل جزئی روی E باشد؛ در

آن صورت، ساختار جبری $(E, \oplus, \circ, 1)$ ، یک جبر مؤثر نامیده می‌شود، اگر برای هر $a, b, c \in E$ خواص زیر برقرار باشند:

آ- اگر $a \oplus b$ تعریف شده باشد، آنگاه $b \oplus a$ نیز تعریف شده و $a \oplus b = b \oplus a$ باشد.

ب- اگر $(a \oplus b) \oplus c$ تعریف شده باشد، آنگاه $a \oplus (b \oplus c)$ نیز تعریف شده و $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

پ- برای هر $a \in E$ ، یک عنصر منحصر به فرد $a' \in E$ وجود داشته باشد؛ به طوری که $a \oplus a' = 1$.

ت- اگر $1 \oplus a$ در E تعریف شده باشد، آنگاه $a = 0$ باشد [۱۷].

رابطه‌ی " $\leq$ " در جبر مؤثر $(E, \oplus, \circ, 1)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:
برای هر $a, b \in E$ ، $a \leq b$ است، اگر و فقط اگر عنصر $c \in E$ وجود داشته باشد؛ به طوری که $a \oplus c = b$ باشد. رابطه‌ی " $\leq$ "، یک رابطه‌ی مرتب جزئی است و برای هر $a \in E$ ، $0 \leq a \leq 1$ خواهد بود و اگر رابطه‌ی $a \oplus c_1 = a \oplus c_2$ برقرار باشد، $c_1 = c_2$ است. همچنین $c := b - a$ می‌باشد، اگر و فقط اگر رابطه‌ی $a \oplus c = b$ برقرار باشد. واضح است که برای هر $a \in E$ ، $a' = 1 - a$ خواهد بود.

تعریف ۲.۲. جبر مؤثر $(E, \oplus, \circ, 1)$ ، دارای خاصیت تجزیه ریس است؛ اگر برای هر رابطه‌ی $x \leq y_1 \oplus y_2$ دو عضو $x_1, x_2 \in E$ وجود داشته باشد؛ به طوری که $x_1 \leq y_1$ ، $x_2 \leq y_2$ و $x = x_1 \oplus x_2$ باشد [۲۲].

لم ۳.۲. فرض کنید $(E, \oplus, \circ, 1)$ ، یک جبر مؤثر باشد. E دارای خاصیت تجزیه ریس است، اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ که $x_1 \oplus x_2 = y_1 \oplus y_2$ باشد عناصر $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in E$ وجود داشته باشند؛ به طوری که روابط $x_1 = c_{11} \oplus c_{12}$ ، $x_2 = c_{21} \oplus c_{22}$ ، $y_1 = c_{11} \oplus c_{21}$ و $y_2 = c_{12} \oplus c_{22}$ برقرار باشند (لم ۵-۷-۱، [۲۲]).

تعریف ۴.۲. فرض کنید E ، یک جبر مؤثر باشد؛ در آن صورت، نگاشت $[0, 1]$ ، $s: E \rightarrow [0, 1]$ ، یک نگاشت حالت نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

آ- اگر $a \oplus b$ تعریف شده و رابطه‌ی $a \oplus b = e$ برقرار باشد، آنگاه $s(a \oplus b) = s(a) + s(b) = s(e)$.

ب- $s(1) = 1$.

در حالت کلی نمی‌توان ادعا کرد که یک جبر مؤثر، دارای نگاشت حالت است؛ هر چند ثابت شده است اگر جبر مؤثر، خاصیت تجزیه ریس داشته باشد، حداقل یک نگاشت حالت خواهد داشت [۲۲، ۲۳]. با توجه به خواص نگاشت حالت، به سادگی می‌توان ثابت کرد $s(a') = 1 - s(a)$ و $s(0) = 0$. همچنین اگر $a \leq b$ باشد، آنگاه $s(a) \leq s(b)$ می‌باشد [۲۰].

مثال ۵.۲. فرض کنید برای $k \in \mathbb{N}$ ، $M_k := \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k}{k}\}$ بوده و برای هر $a, b \in M_k$:

$$a \oplus b := \min\{1, a + b\}$$

تعریف شود. M_k ، یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس بوده و دارای نگاشت حالت همانی است.

تعریف ۶.۲. فرض کنید E ، یک جبر مؤثر است. زیرمجموعه‌ی $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ از عناصر E یک افراز است، اگر $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i = 1$ بوده و $\alpha_i \wedge \alpha_j = 0$ ، $i \neq j$ باشد [۱۸].

فرض کنید $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ و $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ دو افراز باشند؛ B نظریفی از A است و با $A \prec B$ نمایش داده می‌شود، اگر برای هر $a_i \in A$ ، زیرمجموعه‌ای از $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ مانند α_i وجود داشته باشد؛ به طوری که $a_i = \bigoplus_{j \in \alpha_i} \beta_j$ بوده و برای هر $j \neq i$ ، $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ و $\bigcup_{i=1}^n \alpha_i = \{1, \dots, m\}$ باشد [۱۸].
 $C = A \vee B = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ ، یک الحاق ریس از A و B است. اگر $\bigoplus_{k=1}^m c_{ik}$ ، $a_i = \bigoplus_{k=1}^m c_{ik}$ ، $b_j = \bigoplus_{k=1}^n c_{kj}$ و $s(c_{ij}) \leq \min(s(a_i), s(b_j))$ باشند (بنا به

خاصیت تجزیه ریس، عناصر کوچک‌تر وجود دارند). C ، یک افراز است [۲۰] و اگر $a_i \in A$ باشد، $\alpha_{ik} = \{ik : i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m\}$ زیر مجموعه‌ای از $\{ik : i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m\}$ بوده و $a_i = \bigoplus_{ik \in \alpha_{ik}} c_{ik}$ است. همچنین برای هر $ik \neq ij$ ، $\alpha_{ij} \cap \alpha_{ik} = \emptyset$ بوده و $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^m \alpha_{ik} = \{ik : i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m\}$ است. پس به سادگی مشخص شد که $A \prec C$ است. به همین صورت می‌توان ثابت کرد که $B \prec C$ است. الحاق ریس $A \vee B$ ، یک الحاق تنها از A و B است، اگر این الحاق منحصر به فرد باشد و با $A \vee B$ نمایش داده می‌شود. اگر $s(c_{ij}) = s(a_i)s(b_j)$ باشد، C مستقل نامیده می‌شود. همچنین مجموعه‌ی همه الحاق‌های ریس A و B با $\text{Ref}_R\{A, B\}$ نمایش داده می‌شود.

لم ۷.۲. فرض کنید E ، یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس A و B و C ، افرازهای E و $A \prec B$ باشند؛ آن‌گاه $A \vee C \prec B \vee C$ است [۲۰].

تعریف ۸.۲. فرض کنید $E = (E, \oplus, \circ, 1)$ ، یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس، $s : E \rightarrow [0, 1]$ ، یک نگاشت حالت و $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ و $C = \{c_j\}_{j=1}^m$ دو افراز باشند. در آن صورت، $A \subset C$ است، اگر برای هر a_j عناصر $c_j \in E$ وجود داشته باشند؛ به طوری که $b_{ij} \oplus a_i = c_j$ و $b_{ij} = 0$ باشد. $A \overset{\circ}{\subset} C$ است، اگر $A \subset C$ و $C \overset{\circ}{\subset} A$ باشند.

قضیه ۹.۲. فرض کنید $E = (E, \oplus_E, \circ_E, 1_E)$ و $F = (F, \oplus_F, \circ_F, 1_F)$ دو جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس باشند. $C = E \otimes F = \{(e, f) : e \in E, f \in F\}$ ، $C = E \otimes F$ ، $(e_1, f_1) \otimes (e_2, f_2) = (e_1 \oplus_E e_2, f_1 \oplus_F f_2)$ ، $(e_1, f_1) \leq (e_2, f_2)$ است. اگر و تنها اگر $e_1 \leq_E e_2$ و $f_1 \leq_F f_2$ باشند. آن‌گاه C ، یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس بوده و حاصل ضربی از دو جبر مؤثر E و F نامیده می‌شود [۱۹].

به سادگی می‌توان ثابت کرد $A = \{(e_i, f_i)\}_{i=1}^n$ ، یک افراز از $C = E \otimes F$ است، اگر و تنها اگر

$$A_E = \{e_i\}_{i=1}^n \quad \text{و} \quad A_F = \{f_i\}_{i=1}^n$$

به ترتیب افرازهایی از E و F باشند. همچنین اگر $A = \{(e_i, f_i)\}_{i=1}^n$ و $B = \{(e'_i, f'_i)\}_{i=1}^m$ افرازهایی از $C = E \otimes F$ بوده و $A \leq B$ باشد، آن‌گاه $A_E \leq B_E$ و $A_F \leq B_F$ است. تعریف زیر که آنتروپی شانون افرازهای یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس است، توسط دیانولا در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است [۱۸].

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید s یک تابع حالت و $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ یک افراز روی جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس باشد. در آن حالت، آنتروپی شانون A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(A) := - \sum_{i=1}^n s(a_i) \log_2 s(a_i) \quad (1)$$

لازم به ذکر است که در ادامه متن به منظور ایجاد سهولت، مبنای ۲ حذف خواهد شد. فرض کنید $C = \{c_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ یک الحاق ریس از دو افراز $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ باشد؛ آنتروپی شرطی این دو افراز به صورت

$$H_C(A | B) := - \sum_{i,j} s(c_{ij}) \log_2 \left(\frac{s(c_{ij})}{s(b_j)} \right) \quad (2)$$

تعریف می‌شود که $s(b_j) > 0$ [۱۸].

۳ آنتروپی رنی و آنتروپی نمایی رنی افرازهای جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس

در این بخش، به معرفی و بررسی آنتروپی رنی افرازهای جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس پرداخته می‌شود. در ادامه فرض می‌شود $E = (E, \oplus, \circ, 1)$ یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس و $s : E \rightarrow [0, 1]$ یک تابع حالت بوده و به ترتیب با E و $s : E \rightarrow [0, 1]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ یک افزار روی E و $q \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ باشد. آنتروپی رنی A از مرتبه q به صورت

$$H_q^s(A) := \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \quad (3)$$

و آنتروپی نمایی رنی به صورت

$$E_q^s(A) := e^{H_q^s(A)} \quad (4)$$

تعریف می‌شوند.

به سادگی می‌توان ثابت کرد $E_q^s(A) \geq 1$ و $H_q^s(A) \geq 0$. فرض کنید $q \in (0, 1)$ باشد؛ چون که $0 \leq s(a_i) \leq 1$ است پس $s(a_i) \leq s^q(a_i)$ بوده و

$$\sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \geq \sum_{i=1}^n s(a_i) = s(\oplus_{i=1}^n a_i) = s(1) = 1$$

می‌باشد. در نتیجه

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \geq \frac{1}{1-q} \log(1) = 0$$

و $E_q^s(A) = e^{H_q^s(A)} \geq e^0 = 1$ است. برای $q \in (1, \infty)$ ؛ نیز می‌توان ثابت کرد $E_q^s(A) \geq 1$ و $E_q^s(A) \geq 0$.

مثال ۲.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ یک افزار روی E و نگاشت حالت s یک نگاشت یکنواخت روی A $\left(s(a_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n\right)$ باشد. آنگاه

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^q = \frac{1}{1-q} \log n^{1-q} = \log n$$

و

$$E_q^s(A) = e^{\log n} = n$$

برای $q = 1$ ، آنتروپی رنی تعریف نشده است؛ چون به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. اما در قضیه بعد ثابت می‌شود؛ وقتی که q به سمت یک می‌رود، آنتروپی رنی و آنتروپی نمایی رنی همگرا به آنتروپی شانن و آنتروپی نمایی شانن است.

لم ۳.۳. فرض کنید E یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس، A یک افزار و s یک نگاشت حالت روی E باشد. آنتروپی رنی افزار A برابر صفر است اگر و فقط اگر A یک افزار بدیهی ($A = \{1\}$) باشد.

اثبات. فرض کنید $A = \{1\}$ باشد؛ داریم:

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log(s(1))^q = \frac{1}{1-q} \log(1) = 0$$

برعکس، فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ یک افزار روی E بوده و $H_q(A) = 0$ باشد. چون A یک افزار غیر بدیهی است؛ $\sum_{i=1}^n s(a_i) = 1$ بوده و برای هر a_i ، $0 \leq s(a_i) < 1$ است. اگر $1 < q$ باشد؛ $(s(a_i))^q < s(a_i)$ بوده و

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q > \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n s(a_i) = 0$$

به طور مشابه، برای حالت $q < 1$ داریم که با فرض تناقض دارند. بنابراین A یک افزار بدیهی است. $\square$

قضیه ۴.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ یک افزار روی E باشد. آنگاه

$$\lim_{q \rightarrow 1} H_q^s(A) = - \sum_{i=1}^n s(a_i) \log_{\gamma} s(a_i) = H(A)$$

و

$$\lim_{q \rightarrow 1} E_q^s(A) = e^{H(A)} = E(A)$$

اثبات. فرض کنید $f(q) = \log \sum_{i=1}^n s(a_i)^q$ و $g(q) = 1 - q$ دو تابع دیفرانسیل پذیر باشند. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} f(q) &= \lim_{q \rightarrow 1} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q = \log \left(\lim_{q \rightarrow 1} \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \right) \\ &= \log \left(\sum_{i=1}^n s(a_i) \right) = \log 1 = 0 \end{aligned}$$

و

$$\lim_{q \rightarrow 1} g(q) = 1 - 1 = 0$$

بنا به قاعده هوپیتال؛

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} H_q^s(A) &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(q)}{g(q)} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{df(q)}{dq}}{\frac{dg(q)}{dq}} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{- \sum_{i=1}^n s(a_i)^q \ln s(a_i)}{\sum_{i=1}^n s(a_i)^q \ln 2} \\ &= \frac{- \sum_{i=1}^n s(a_i) \ln s(a_i)}{\sum_{i=1}^n s(a_i) \ln 2} = - \sum_{i=1}^n s(a_i) \log_{\gamma} s(a_i) = H_1(A). \end{aligned}$$

همچنین چون تابع e^x پیوسته است؛ پس $\lim_{q \rightarrow 1} E_q^s(A) = e^{\lim_{q \rightarrow 1} H_q^s(A)} = e^{H(A)} = E(A)$ می‌باشد. اگر s_1, s_2 دو تابع حالت باشند؛ آنگاه $s_1 + (1-t)s_2$ نیز یک تابع حالت است. زیرا $ts_1(1) + (1-t)s_2(1) = 1$ بوده و

$$\begin{aligned} (ts_1 + (1-t)s_2)(a \oplus b) &= ts_1(a \oplus b) + (1-t)s_2(a \oplus b) \\ &= ts_1(a) + ts_1(b) + (1-t)s_2(a) + (1-t)s_2(b) \\ &= (ts_1 + (1-t)s_2)(a) + (ts_1 + (1-t)s_2)(b) \end{aligned}$$

می‌باشد. آنتروپی‌های معرفی شده؛ وابسته به تابع حالت s می‌باشند. در قضیه بعد خاصیت تقعر دو تابع حالت برای آنتروپی رنی ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ یک افزار روی E ، s_1 و s_2 دو تابع حالت باشند. برای هر $t, H_q^{s_1}(A) + (1-t)H_q^{s_2}(A) \leq H_q^{ts_1+(1-t)s_2}(A)$ ، $t \in [0, 1]$

اثبات. فرض کنید $q \in (1, \infty)$ باشد؛ تابع $f(x) = x^q$ یک تابع محدب است. پس

$$(ts_1(a_i) + (1-t)s_2(a_i))^q \leq t(s_1(a_i))^q + (1-t)(s_2(a_i))^q$$

و

$$\sum_{i=1}^n ((ts_1 + (1-t)s_2)(a_i))^q \leq t \sum_{i=1}^n (s_1(a_i))^q + (1-t) \sum_{i=1}^n (s_2(a_i))^q$$

چون $0 \leq 1 - q$ است؛ بنابراین روابط زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} H_q^{ts_1 + (1-t)s_2}(A) &= \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n ((ts_1 + (1-t)s_2)(a_i))^q \geq t \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n (s_1(a_i))^q + (1-t) \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n (s_2(a_i))^q \\ &= tH_q^{s_1}(A) + (1-t)H_q^{s_2}(A) \end{aligned}$$

اگر $q \in (0, 1)$ باشد؛ تابع $g(x) = x^q$ یک تابع مقعر بوده و $1 - q \geq 0$ می‌باشد و به روش مشابه حالت قبل، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

در قضیه بعد ثابت می‌شود؛ توابع آنتروپی رنی و آنتروپی نمایی رنی نسبت به q ، توابعی نزولی هستند.

قضیه ۶.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ یک افزار روی E و $q \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ اگر $q_1 \leq q_2$ باشد؛ آنگاه

$$H_{q_2}^s(A) \leq H_{q_1}^s(A) \quad \text{آ-}$$

$$E_{q_2}^s(A) \leq E_{q_1}^s(A) \quad \text{ب-}$$

اثبات. آ- فرض کنید $q_1, q_2 \in (1, \infty)$ و برای هر $x \in [0, \infty]$ $\rho(x) = x^{\frac{q_1-1}{q_2-1}}$ باشد. با توجه به نامساوی $q_1 \leq q_2$ ، رابطه $\frac{q_1-1}{q_2-1} \leq 1$ برقرار است؛ پس $\rho(x)$ یک تابع مقعر است. فرض کنید $\alpha_i = s(a_i)$ و برای $x_i = (s(a_i))^{q_2-1}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ باشد. بنا به نامساوی جنسن^۱، روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (s(a_i))^{q_2} \frac{1}{q_2-1} &= \left(\sum_{i=1}^n s(a_i) (s(a_i))^{q_2-1} \right)^{\frac{q_1-1}{(q_2-1)(q_1-1)}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n s(a_i) (s(a_i))^{q_2-1} \right]^{\frac{q_1-1}{q_2-1}} \geq \left(\sum_{i=1}^n s(a_i) (s(a_i))^{q_1-1} \right)^{\frac{1}{q_1-1}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i))^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1-1}} \end{aligned}$$

پس $H_{q_2}^s(A) \leq H_{q_1}^s(A)$ است.

یک اثبات مشابه برای حالت $q_1, q_2 \in (0, 1)$ می‌توان نوشت. اگر $q_1 \in (0, 1)$ و $q_2 \in (0, \infty)$ باشد؛ اثبات از رابطه‌ی تعدی حاصل می‌شود.

ب- با توجه به صعودی بودن تابع نمایی و قسمت آ، اثبات واضح است. $\square$

مثال ۷.۳. فرض کنید $A = \{a, a'\}$ یک افزار روی E بوده، s_1 و s_2 دو تابع حالت باشند؛ به طوری که $s_1(a) = \frac{1}{6}$ ، $s_1(a') = \frac{5}{6}$ ، $s_2(a) = \frac{1}{4}$ و $s_2(a') = \frac{3}{4}$ باشد. فرض کنید $t = \frac{1}{4}$ و $q = \frac{1}{4}$. در این صورت، روابط زیر برقرارند:

$$E_{\frac{1}{4}}^{s_1}(A) = e^{0.804} \cong 2.234 \quad \text{و} \quad H_{\frac{1}{4}}^{s_1}(A) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \log \left(\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \cong 0.804$$

$$H_{\frac{1}{4}}^{s_2}(A) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \log \left(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} \right) \cong 0.899$$

$$H_{\frac{1}{4}}^{\frac{s_1+s_2}{2}}(A) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \log \left(\sqrt{\frac{5}{24}} + \sqrt{\frac{19}{24}} \right) \cong 0.857$$

$$\frac{1}{2}H_q^{s_1}(A) + \frac{1}{2}H_q^{s_2}(A) \simeq \frac{0.804}{2} + \frac{0.899}{2} = 0.8515 \leq H_q^{ts_1+(1-t)s_2}(A) = 0.857$$

اگر $q = 2$ باشد؛ آنگاه داریم:

$$E_2^{s_1}(A) = e^{0.469} \cong 1.598$$

و

$$H_2^{s_1}(A) = \frac{1}{1-2} \log \left(\left(\frac{1}{6} \right)^2 + \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right) \cong 0.469$$

$$H_2^{s_1}(A) \cong 0.469 \leq H_{\frac{1}{2}}^{s_1}(A) \cong 0.804$$

$$E_2^{s_1}(A) \cong 1.598 \leq E_{\frac{1}{2}}^{s_1}(A) \cong 2.234$$

قضیه ۸.۳. اگر $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ افرازهایی روی E باشند و $A \prec B$ ، آنگاه

$$H_q^s(A) \leq H_q^s(B) \quad \text{آ}$$

$$E_q^s(A) \leq E_q^s(B) \quad \text{ب}$$

اثبات. آ $A \prec B$ است؛ پس برای هر $a_i \in A$ ، زیرمجموعه‌ای از $\{1, \dots, m\}$ مانند α_i وجود دارد؛ به طوری که $a_i = \bigoplus_{j \in \alpha_i} b_j$ بوده و برای هر $i, j \neq i$ ، $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ و $\bigcup_{i=1}^n \alpha_i = 1, \dots, m$ است. اگر $0 < q < 1$ باشد؛ آنگاه

$$\sum_{i=1}^n s(a_i)^q = \sum_{i=1}^n s(\bigoplus_{j \in \alpha_i} b_j)^q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in \alpha_i} s(b_j) \right)^q \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \alpha_i} s(b_j)^q = \sum_{j=1}^m s(b_j)^q$$

است؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \leq \frac{1}{1-q} \log \sum_{j=1}^m s(b_j)^q = H_q^s(B)$$

اگر $1 < q$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n s(a_i)^q = \sum_{i=1}^n s(\bigoplus_{j \in \alpha_i} b_j)^q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in \alpha_i} s(b_j) \right)^q \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \alpha_i} s(b_j)^q = \sum_{j=1}^m s(b_j)^q$$

و رابطه $H_q^s(A) \leq H_q^s(B)$ برقرار است.

□

ب- با توجه به صعودی بودن تابع نمایی و قسمت آ، اثبات واضح است.

فرض کنید $C = A \vee B = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از A و B باشد. از آنجایی که $A, B \prec C$ می‌باشند؛ بنابراین روابط $\max\{H_q^s(A), H_q^s(B)\} \leq H_q^s(C)$ و

$\max\{E_q^s(A), E_q^s(B)\} \leq E_q^s(C)$ یک نتیجه طبیعی از قضیه قبل خواهد بود. همچنین اگر $A \prec B$ و D یک

افراز دلخواه باشد؛ بنا به لم ۲-۶، $A \dot{\vee} B \preceq B \dot{\vee} D$ بوده و قضیه قبل نتیجه می‌دهد:

$$E_q^s(A \dot{\vee} D) \leq E_q^s(B \dot{\vee} D) \quad \text{و} \quad H_q^s(A \dot{\vee} D) \leq H_q^s(B \dot{\vee} D)$$

قضیه ۹.۳. فرض کنید $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس مستقل از $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ باشد. آنگاه

$$H_q^s(C) = H_q^s(A) + H_q^s(B) \quad \bar{A}$$

$$E_q^s(C) = E_q^s(A)E_q^s(B) \quad \bar{B}$$

اثبات. آ- چون C یک الحاق ریس مستقل است؛ پس $s(c_{ij}) = s(a_i)s(b_j)$ می‌باشد و

$$\begin{aligned} H_q^s(C) &= \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(s(c_{ij}) \right)^q = \frac{1}{1-q} \left(\log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \log \sum_{j=1}^m (s(b_j))^q \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q + \log \sum_{j=1}^m (s(b_j))^q \right) = H_q^s(A) + H_q^s(B). \end{aligned}$$

□

ب- اثبات واضح است.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $C = \{c_j : j = 1, \dots, m\}$ افزایشی روی E باشند و $A \subseteq C$ در این صورت

$$\bar{A} \quad \text{اگر } 0 < q < 1 \text{؛ آنگاه } H_q^s(A) \leq H_q^s(C) \text{ است.}$$

$$\bar{B} \quad \text{اگر } 1 < q \text{؛ آنگاه } H_q^s(A) \geq H_q^s(C) \text{ می‌باشد.}$$

اثبات. آ- $A \subseteq C$ است؛ پس برای هر a_i عنصر c_j و $b_{ij} \in E$ وجود دارند؛ بطوریکه $b_{ij} \oplus a_i = c_j$ و $s(b_{ij}) = 0$ است. پس $\{s(a_i) : i = 1, \dots, n\} \subseteq \{s(c_j) : j = 1, \dots, m\}$ می‌باشد و چون $0 < q < 1$ است، روابط زیر برقرارند:

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \leq \frac{1}{1-q} \log \sum_{j=1}^m (s(c_j))^q = H_q^s(C)$$

ب- با استدلال مشابه قسمت آ و این مطلب که $1 < q$ است، نتیجه $H_q^s(A) \geq H_q^s(C)$ حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $C = \{c_j : j = 1, \dots, m\}$ افزایشی روی E و $A \subseteq C$ باشد.

$$\bar{A} \quad \text{اگر } 0 < q < 1 \text{ باشد، آنگاه } E_q^s(A) \leq E_q^s(C) \text{ است.}$$

$$\bar{B} \quad \text{اگر } 1 < q \text{ باشد، آنگاه } E_q^s(A) \geq E_q^s(C) \text{ می‌باشد.}$$

□

اثبات. با توجه به صعودی بودن تابع نمایی و قضیه ۹-۳، اثبات‌ها واضح هستند.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنید $C = E \otimes F$ جبر مؤثر حاصل ضربی از جبرهای مؤثر F, E و $s_E^q : E \rightarrow [0, 1]$ و $s_F^q : F \rightarrow [0, 1]$ ، $s_p : E \otimes F \rightarrow [0, 1]$ ، بترتیب نگاشت‌های حالت از E, F, C ، $A = \{(e_i, f_i)\}_{i=1}^n$ و $A_E = \{e_i\}_{i=1}^n$ ، $A_F = \{f_i\}_{i=1}^n$ بترتیب افزایشی از E, F, C و نگاشت s_p در شرط $s_p((e, f)) = s_E(e)s_F(f)$ صدق کند.

$$\bar{A} \quad \text{اگر } 0 < q < 1 \text{، آنگاه } H_q^s(A) \leq H_q^s(A_E) + H_q^s(A_F)$$

ب- اگر $0 < q < 1$ ، آنگاه $E_q^s(A) \leq E_q^s(A_E) + E_q^s(A_F)$

پ- اگر $1 < q < \infty$ ، آنگاه $H_q^s(A) \geq H_q^s(A_E) + H_q^s(A_F)$

ت- اگر $1 < q < \infty$ ، آنگاه $E_q^s(A) \geq E_q^s(A_E)E_q^s(A_F)$

اثبات. از آنجایی که $s_p((e, f)) = s_E(e)s_F(f)$ است؛ پس روابط زیر برقرارند:

$$\sum_{i=1}^n (s_p(e_i, f_i))^q = \sum_{i=1}^n (s_E(e_i)s_F(f_i))^q \leq \sum_{i=1}^n (s_E(e_i))^q \sum_{i=1}^n (s_F(f_i))^q$$

آ- $0 < q < 1$ است؛ پس

$$\begin{aligned} H_q^s(A) &= \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_p(e_i, f_i))^q = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_E(e_i)s_F(f_i))^q \\ &\leq \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_E(e_i))^q + \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_F(f_i))^q = H_q^s(A_E) + H_q^s(A_F). \end{aligned}$$

ب- بنا به قسمت قبل و صعودی بودن تابع نمایی، اثبات واضح است.

پ- $1 < q < \infty$ است، پس

$$\begin{aligned} H_q^s(A) &= \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_p(e_i, f_i))^q = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_E(e_i)s_F(f_i))^q \\ &\geq \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_E(e_i))^q + \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s_F(f_i))^q = H_q^s(A_E) + H_q^s(A_F) \end{aligned}$$

د- بنا به قسمت قبل و صعودی بودن تابع نمایی، اثبات واضح است. $\square$

۴ آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی افزارهای جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس

در این بخش، آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی افزارهای جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس معرفی شده و ثابت شده که آنتروپی شرطی رنی در نقطه $x = 1$ به آنتروپی شانون همگراست. همچنین ثابت شده است که آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی نسبت به q نزولی هستند.

فرض کنید $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار روی مجموعه متناهی M باشد. $\|f\|_q = (\sum_{x \in D} |f(x)|^q)^{\frac{1}{q}}$ برای $1 \leq q \leq \infty$ یک q -نرم و برای $0 < q < 1$ یک $-q$ -شبه نرم است.

فرض کنید $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از افزارهای $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j \mid j = 1, \dots, m\}$ روی E و $b_j \in B$ یک عنصر ثابت باشد. تابع $s_{A|b_j}: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ با ضابطه $s_{A|b_j}(a_i) = s(a_i|b_j) = \frac{s(c_{ij})}{s(b_j)}$ را در نظر گرفته و $\|s_{A|b_j}\|_q = (\sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q)^{\frac{1}{q}}$ می‌باشد.

همچنین

$$\sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) = \sum_{i=1}^n \frac{s(c_{ij})}{s(b_j)} = \frac{1}{s(b_j)} \sum_{i=1}^n s(c_{ij}) = \frac{s(b_j)}{s(b_j)} = 1.$$

تعریف ۱.۴. فرض کنید $q \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ و $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ و E روی $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از A و B باشد. آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی از مرتبه q به ترتیب بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$H_q^s(A|B) = \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|S_{A|b_j}\|_q \right) \quad (5)$$

$$E_q^s(A|B) = e^{H_q^s(A|B)} \quad (6)$$

فرض کنید $q \in (0, 1)$ روابط زیر برقرارند:

$$\|S_{A|b_j}\|_q = \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) = \frac{\sum_{i=1}^n s(c_{ij})}{s(b_j)} = \frac{s(b_j)}{s(b_j)} = 1$$

پس

$$H_q^s(A|B) = \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|S_{A|b_j}\|_q \right) \geq \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \right) = 0$$

همچنین $E_q^s(A|B) = e^{H_q^s(A|B)} \geq e^0 = 1$

اگر $q \in (1, \infty)$ باشد با استدلالی مشابه، می‌توان ثابت کرد $H_q^s(A|B) \geq 1$ و $E_q^s(A|B) \geq 1$. اگر $B = \{1\}$ یک افراز بدیهی و $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ یک افراز دلخواه باشد، آنگاه $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, j = 1\}$ یک الحاق منحصر بفرد است و برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $a_i = c_{i1}$ می‌باشد و روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} H_q^s(A|B) &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|S_{A|b_j}\|_q \right) = \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s(c_{ij})}{s(b_j)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &= \frac{q}{1-q} \log \left(\left(\sum_{i=1}^n (s(c_{i1}))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) = \frac{q}{1-q} \log \left(\left(\sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \right) = H_q^s(A) \end{aligned}$$

بنابراین $E_q^s(A|B) = E_q^s(A)$ است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ افرازهایی روی E و $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از A و B باشد. آنگاه

$$\lim_{q \rightarrow 1} H_q^s(A|B) = - \sum_{i,j} s(c_{ij}) \log \left(\frac{s(c_{ij})}{s(b_j)} \right) = H(A|B) \quad \text{آ}$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} E_q^s(A|B) = e^{H(A|B)} = E(A|B) \quad \text{ب}$$

اثبات. آ- برای هر $q \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ روابط زیر برقرارند:

$$H_q^s(A|B) = \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|S_{A|b_j}\|_q \right) = - \frac{\log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|S_{A|b_j}\|_q \right)}{1 - \frac{1}{q}} = - \frac{f(q)}{g(q)}$$

توابع $f(q)$ و $g(q)$ دیفرانسیل پذیر بوده و $\lim_{q \rightarrow 1} g(q) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q} = 0$ است. همچنین

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} f(q) &= \lim_{q \rightarrow 1} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right) = \lim_{q \rightarrow 1} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &= \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \lim_{q \rightarrow 1} \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q \right)^{1/q} \right) = \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \sum_{i=1}^n \frac{s(c_{ij})}{s(b_j)} \right) = \log(1) = 0. \end{aligned}$$

می‌باشد. بنابراین شرایط قاعده هوپیتال برقرارند و $\lim_{q \rightarrow 1} H_s^q(A|B) = -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(q)}{g(q)} = -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{f'(q)}{g'(q)}$ است. $g'(q) = \frac{1}{q^2}$ و $f'(q) = \frac{u'(q)}{u(q) \ln 2}$ است که $u(q) = \sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q$ مشتق $u(q)$ بصورت

$$u'(q) = \sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \cdot \left[-\frac{1}{q^2} \ln \sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q + \frac{1}{q \sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q} \sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^q \ln s(a_i|b_j) \right]$$

و روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} g'(q) &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q^2} = 1 \\ \lim_{q \rightarrow 1} f'(q) &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{u'(q)}{u(q) \ln 2} = \frac{\lim_{q \rightarrow 1} u'(q)}{\lim_{q \rightarrow 1} u(q) \ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\| \cdot \left[-\ln \sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) + \frac{1}{\sum_{i=1}^n s(a_i|b_j)} \sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) \ln s(a_i|b_j) \right] \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^m s(b_j) \left[\sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) \ln s(a_i|b_j) \right] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s(c_{ij}) \log(s(a_i|b_j)) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{q \rightarrow 1} E_q^s(A|B) = -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{f'(q)}{g'(q)} = -\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s(c_{ij}) \log(s(a_i|b_j)) = H(A|B)$$

ب- تابع نمایی یک تابع پیوسته است، پس

$$\lim_{q \rightarrow 1} H_q^s(A|B) = \lim_{q \rightarrow 1} e^{H_q^s(A|B)} = e^{\lim_{q \rightarrow 1} H_q^s(A|B)} = e^{H(A|B)} = E(A|B)$$

□

در قضیه بعد ثابت می‌شود آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی نسبت به q نزولی می‌باشند.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ افرازهای روی E و $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از A و B باشد. اگر $q_1 \leq q_2$ ، آنگاه

$$H_{q_1}^s(A|B) \leq H_{q_1}^s(A|B) \quad \bar{I}$$

$$E_{q_1}^s(A|B) \leq E_{q_1}^s(A|B) \quad \bar{b}$$

اثبات. آ- فرض کنید $q_1, q_2 \in (1, \infty)$ و برای هر $x \in [0, \infty)$ $\rho(x) = x^{\frac{q_2(q_1-1)}{q_1(q_2-1)}}$ با توجه به نامساوی $q_1 \leq q_2$ رابطه $\frac{q_2(q_1-1)}{q_1(q_2-1)} \leq 1$ برقرار بوده و نتیجه می‌دهد ρ یک تابع مقعر است. فرض کنید $\alpha_j = s(b_j)$ و برای $j = 1, 2, \dots, m$ $x_j = \|s_{A|b_j}\|_{q_2}$ باشد. بنا نامساوی ینسن^۱ روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_{q_2} \right)^{\frac{q_2}{q_2-1}} &= \left[\left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_{q_2} \right)^{\frac{q_2(q_1-1)}{q_1(q_2-1)}} \right]^{\frac{q_1}{q_1-1}} \\ &\geq \left[\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\|s_{A|b_j}\|_{q_2} \right)^{\frac{q_2(q_1-1)}{q_1(q_2-1)}} \right]^{\frac{q_1}{q_1-1}} = \left[\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^{q_2} \right)^{\frac{(q_1-1)}{q_1(q_2-1)}} \right]^{\frac{q_1}{q_1-1}} \quad (*) \\ &= \left[\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) (s(a_i|b_j))^{q_2-1} \right)^{\frac{(q_1-1)}{q_1(q_2-1)}} \right]^{\frac{q_1}{q_1-1}} \end{aligned}$$

حال برای هر $x \in [0, \infty)$ تابع $\sigma(x) = x^{\frac{q_1-1}{q_2-1}}$ را در نظر بگیرید. چون $q_1 \leq q_2$ است، بنابراین رابطه $\frac{q_1-1}{q_2-1} \leq 1$ برقرار بوده و تابع $\sigma(x)$ یک تابع مقعر است. فرض کنید $a_i = s(a_i|b_j)$ و برای $i = 1, 2, \dots, n$ $x_j = s(a_i|b_j)^{q_2-1}$ باشد. با توجه به نامساوی ینسن روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n s(a_i|b_j) \right) (s(a_i|b_j))^{q_2-1} \right)^{\frac{(q_1-1)}{q_1(q_2-1)}} \right]^{\frac{q_1}{q_1-1}} \\ &\geq \left[\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i|b_j))^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right]^{\frac{q_1}{1-q_1}} = \left[\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_{q_1} \right]^{\frac{q_1}{q_1-1}} \quad (**) \end{aligned}$$

با توجه به روابط (*) و (**) رابطه $H_{q_2}^s(A) \leq H_{q_1}^s(A)$ ثابت می‌شود. به همین صورت برای حالت $q_1 \in (0, 1)$ و $q_2 \in (1, \infty)$ اثبات از رابطه تعدی بدست می‌آید.

□

ب- اثبات واضح است.

قضیه ۴.۴. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ افزای روی E و $C = \{c_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از A و B باشد. آنگاه

$$\bar{I} H_q^s(A|B) \leq \bar{I} H_q^s(A)$$

$$E_q^s(A|B) \leq E_q^s(A) \quad \text{ب-}$$

اثبات. آ- فرض کنید $q \in (1, \infty)$ باشد. طبق تعریف، $s(a_i) = s(\oplus_{j=1}^m c_{ij}) = \sum_{j=1}^m s(c_{ij})$ است. با

¹Jensen

توجه به خاصیت نامساوی مثلثی یک q -نرم، روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m s(c_{ij}) \right)^q = \left(\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m s(c_{ij}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q \\ &= \left(\left\| \sum_{j=1}^m s_{A \vee b_j} \right\|_q \right)^q \leq \left(\sum_{j=1}^m \|s_{A \vee b_j}\|_q \right)^q = \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right)^q \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} H_q^s(A) &= \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \geq \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right)^q \\ &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right) = H_q^s(A|B) \end{aligned}$$

□

ب- اثبات واضح است.

قضیه ۵.۴. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, m\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ افزایشی روی E و $C = \{c_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس مستقل از A و B باشد. آنگاه $E_q^s(A|B) = E_q^s(A)$ و $H_q^s(A|B) = H_q^s(A)$ می‌باشند.

اثبات. چون C یک الحاق ریس مستقل است، پس $s(c_{ij}) = s(a_i)s(b_j)$ بوده و $\sum_{j=1}^m s(b_j) = 1$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} H_q^s(A|B) &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s(c_{ij})}{s(b_j)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s(a_i)s(b_j)}{s(b_j)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \right) = H_q^s(A) \end{aligned}$$

و $E_q^s(A|B) = e^{H_q^s(A|B)} = e^{H_q^s(A)} = E_q^s(A)$ است.

□

قضیه ۶.۴. فرض کنید $C = \{c_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ و $\beta = \max \left\{ \frac{1}{s(b_j)} : s(b_j) \neq 0 \right\}$ باشد. آنگاه

$$H_q^s(C) \leq H_q^s(A|B) + \log \beta \quad \bar{A}$$

$$E_q^s(C) \leq \beta e^{\ln 2} E_q^s(A|B) \quad \text{ب-}$$

اثبات. آ- فرض کنید برای هر $\sigma(x) = x^q, x \in [0, \infty)$ و برای هر $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ و $c_j = s(b_j)$ ، $a_j = \|s_{A|b_j}\|_q$ باشد.

اگر $q \in (0, 1)$ و $\delta = \{j : s(b_j) \neq 0\}$ باشد، $\sigma(x)$ یک تابع مقعر بوده و نامساوی ینسن نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right)^q &\geq \sum_{j=1}^m s(b_j) (\|s_{A|b_j}\|_q)^q \\ &= \sum_{j \in \delta} s(b_j) \sum_{i=1}^n \frac{s^q(c_{ij})}{s^q(b_j)} = \sum_{j \in \delta} \frac{1}{s^{q-1}(b_j)} \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}) \geq \sum_{j \in \delta} \beta^{q-1} \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} H_q^s(A | B) &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right) \geq \frac{1}{1-q} \log \left(\beta^{q-1} \sum_{j \in \delta} \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}) \right) \\ &= -\log \beta + \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}) \right) = -\log \beta + H_q^s(C). \end{aligned}$$

اگر $q \in (0, \infty)$ باشد، σ یک تابع محدب است و نامساوی ینسن روابط زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right)^q &\leq \sum_{j=1}^m s(b_j) (\|s_{A|b_j}\|_q)^q \\ &= \sum_{j \in \delta} s(b_j) \sum_{i=1}^n \frac{s^q(c_{ij})}{s^q(b_j)} = \sum_{j \in \delta} \frac{1}{s^{q-1}(b_j)} \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}) \leq \sum_{j \in \delta} \beta^{q-1} \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$q \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right) \leq (q-1) \log \beta + \log \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij})$$

چون برای هر $q \in (1, \infty)$ ، $1-q < 0$ ، پس

$$\begin{aligned} H_q^s(A | B) &= \frac{q}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m s(b_j) \|s_{A|b_j}\|_q \right) \geq \frac{q-1}{1-q} \log \beta + \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s^q(c_{ij}) \right) \\ &= -\log \beta + H_q^s(C). \end{aligned}$$

$$E_q^s(C) = e^{H_q^s(C)} \leq e^{H_q^s(A|B) + \log \beta} = \beta e^{\ln 2 E_q^s(A|B)} \quad \text{ب.}$$

□

نتیجه ۷.۴. اگر

$$\alpha = \max \left\{ \frac{1}{s(a_i)} : s(a_i) \neq 0 \right\} \quad \beta = \max \left\{ \frac{1}{s(b_j)} : s(b_j) \neq 0 \right\}$$

و $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ باشد، آنگاه

$$H_q^s(C) \leq H_q^s(B | A) + \log \alpha \quad \text{آ}$$

$$H_q^s(C) \leq H_q^s(B) + \log \alpha \quad \text{ب.}$$

$$\text{پ- } H_q^s(C) \leq H_q^s(A) + \log \beta$$

$$\text{ت- } E_q^s(C) \leq \alpha e^{\ln \alpha} E_q^s(B | A)$$

$$\text{ث- } E_q^s(C) \leq \alpha e^{\ln \alpha} E_p^s(B)$$

$$\text{ج- } E_q^s(C) \leq \beta e^{\ln \beta} E_q^s(A)$$

قضیه ۸.۴. فرض کنید $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $C = \{c_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از A و B ، $D = \{d_k : k = 1, \dots, l\}$ افرازهایی روی E ، $F = \{f_{kj} : 1 \leq k \leq l, 1 \leq j \leq m\}$ یک الحاق ریس از D و B و $A \subseteq D$ باشد.

$$\text{آ- اگر } 0 < q < 1, \text{ آنگاه } H_q^s(A | B) \leq H_q^s(D | B)$$

$$\text{ب- اگر } q < 1, \text{ آنگاه } H_q^s(A | B) \geq H_q^s(D | B)$$

$$\text{پ- اگر } 0 < q < 1, \text{ آنگاه } H_q^s(A) \leq H_q^s(C)$$

$$\text{ت- اگر } q < 1, \text{ آنگاه } H_q^s(A) \geq H_q^s(C)$$

اثبات. آ- $A \subseteq C$ است، پس برای هر a_i عناصر c_j و $b_{ij} \in E$ وجود دارند به طوریکه $b_{ij} \oplus a_i = c_j$ و $s(b_{ij}) = 0$. پس $\{s(a_i) : i = 1, \dots, n\} \subseteq \{s(c_j) : j = 1, \dots, m\}$ و چون $0 < q < 1$ است، روابط زیر برقرارند:

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \leq \frac{1}{1-q} \log \sum_{j=1}^m (s(c_j))^q = H_q^s(C)$$

ب- با استدلال مشابه قسمت آ و این مطلب که $q > 1$ است، نتیجه $H_q^s(A) \geq H_q^s(C)$ حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۹.۴. فرض کنید $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $C = \{c_j : j = 1, \dots, m\}$ افرازهایی روی E و $A \subseteq D$ باشد،

$$\text{آ- اگر } 0 < q < 1, \text{ آنگاه } E_q^s(A) \leq E_q^s(C)$$

$$\text{ب- اگر } q < 1, \text{ آنگاه } E_q^s(A) \geq E_q^s(C)$$

اثبات. با توجه به صعودی بودن تابع نمایی و قضیه ۳-۹، اثبات‌ها واضح هستند. $\square$

قضیه ۱۰.۴. اگر $A = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ و $B = \{b_j : j = 1, \dots, m\}$ افرازهایی روی E و $A \prec B$ باشد، آنگاه

$$\text{آ- } H_q^s(A) \leq H_q^s(B)$$

$$\text{ب- } E_q^s(A) \leq E_q^s(B)$$

اثبات. آ- $A \prec B$ است، پس برای هر $\alpha_i \in A$ ، زیر مجموعه‌ای از $\{1, \dots, m\}$ مانند α_i وجود دارد بطوریکه $\alpha_i = \bigoplus_{j \in \alpha_i} b_j$ بوده و برای هر $i, i \neq j$ ، $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ و $\bigcup_{i=1}^n \alpha_i = \{1, \dots, m\}$ است. اگر $0 < q < 1$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n s(a_i)^q = \sum_{i=1}^n s(\bigoplus_{j \in \alpha_i} b_j)^q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in \alpha_i} s(b_j) \right)^q \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \alpha_i} s(b_j)^q = \sum_{j=1}^m s(b_j)^q$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$H_q^s(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^n (s(a_i))^q \leq \frac{1}{1-q} \log \sum_{j=1}^m s(b_j)^q = H_q^s(B)$$

اگر $q > 1$ ، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n s(a_i)^q = \sum_{i=1}^n \mu(\oplus_{j \in \alpha_i} b_j)^q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in \alpha_i} s(b_j) \right)^q \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \alpha_i} s(b_j)^q = \sum_{j=1}^m s(b_j)^q$$

و رابطه $H_q^s(A) \leq H_q^s(B)$ برقرار است.
ب- با توجه به صعودی بودن تابع نمایی و قسمت الف، اثبات واضح است.

□

بحث و نتیجه‌گیری

هدف این مقاله تعمیم نتایج مربوط به آنتروپی شانون روی جبر موثر با خاصیت تجزیه ریس به آنتروپی رنی بود. در بخش ۳، مفاهیم آنتروپی رنی و آنتروپی نمایی رنی افزای‌های یک جبر مؤثر با خاصیت تجزیه ریس معرفی و خواص آنها مورد بررسی قرار گرفت. در بخش ۴، آنتروپی شرطی رنی و آنتروپی نمایی شرطی رنی ساختار جبری مورد مطالعه تعریف و ثابت شد که این آنتروپی‌ها در حالت حدی $q \rightarrow 1$ با آنتروپی شانون برابر می‌باشند. علاوه بر این، نشان داده شده است که $H_q^s(A)$ ، $E_q^s(A)$ و همین‌طور $H_q^s(A|B)$ ، $E_q^s(A|B)$ نسبت به پارامتر q کاهشی می‌باشند.

مراجع

- [1] Shannon C., A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal, 27(1948) 379-423, and 623-656.
- [2] Liu, Y., Liu, C.J., Wang, D.H. , Understanding Atmospheric Behaviour in Terms of Entropy: a review of applications of the second law of thermodynamics to meteorology, Entropy, 13(2011) 211–40.
- [3] Fuhrman, S., Cunningham, M. J., Wen, X., Zweiger, G., Seilhamer, J. J., Somogyi, R., The application of Shannon entropy in the identification of putative drug targets, BioSystems, 55 (2000) 5–14.
- [4] Zhou, R., Cai, R., Tong, G., Applications of Entropy in Finance: A Review, Entropy, 15(2013) 4909-4931.
- [5] Eguiraun, H., López-de-Ipiña, K., Martinez, I., Application of Entropy and Fractal Dimension Analyses to the Pattern Recognition of Contaminated Fish Responses in Aquaculture, Entropy, 16(2014) 6133-6151.
- [6] Ebrahimzadeh, A., Eslami Giski, Z., Tsallis entropy of dynamical systems –a general scheme, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 35(2018) 1119–1126.
- [7] Asadian, M. H., Ebrahimzadeh, A., On local Tsallis entropy of relative dynamical systems, Reports on Mathematical Physics, 81 (2018) 283-302.

- [8] Eslami Giski, Z., Ebrahimi, M., Entropy on Semi MV-Algebra, *Malysian Journal of Mathematical Sciences*, 10(1) (2016) 83-100.
- [9] Eslami Giski, Z., Ebrahimzadeh, A., Unifying Entropies of Quantum Logic Based on Rényi Entropies. *Reports on Mathematical Physics*, 83 (2019), 305-327.
- [10] Rényi, A., On Measures of Entropy and Information. In: Neyman, J. (ed.) *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, I (1961) 547–561.
- [11] Sahoo, P. K., Wilkins, C., Yeage, J., Threshold selection using Rényi's entropy, *Pattern Recognition*, 30 (1), (1997) 71-84.
- [12] Sahoo, P. K., Arora, G., A thresholding method based on two dimensional Rényi's entropy, *Pattern Recognition*, 37, (2004) 1149-1161.
- [13] Cachin, C., Entropy measures and unconditional security in cryptography, Ph.D. Thesis, ETH Zurich " 1997.
- [14] Arikan, E., An Inequality on Guessing and its Application to Sequential Decoding, *IEEE Transactions on Information Theory*. 42(1) (1996) 99–105.
- [15] Li, Q.Sh. Su, W.Y. Zou, J., Comparing two evidences of quantum chaos, *Chaos Solitons Fractals*, 14 (2002) 975–979.
- [16] Ormos, M., Zibriczky, D., Entropy-Based Financial Asset Pricing, *PLOS ONE*, 9(12) (2004).
- [17] Foulis, D. J., Bennett, M. K., Effect algebras and unsharp quantum logics, *Foundation of Physics* 24, (1994) 1331- 1352.
- [18] Di Nola, A., Dvurečenskij, A., Hyčko, M., Manara, C., Entropy on Effect Algebras with the Riesz Decomposition Property I: Basic Properties, *Kybernetika*, 41(2005)143–160.
- [19] Eslami Giski, Z., Ebrahimi, M., Entropy of countable partitions on effect algebras with the Riesz decomposition property and weak sequential effect algebras, *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 12(2015) 20–39.
- [20] Eslami Giski, Z., Ebrahimzadeh, A., An Introduction of Logical Entropy on Sequential Effect Algebra, *Indagationes Mathematicae*, 28 (2017) 928- 937.
- [21] Eslami Giski, Z., Ebrahimzadeh, A., Markechova, D., Logical entropy on effect algebras with the Riesz decomposition property, *Eur. Phys. J. Plus* , 133 (2018), 286 DOI 10.1140/epjp/i2018-12107-x.
- [22] Dvurečenskij, A., Pulmannová, S., *New trends in Quantum Structures*; Kluwer Acad. Publishers: Dordrecht and Ister Science, Bratislava, 2000.
- [23] Greechie, R. J., Orthomodular lattices admitting no states. *J. Comb. Theory*, 10(1971)119-132.