

Metallic vector fields on three dimensional Lie groups

Masoumeh Khalili⁽¹⁾, Ghodrattallah Fasihi-Ramandi⁽²⁾¹ and Shahroud Azami⁽³⁾

^{(1),(2),(3)} Department of pure mathematics, Faculty of science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

Received: 3 September 2025

Accepted: 14 February 2026

Published online: 12 June 2026

Abstract: Due to their simple structure, Lie groups and homogeneous spaces are consistently utilized as testing grounds for geometric conjectures and for investigating new concepts. In this paper, we define the notion of metallic vector fields. Subsequently, we examine the existence of these fields on three-dimensional homogeneous manifolds equipped with Riemannian and Lorentzian metrics

Keywords: Riemannian Metrics, Lorentzian Manifolds, Metallic Vector Fields.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (G. Fasihi-Ramandi) fasihi@sci.ikiu.ac.ir, (S. Azami) azami@sci.ikiu.ac.ir



میدان‌های برداری متالیک در گروه‌های لی سه بعدی

معصومه خلیلی^(۱) قدرت اله فصیحی رامندی^(۲) و شاهرود اعظمی^(۳)^{(۱)،(۲)،(۳)} گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۶/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۳/۲۲

چکیده: گروه‌های لی و فضاهای همگن به علت داشتن ساختار ساده، همواره جهت آزمودن حدس‌های هندسی و بررسی مفاهیم جدید مدنظر قرار دارند. در این مقاله، مفهوم میدان‌های برداری متالیک را تعریف می‌کنیم. سپس، وجود این میدان‌ها را در منیفلدهای همگن سه بعدی مجهز به مترهای ریمانی و لورنتزی بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: متر ریمانی، منیفلد لورنتزی، میدان‌های برداری متالیک.

۱ مقدمه

مسئله شبه سهمی‌وار مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2S, \quad g(0) = g_0,$$

که g متر و S انحنا ی ریچی وابسته به آن است. این معادله که شار ریچی نامیده می‌شود توسط هامیلتون^۲ معرفی شد [۸، ۹]. جواب‌های خود-مشابه شار ریچی را سالیتون‌های ریچی می‌نامند. در هندسه دیفرانسیل، چنین جواب‌هایی مورد علاقه و توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است [۶، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۶]. در واقع، یک منیفلد شبه-ریمانی (M, g) را سالیتون ریچی گویند هرگاه یک میدان برداری هموار $V \in \mathcal{X}(M)$ و یک اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ موجود باشد طوری که

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_V g + S = \lambda g,$$

^۱نویسنده مسئول مقاله(G. Fasihi-Ramandi) fasihi@sci.ikiu.ac.ir, (S. Azami) azami@sci.ikiu.ac.ir^۲Hamilton

که در آن $\mathcal{L}$ نشان‌دهنده مشتق لی و S تانسور انحنای ریچی است. تعمیم‌های زیادی نیز از سالیتون ریچی انجام شده است. به عنوان مثال، هرگاه h, λ دو تابع هموار روی M باشند معادله زیر

$$h\mathcal{L}_V g + S = \lambda g,$$

h -سالیتون تقریباً ریچی نامیده می‌شود که کاربردهای هندسی و فیزیکی دارند. سپس، شار هندسی هذلولوی، که یک معادله تحولی شبیه معادلات موج در $\mathbb{R}^n$ است معرفی شد. مفهوم شار هندسی هذلولوی، در [۵] برای نخستین بار مطرح شده است. جواب‌های خود-متشابه شار هذلولوی که سالیتون هذلولوی نامیده می‌شوند، حاوی اطلاعات مهم‌تری از شار ریچی مرتبه اول هستند زیرا در حالات خاص مفهوم شار ریچی و معادله انیشتین را در بر دارند [۱۲، ۱۳].

یک منیفلد شبه-ریمانی (M, g) را سالیتون ریچی هذلولوی گویند هرگاه یک میدان برداری هموار $V \in \mathcal{X}(M)$ و اسکالرهایی $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ موجود باشد طوری که

$$\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V g + \lambda \mathcal{L}_V g + S = \mu g.$$

اعظمی و همکاران، به تحلیل نظریه‌های مختلفی از شار ریچی هذلولوی پرداخته‌اند [۱، ۲، ۷]. در [۷] سالیتون‌های شار ریچی هذلولوی روی منیفلدهای لورنتزی همگن مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای جزئیات بیشتری از منیفلدهای لورنتزی، خواننده را به مراجع [۳، ۱۵، ۱۷] ارجاع می‌دهیم.

با توجه به موارد بالا، یکی از حالاتی که مفهوم شار ریچی و یا تعمیم‌های آن و شار ریچی هذلولوی بر هم منطبق می‌شوند، این است که میدان برداری پتانسیل V یک میدان برداری متالیک باشد.

تعریف ۱.۱. میدان برداری V در یک منیفلد شبه-ریمانی (M, g) را یک میدان برداری متالیک گوئیم هرگاه:

$$\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V g + \alpha \mathcal{L}_V g = \beta g. \quad (1.1)$$

برای اسکالرهایی $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

وجه تسمیه این میدان‌ها از آنجا ناشی شده است که اگر یک میدان برداری همدیس ($\mathcal{L}_V g = xg$, $x \in \mathbb{R}$) هم‌زمان یک میدان برداری متالیک باشد، معادله درجه دوم $x^2 + \alpha x - \beta = 0$ موسوم به معادله متالیک ایجاد می‌شود.

هرگاه $\alpha = 0$ تعریف میدان ۲-همدیس ایجاد می‌شود و هرگاه $\alpha = \beta = 0$ آنگاه V را میدان ۲-کیلینگ می‌گویند. می‌توان دید که این میدان‌های برداری در ارتباط با مفهوم سالیتون‌های یامابه با انحنای اسکالر ثابت نیز هستند. چنین میدان‌هایی هرگاه به عنوان پتانسیل برای سالیتون هذلولوی قرار بگیرند خواص موجی و رفتار گرمایی متر شبه-ریمانی را به هم مربوط می‌سازند. بنابراین، در امتداد منحنی‌های انتگرال اینگونه میدان‌ها ویژگی‌های گرمایی و موجی مترها یکسان خواهد بود.

از طرف دیگر، گروه‌های لی و فضاها همگن به علت ساختار ساده‌ای که دارند همواره جهت آزمودن حدس‌ها و مطالعه ساختارهای هندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با این ایده، در این مقاله سعی داریم میدان‌های برداری متالیک و غیر بدیهی را روی گروه‌های لی سه بعدی بدست آوریم. این مقاله به شکل زیر تحریر شده است:

بعد از مقدمه در بخش ۱، میدان‌های برداری متالیک را روی منیفلدهای ریمانی سه بعدی در بخش ۲ مطالعه می‌کنیم. همچنین، این میدان‌های برداری در حالت منیفلدهای لورنتزی در بخش ۳ مورد بررسی قرار گرفته و در بخش ۴، این میدان‌های هندسی برای جبرهای لی غیر تک‌مدولی روی منیفلدهای لورنتزی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۲ رده‌بندی میدان‌های متالیک با متر ریمانی

همان‌طور که می‌دانیم گروه‌های لی ریمانی سه بعدی توسط میلنور^۱ دسته‌بندی شده‌اند [۱۴]. سکیگاوا^۲ در [۱۸]، ثابت کرده است که یک فضای سه بعدی همبند ساده و یک منیفلد همگن تام یا متقارن و یا یک گروه لی با متر

¹Milnor

²Sekigawa

ریمانی پایای چپ هستند. دسته‌بندی گروه‌های لی ریمانی سه بعدی توسط میلنور این امکان را فراهم می‌سازد که همه منیفلدهای ریمانی همگن سه بعدی را تعیین کنیم. کوردرو^۱ و پارکر^۲ با تمرکز بر گروه‌های متقارن از انحنای برشی در حالات مختلف، گروه‌های لی لورنتزی سه بعدی را به دست آورده‌اند [۴]. به ویژه، آن‌ها همه فرم‌های ممکن از یک جبر لی تک‌مدولی را به دست آورده‌اند. کالوارسو^۳ نیز مطالعاتی روی منیفلدهای لورنتزی سه بعدی انجام داده است [۳].

فرض کنید G یک گروه لی همبند سه بعدی با متر ریمانی پایای چپ باشد. حالات تک‌مدولی و غیر تک‌مدولی جبر لی وابسته به آن را به طور مجزا جهت رده‌بندی میدان‌های متالیک و پایای چپ بررسی می‌کنیم.

۱.۲ حالت تک‌مدولی

یک جهت برای جبر لی $\mathfrak{g}$ از G را در نظر می‌گیریم طوری که ضرب گروه لی را بتوان به صورت زیر نوشت

$$[Z, Y] = L[Z \times Y],$$

که L یک نگاشت خطی منحصربه‌فرد از $\mathfrak{g}$ به خودش است. جبر لی $\mathfrak{g}$ تک‌مدولی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر این نگاشت خطی، خودالحاق باشد. در این صورت، پایه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ از بردارهای ویژه L موجود است که

$$[e_1, e_2] = ce_3, \quad [e_2, e_3] = ae_1, \quad [e_3, e_1] = be_2, \quad (1.2)$$

برای ثابت‌های حقیقی a, b و c .

حال، میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}$ برای ثابتهای حقیقی x_1, x_2 و x_3 را در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه (۱.۲) به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} \circ & (a-b)x_3 & (c-a)x_2 \\ (a-b)x_3 & \circ & (b-c)x_1 \\ (c-a)x_2 & (b-c)x_1 & \circ \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ و استفاده از روابط (۱.۱) و (۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= 2x_3^2 c(c-a) - 2x_3^2 b(a-b), \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= -2x_3^2 c(b-c) + 2x_3^2 a(a-b), \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= 2x_3^2 b(b-c) - 2x_3^2 a(c-a), \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= x_1 x_2 c(b+a-2c), \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= x_1 x_3 b(a-2b+c), \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= x_2 x_3 a(c-2a+b). \end{aligned} \quad (3.2)$$

در نتیجه، با استفاده از روابط (۱.۱) و (۳.۲)، برای اینکه V یک میدان برداری متالیک باشد دستگاه معادلات جبری زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 2x_3^2 c(c-a) - 2x_3^2 b(a-b) &= \beta, \\ 2x_3^2 c(c-b) + 2x_3^2 a(a-b) &= \beta, \\ 2x_3^2 b(b-c) - 2x_3^2 a(c-a) &= \beta, \\ x_1 x_2 c(b+a-2c) + \alpha(a-b)x_3 &= \circ, \\ x_1 x_3 b(a-2b+c) + \alpha(c-a)x_2 &= \circ, \\ x_2 x_3 a(c-2a+b) + \alpha(b-c)x_1 &= \circ. \end{aligned} \quad (4.2)$$

با حل معادلات بالا، برخی جواب‌های (۴.۲) به دست می‌آیند که در قضیه زیر صدق می‌کنند.

¹Cordero

²Parker

³Calvarso

قضیه ۱.۲. فرض کنید گروه لی ریمانی سه بعدی $(G, \mathfrak{g})$ که $\mathfrak{g}$ تک‌مدول جبر لی بیان شده در رابطه (۳.۲) متناظر با پایه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد. در این صورت برخی از میدان‌های برداری متالیک پایای چپ غیربدیهی روی $\mathfrak{g}$ به صورت زیر هستند:

۱. اگر $\beta = 0, a = b = c \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, V \in \mathfrak{g}$ آنگاه $\beta = 0, a = b = c \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, V \in \mathfrak{g}$
۲. اگر $a = c \neq 0$ باشد، و $\beta = 0, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ و $\beta = 0, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$
۳. اگر $\beta = 0, a = 0, b = c \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ و $\beta = 0, a = 0, b = c \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$
۴. اگر $\beta = 0, b = c = 0, a \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ و $\beta = 0, b = c = 0, a \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$

۲.۲ حالت غیر تک‌مدولی

در این بخش، فرض می‌کنیم $\mathfrak{g}$ جبر لی ریمانی غیر تک‌مدولی سه بعدی و u هسته تک‌مدولی دو بعدی آن باشد. در این صورت، پایه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ چنان موجود است که e_1 عمود بر u و $[e_1, e_2]$ و $[e_1, e_3]$ بر یکدیگر عمود باشند. بنابراین ضرب لی وابسته به $\mathfrak{g}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= ae_2 + be_3, & [e_1, e_3] &= ce_2 + de_3, \\ [e_2, e_3] &= 0, & a + d &\neq 0, & ac + bd &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

برای ثابت‌های حقیقی a, b, c و d . متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، برای هر میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}$ داریم:

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 0 & ax_2 + cx_3 & bx_2 + dx_3 \\ ax_2 + cx_3 & -2ax_1 & -(b+c)x_1 \\ bx_2 + dx_3 & -(b+c)x_1 & -2dx_1 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، و با استفاده از (۶.۲)، داریم:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= 2(a^2 + b^2)x_1^2 + 2(c^2 + d^2)x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= 4a^2x_1^2 + 2b(b+c)x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= 2c(b+c)x_1^2 + 4d^2x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= -(3a^2 + 2b^2 + bc)x_1x_2 - (ac + cd)x_1x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= -(ab + bd)x_1x_2 - (bc + 2c^2 + 3d^2)x_1x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= (ab + cd)x_1^2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

با استفاده از (۱.۱)، (۷.۲)، معادلات زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2)x_1^2 + 2(c^2 + d^2)x_1^2 &= \beta, \\ 4a^2x_1^2 + 2b(b+c)x_1^2 - 2\alpha ax_1 &= \beta, \\ 2c(b+c)x_1^2 + 4d^2x_1^2 - 2\alpha dx_1 &= \beta, \\ (-3a^2 - 2b^2 - bc)x_1x_2 + (-ac - cd)x_1x_3 + \alpha ax_2 + \alpha cx_3 &= 0, \\ -(ab + bd)x_1x_2 - (bc + 2c^2 + 3d^2)x_1x_3 + \alpha bx_2 + \alpha dx_3 &= 0, \\ (ab + cd)x_1^2 - \alpha(b+c)x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

برخی جواب‌ها برای اثبات نتیجه بعدی به دست می‌آید.

قضیه ۲.۲. گروه لی ریمانی سه بعدی $(G, \mathfrak{g})$ که $\mathfrak{g}$ جبر لی غیر تک‌مدولی است و در رابطه (۸.۲) متناظر با پایه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ می‌باشد را در نظر بگیرید. در این صورت:

۱. اگر $a = d \neq 0, b = c = 0, \beta = 0$ باشد، آنگاه $x_2 = x_3 = 0$ و $\alpha \in \mathbb{R}, x_1 = \frac{\alpha}{2a}$
۲. اگر $a = d = 0, b = c \neq 0, \beta = 0$ باشد و آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ و $\alpha \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = x_3 = 0$
۳. اگر $a \neq 0, d = b = c = 0, \beta = 2b^2 + 2ab$ باشد، آنگاه $x_1 = \frac{\alpha}{2a}, x_2 = 0$ و $x_3 \in \mathbb{R}, x_1 = \frac{\alpha}{2a}$

۳ میدان‌های برداری متالیک تک‌مدولی با متر لورنتزی

در حالت ریمانی، پایه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ برای جبر لی وجود دارد اما در متر لورنتزی، پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ داریم و در آن e_3 یک بردار زمان‌گون است. همانند قبل جبر لی $\mathfrak{g}$ تک‌مدولی است اگر و تنها اگر اندومورفیسم L تعریف شده به صورت $[Z, Y] = L(Z \times Y)$ خودالحاق باشد [۱۶]. در این حالت، چهار فرم متمایز برای L رخ می‌دهند که به ترتیب عبارتند از

$$\mathfrak{g}_1 : \begin{bmatrix} q & p & -p \\ p & q & 0 \\ p & 0 & q \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{g}_3 : \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & r \\ 0 & -r & q \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_2 : \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{g}_4 : \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & \delta \\ 0 & -\delta & q - 2\delta \end{bmatrix},$$

به طور مجزا، تمام حالات را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ جبر لی $\mathfrak{g}_1$

برای این جبر، پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ وجود دارد که e_3 زمان‌گون است و همچنین

$$\mathfrak{g}_1 : \begin{aligned} [e_1, e_2] &= ae_1 - be_3, & [e_1, e_3] &= -ae_1 - be_2, \\ [e_2, e_3] &= be_1 + ae_2 + ae_3, & a &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، با انتخاب میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}_1$ به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 2a(x_2 - x_3) & -ax_1 & ax_1 \\ -ax_1 & 2ax_3 & -a(x_2 + x_3) \\ ax_1 & -a(x_2 + x_3) & 2ax_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

با استفاده از روابط (۱.۳) و (۲.۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= 4a^2 x_1^2 - 8a^2 x_2 x_3 - 2abx_1 x_2 + 4a^2 x_3^2 + 2abx_1 x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= 2a^2 x_1^2 - 2abx_1 x_2 - 4abx_1 x_3 - 2a^2 x_2 x_3 + 2a^2 x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= 2a^2 x_1^2 - 4abx_1 x_2 - 2abx_1 x_3 + 2a^2 x_2 x_3 - 2a^2 x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= -2a^2 x_1 x_2 + 3abx_2 x_3 + 3a^2 x_1 x_3 + abx_1^2 + abx_3^2 - 4abx_2^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= -2a^2 x_1 x_3 + 3acx_2 x_3 + 3a^2 x_1 x_2 - 4abx_1^2 + abx_3^2 - abx_2^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= -2a^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 x_3^2 + 3abx_1 x_2 + 3abx_1 x_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

بنابراین، با استفاده از روابط (۱.۱)، (۳.۳) و (۲.۳) دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 4a^2 x_1^2 - 8a^2 x_2 x_3 - 2abx_1 x_2 + 4a^2 x_3^2 + 2abx_1 x_3 + 2\alpha a(x_2 - x_3) &= \beta, \\ 2a^2 x_1^2 - 2abx_1 x_2 - 4abx_1 x_3 - 2a^2 x_2 x_3 + 2a^2 x_3^2 + 2\alpha ax_3 &= \beta, \\ 2a^2 x_1^2 - 4abx_1 x_2 - 2abx_1 x_3 + 2a^2 x_2 x_3 - 2a^2 x_3^2 + 2\alpha ax_2 &= -\beta, \\ -2a^2 x_1 x_2 + 3abx_2 x_3 + 3a^2 x_1 x_3 + abx_1^2 + abx_3^2 - 4abx_2^2 - \alpha ax_1 &= 0, \\ -2a^2 x_1 x_3 + 3abx_2 x_3 + 3a^2 x_1 x_2 - 4abx_1^2 + abx_3^2 - abx_2^2 + \alpha ax_1 &= 0, \\ -2a^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 x_3^2 + 3abx_1 x_2 + 3abx_1 x_3 - \alpha a(x_2 + x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

با حل دستگاه (۴.۳)، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_1)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_1$ جبر لی تک‌مدولی آن و تعریف شده به صورت رابطه (۴.۳) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 زمان‌گون است. در این صورت داریم:

۱. اگر $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
۲. اگر $\beta \neq 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ جواب معادله (۴.۳) نیست.

۲.۳ جبر لی $\mathfrak{g}_2$

پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ که e_3 زمان‌گون است وجود دارد چنان که

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 : [e_1, e_2] &= ce_2 - be_3, & [e_1, e_3] &= -be_2 + ce_3, \\ [e_2, e_3] &= ae_1, & c &\neq 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

حال، برای هر میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}_2$ ، مشتق لی $\mathcal{L}_V g$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 0 & cx_2 + (a-b)x_3 & (b-a)x_2 - cx_3 \\ cx_2 + (a-b)x_3 & 2cx_1 & 0 \\ (b-a)x_2 - cx_3 & 0 & 2cx_1 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

از روابط (5.3) و (6.3) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= (2c^2 - 2b^2 + 2ab)x_1^2 + (-2b(a-b) - 2c^2)x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= 4c^2 x_1^2 + 2acx_2 x_3 + 2a(a-b)x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= -4c^2 x_1^2 - 2a(b-a)x_1^2 + 2acx_2 x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= (-3c^2 + b(b-a))x_1 x_2 + (2bc - ac)x_1 x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= (-2bc + ac)x_1 x_2 + (3c^2 + b(a-b))x_1 x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= 2a(b-a)x_2 x_3 - acx_1^2 - acx_1^2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

در نتیجه، با استفاده از رابطه (۱.۱)، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (2c^2 - 2b^2 + 2ab)x_1^2 + (-2b(a-b) - 2c^2)x_1^2 &= \beta, \\ 4c^2 x_1^2 + 2acx_2 x_3 + 2a(a-b)x_1^2 + 2acx_1 &= \beta, \\ -4c^2 x_1^2 - 2a(b-a)x_1^2 + 2acx_2 x_3 + 2acx_1 &= -\beta, \\ (-3c^2 + b(b-a))x_1 x_2 + (2bc - ac)x_1 x_3 + \alpha(cx_2 + (a-b)x_3) &= 0, \\ (-2bc + ac)x_1 x_2 + (3c^2 + b(a-b))x_1 x_3 + \alpha((b-a)x_2 - cx_3) &= 0, \\ 2a(b-a)x_2 x_3 - acx_1^2 - acx_1^2 + 4bcx_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

بنا به روابط (۸.۳)، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_2)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_2$ جبر لی لورنتزی تک مدولی بیان شده به صورت رابطه (۸.۳) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 یک میدان برداری زمان‌گون است. در این صورت برخی از میدان‌های برداری متالیک پایایی چپ غیربدیهی روی $\mathfrak{g}_2$ به شرح زیر هستند:

۱. اگر $c \neq 0$ ، $a = b = 0$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = 0$ و $x_2 = x_3$ ،
۲. اگر $2c^2 a^2 - \frac{1}{4}a^2 \neq \beta$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ جواب معادله (۸.۳) نیست.

۳.۳ جبر لی $\mathfrak{g}_3$

برای پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ با بردار e_3 زمان‌گون، ضرب لی به صورت زیر است:

$$\mathfrak{g}_3 : [e_1, e_2] = -ce_3, \quad [e_1, e_3] = -be_2, \quad [e_2, e_3] = ae_1. \quad (9.3)$$

متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، با در نظر گرفتن میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}_3$ به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 0 & (a-b)x_3 & (c-a)x_2 \\ (a-b)x_3 & 0 & (b-c)x_1 \\ (c-a)x_2 & (b-c)x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

با استفاده از روابط (۹.۳) و (۱۰.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= -2c(c-a)x_1^2 - 2b(a-b)x_1^2, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= 2c(b-c)x_1^2 + 2a(a-b)x_1^2, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= 2b(b-c)x_1^2 - 2a(c-a)x_1^2, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= -c(b+a-2c)x_1x_2, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= b(-2b+c+a)x_1x_3, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= a(b+c-2a)x_2x_3.\end{aligned}\quad (11.3)$$

بنابراین از روابط (۱۰.۱)، (۱۱.۳) دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}-2c(c-a)x_1^2 - 2b(a-b)x_1^2 &= \beta, \\2c(b-c)x_1^2 + 2a(a-b)x_1^2 &= \beta, \\2b(b-c)x_1^2 - 2a(c-a)x_1^2 &= -\beta, \\-c(b+a-2c)x_1x_2 + \alpha(a-b)x_3 &= 0, \\b(-2b+c+a)x_1x_3 + \alpha(c-a)x_2 &= 0, \\a(b+c-2a)x_2x_3 + \alpha(b-c)x_1 &= 0.\end{aligned}\quad (12.3)$$

با استفاده از روابط (۱۲.۳)، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_2)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_2$ جبر لی لورنتزی تک‌مدولی بیان شده به صورت رابطه (۱۲.۳) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 یک میدان برداری زمان‌گون است. در این صورت برخی از میدان‌های برداری متالیک پایای چپ غیربدیهی روی $\mathfrak{g}_2$ به شرح زیر هستند:

۱. اگر $a = b = c$ باشد، آنگاه $\beta = -2a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - ab + bc + ac$ برای هر $V \in \mathfrak{g}$ ،
۲. اگر $a = b$ ، $c = 0$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = 0$ و هر $x_3 \in \mathbb{R}$ ،
۳. اگر $a = c$ ، $b = 0$ ، $\beta = 0$ و $\alpha = 0$ باشد، آنگاه $x_1^2 = x_2^2$ و $x_3 = 0$ ،
۴. اگر $a = c$ ، $b = 0$ و $\beta = 0$ آنگاه $\alpha \neq 0$ و $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

۴.۳ جبر لی $\mathfrak{g}_4$

برای پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ با e_3 زمان‌گون، ضرب براکت به صورت زیر است:

$$\mathfrak{g}_4: \begin{aligned}[e_1, e_2] &= -e_2 + (2\eta - b)e_3, & [e_1, e_3] &= -be_2 + e_3, \\[e_2, e_3] &= ae_1, & \eta &= \pm 1.\end{aligned}\quad (13.3)$$

متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ،

برای میدان برداری پایای چپ $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 0 & -x_2 + (a-b)x_3 & (b-a-2\eta)x_2 - x_3 \\ -x_2 + (a-b)x_3 & 2x_1 & 2\eta x_1 \\ (b-a-2\eta)x_2 - x_3 & 2\eta x_1 & 2x_1 \end{bmatrix}. \quad (14.3)$$

با استفاده از رابطه (۱۴.۳) و متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= (2 + 2(2\eta - b)(b - a - 2\eta))x_1^2 - (4a - 8b + 8\eta)x_2x_3 \\&\quad - (2b(a-b) - 2)x_1^2, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= (4 - 4\eta(2\eta - b))x_1^2 + 2a(a-b)x_1^2 - 2ax_2x_3, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= (4b\eta - 4)x_1^2 - 2a(b-a-2\eta)x_1^2 + 2ax_2x_3, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= (-3 + (2\eta - b)(-b + a + 4\eta))x_1x_2 + (4\eta - 4b + a)x_1x_3, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= (-4b + a + 4\eta)x_1x_2 + (-2\eta b + ab - b^2 + 3)x_1x_3, \\(\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= (-4\eta + 4b)x_1^2 + (2a(b-a) - 2\eta a)x_2x_3 - ax_1^2 + ax_1^2.\end{aligned}\quad (15.3)$$

بنابراین از رابطه (۱.۱) و (۱۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & (2 + 2(2\eta - b)(b - a - 2\eta))x_1^2 + (-4a + 8b - 8\eta)x_1x_2 - (2b(a - b) + 2)x_2^2 = \beta, \\ & (4 - 4\eta(2\eta - b)x_1^2 + 2a(a - b)V_1^2 - 2ax_1x_2 + 2\alpha x_1 = \beta, \\ & (4b\eta - 4)x_1^2 - 2a(b - a - 2\eta)x_1^2 + 2ax_1x_2 + 2\alpha x_1 = -\beta, \\ & (-3 + (2\eta - b)(-b + a + 4\eta))x_1x_2 + (4\eta - 4b + a)x_1x_3 - \alpha x_2 + \alpha(a - b)x_3 = 0, \\ & (-4b + a + 4\eta)x_1x_2 + (-2\eta b + ab - b^2 + 3)x_1x_3 + \alpha((b - a - 2\eta)x_2 - x_3) = 0, \\ & (-4\eta + 4b)x_1^2 + (2a(b - a) - 2\eta a)x_1x_2 - ax_1^2 + ax_1^2 + 2\alpha x_1 = 0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

با استفاده از دستگاه معادلات غیرخطی (۱۶.۳)، نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_4)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_4$ جبر لی لورنتزی تک‌مدولی بیان شده به صورت رابطه (۱۶.۳) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 یک میدان برداری زمان‌گون است. در این صورت برخی از میدان‌های برداری متالیک پایای چپ غیربدیهی روی $\mathfrak{g}_4$ به شرح زیر هستند:

۱. اگر $a = 1, b = 0, \eta = 1$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ،
۲. اگر $a = 0, b = 1, \eta = 1$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ،
۳. اگر $a = 0, b = 1, \eta = 1$ و $\beta = 0, \alpha \neq 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

۴ میدان‌های متالیک غیر تک‌مدولی نسبت به متر لورنتزی

در این بخش، جبر لی لورنتزی غیر تک‌مدولی سه بعدی متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ را در نظر می‌گیریم که e_3 زمان‌گون است. در اینجا، سه حالت متمایز را بررسی می‌کنیم.

۱.۴ جبر لی $\mathfrak{g}_5$

برای جبر لی $\mathfrak{g}_5$ ، پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ که e_3 زمان‌گون است، موجود است به قسمی که

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_5 : \quad & [e_1, e_2] = 0, \\ & [e_1, e_3] = ae_1 + be_2, \\ & [e_2, e_3] = ce_1 + de_2, \quad a + d \neq 0, \quad ac + bd = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

حال میدان برداری دلخواه پایای چپ $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}_5$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 2ax_3 & (b+c)x_3 & -ax_1 - cx_2 \\ (b+c)x_3 & 2dx_3 & -bx_1 - dx_2 \\ -ax_1 - cx_2 & -bx_1 - dx_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

از روابط (۱.۴) و (۲.۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= (4a^2 + 2b^2 + 2bc)x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= (2c(b+c) + 4d^2)x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= 2(a^2 + b^2)x_1^2 + 2(c^2 + d^2)x_2^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= (ab + cd)x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= -(3a^2 + 2b^2 + bc)x_1x_3 - (ac + cd)x_2x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= -(ab + bd)x_1x_3 - (2c^2 + 3d^2 + bc)x_2x_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱.۱)، (۱.۴) و (۲.۴) دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (4a^2 + 2b^2 + 2bc)x_3^2 + 2\alpha ax_3 = \beta, \\ & (2c(b+c) + 4d^2)x_3^2 + 2\alpha dx_3 = \beta, \\ & 2(a^2 + b^2)x_1^2 + 2(c^2 + d^2)x_2^2 = -\beta, \\ & (ab + cd)x_3^2 + \alpha((b+c)x_3) = 0, \\ & -(3a^2 + 2b^2 + bd)x_1x_3 - (ac + cd)x_2x_3 - \alpha ax_1 - \alpha cx_2 = 0, \\ & -(ab + bd)x_1x_3 - (2c^2 + 3d^2 + bc)x_2x_3 - \alpha bx_1 - \alpha dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

با حل دستگاه معادلات (۴.۴)، نتیجه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_5)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_5$ جبر لی لورنتزی تک‌مدولی بیان شده به صورت رابطه (۴.۴) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 یک میدان برداری زمان‌گون است. در این صورت برخی از میدان‌های برداری متالیک پایای چپ روی $\mathfrak{g}_5$ به شرح زیر هستند:

۱. اگر $\alpha = 0, \beta = 0, a = d = 0, b = c = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ و $x_1 \in \mathbb{R}$.
۲. اگر $a \neq 0, b = c = d = 0, \alpha = \beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_3 = 0$ و $x_2 \in \mathbb{R}$.

۲.۴ جبر لی $\mathfrak{g}_6$

در $\mathfrak{g}_6$ ، پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ که بردار e_3 زمان‌گون موجود است که

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_6 : \quad [e_1, e_2] &= ae_2 + be_3, \\ [e_1, e_3] &= ce_2 + de_3, \\ [e_2, e_3] &= 0, \quad a + d \neq 0, \quad ac - bd = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، برای میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_V g = \begin{bmatrix} 0 & ax_2 + cx_3 & -bx_2 - dx_3 \\ ax_2 + cx_3 & -2ax_1 & (b-c)x_1 \\ -bx_2 - dx_3 & (b-c)x_1 & 2dx_1 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

با استفاده از روابط (۵.۴) و (۶.۴) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= 2a^2 x_2^2 + 2c^2 x_3^2 - 2d^2 x_2^2 - 2b^2 x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{22} &= (4a^2 - 2b(b-c))x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{33} &= (-2bc + 2c^2 - 4d^2)x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= (-3a^2 + 2b^2 - bc)x_1 x_2 - (ac + cd)x_1 x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= (ab + bd)x_1 x_2 + (-2c^2 + 3d^2 + bc)x_1 x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= (-ab + cd)x_1^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

بنابراین رابطه (۱.۱) دستگاه معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} 2a^2 x_2^2 + 2c^2 x_3^2 - 2d^2 x_2^2 - 2b^2 x_3^2 &= \beta, \\ -2ax_1(4a^2 - 2b(b-c))x_1^2 - 2\alpha ax_1 &= \beta, \\ (-2bc + 2c^2 - 4d^2)x_1^2 + 2\alpha dx_1 &= -\beta, \\ (-3a^2 + 2b^2 - bc)x_1 x_2 - (ac + cd)x_1 x_3 + \alpha ax_2 + \alpha cx_3 &= 0, \\ (ab + bd)x_1 x_2 + (-2c^2 + 3d^2 + bc)x_1 x_3 - \alpha bx_2 - \alpha dx_3 &= 0, \\ (-ab + cd)x_1^2 + \alpha(b-c)x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

با حل دستگاه معادلات (۸.۴) نتیجه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_6)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_6$ جبر لی لورنتزی تک‌مدولی بیان شده به صورت رابطه (۸.۴) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 یک میدان برداری زمان‌گون است. در این صورت برخی از میدان‌های برداری متالیک پایای چپ غیربدیهی روی $\mathfrak{g}_6$ به شرح زیر هستند:

۱. اگر $\alpha = 0, \beta = 0, b = c = 0, a = d \neq 0$ باشد، آنگاه $x_2 = x_3 = 0$ و $x_1 = 0$.
۲. اگر $a = d = 0, b = c \neq 0, \alpha = \beta = 0$ باشد، آنگاه $x_2 = x_3 = 0$ و $x_1 \in \mathbb{R}$.
۳. اگر $a = d \neq 0, b = c = 0, \beta = 0$ باشد، آنگاه $x_2 = x_3 = 0$ و $x_1 = \frac{\alpha}{2a}$.
۴. اگر $a = b = c = d \neq 0, \beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = \frac{\alpha}{2a}$ و $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

۳.۴ جبر لی $\mathfrak{g}_7$

پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ که e_3 زمان‌گون است، وجود دارد که

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_7 : \quad [e_1, e_2] &= -ae_1 - be_2 - be_3, \\ [e_1, e_3] &= ae_1 + be_2 + be_3, \\ [e_2, e_3] &= ce_1 + de_2 + de_3, \quad a + d \neq 0, \quad ac = 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

متناظر با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، برای میدان برداری دلخواه $V = x_i e_i \in \mathfrak{g}_7$ داریم:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V g)(e_1, e_1) &= -2a(x_2 - x_3), \\ (\mathcal{L}_V g)(e_1, e_2) &= ax_1 - bx_2 + (b+c)x_3, \\ (\mathcal{L}_V g)(e_1, e_3) &= -ax_1 + (b-c)x_2 - bx_3, \\ (\mathcal{L}_V g)(e_2, e_2) &= 2bx_1 + 2dx_3, \\ (\mathcal{L}_V g)(e_2, e_3) &= -2bx_1 - d(x_2 + x_3), \\ (\mathcal{L}_V g)(e_3, e_3) &= 2bx_1 + 2dx_2. \end{aligned} \quad (10.4)$$

با استفاده از (۱۰.۴) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{11} &= (2a^2 + 2bc)x_1^2 + (-2a^2 - 2bc)x_2x_3 + (2a^2 + 2bc)x_3^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= (-2ab - 2bd)x_1x_2 + (2ab + 2bd)x_1x_3 \\ &\quad + (-2bd - 2d^2)x_2x_3 + (2c(b+c) + 2d^2)x_1^2 + 2a^2x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= 2a^2x_1^2 + (-2ab - 2bd)x_1x_2 + (2ab + 2bd)x_1x_3 \\ &\quad - 2c(b-c)x_1^2 + (2bc + 2d^2)x_2x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{12} &= (-2a^2 - bc)x_1x_2 + (bd + ad)x_1^2 + (-2ab - 2bd - cd)x_2x_3 \\ &\quad + (2a^2 + bc)x_1x_3 + (ab + d(b+c))x_1^2, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{13} &= (2a^2 + bc)x_1x_2 + (-ab - d(b-c))x_1^2 \\ &\quad + (-ab - bd)x_1^2 + (2ab + 2bd - cd)x_2x_3 + (-2a^2 - bc)x_1x_3, \\ (\mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_V)(g)_{23} &= -2a^2x_1^2 + (bc + d^2)x_1^2 - (bc + d^2)x_1^2 + (2ab + 2ad)x_1x_2 \\ &\quad - (2ab + 2ad)x_1x_3 - 2c^2x_2x_3. \end{aligned} \quad (11.4)$$

از معادلات (۱۰.۱)، (۱۱.۴) دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (2a^2 + 2bc)x_1^2 + (-2a^2 - 2bc)x_2x_3 + (2a^2 + 2bc)x_3^2 - 2\alpha a(x_2 - x_3) &= \beta, \\ (-2ab - 2bd)x_1x_2 + (2ab + 2bd)x_1x_3 \\ &\quad + (-2bd - 2d^2)x_2x_3 + (2c(b+c) + 2d^2)x_1^2 + 2a^2x_1^2 + 2\alpha bx_1 + 2\alpha dx_3 = \beta, \\ 2a^2x_1^2 + (-2ab - 2bd)x_1x_2 + (2ab + 2bd)x_1x_3 \\ &\quad - 2c(b-c)x_1^2 + (2bc + 2d^2)x_2x_3 + \alpha(2bx_1 + 2dx_2) = -\beta, \\ (-2a^2 - bc)x_1x_2 + (bd + ad)x_1^2 \\ &\quad + (-2ab - 2bd - cd)x_2x_3 + (2a^2 + bc)x_1x_3 \\ &\quad + (ab + d(b+c))x_1^2 + \alpha(ax_1 - bx_2 + (b+c)x_3) = 0, \\ (2a^2 + bc)x_1x_2 - (ab + d(b-c))x_1^2 \\ &\quad + (-ab - bd)x_1^2 + (2ab + 2bd - cd)x_2x_3 \\ &\quad + (-2a^2 - bc)x_1x_3 - \alpha ax_1 + \alpha(b-c)x_2 - \alpha bx_3 = 0, \\ -2a^2x_1^2 + (bc + d^2)x_1^2 - (bc + d^2)x_1^2 + (2ab + 2ad)x_1x_2 \\ &\quad - (2ab + 2ad)x_1x_3 - 2c^2x_2x_3 - 2\alpha bx_1 - \alpha d(x_2 + x_3) = 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

بعد از حل معادلات (۱۲.۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $(G, \mathfrak{g}_7)$ گروه لی لورنتزی سه بعدی و $\mathfrak{g}_7$ جبر لی لورنتزی تک‌مدولی بیان شده به صورت رابطه (۱۲.۴) متناظر با پایه شبه متعامد یکه‌ای $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد که e_3 یک میدان برداری زمان‌گون است. در این صورت برخی از میدان‌های متالیک پایای چپ غیربدیهی روی $\mathfrak{g}_7$ به شرح زیر هستند:

۱. اگر $a = c = 0, b = d = 0, \alpha = 0$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_2 = x_3 = 0$ و $x_1 \in \mathbb{R}$.
۲. اگر $a = c = 0, d \neq 0, b = 1$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_2 = -\frac{\alpha}{d}$ و $x_1 \in \mathbb{R}$.
۳. اگر $a \neq 0, b = c = d = 0$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به رده‌بندی میدان‌های برداری متالیک روی منیفلدهای همگن از بعد سه پرداختیم. تعریف این‌گونه میدان‌های برداری هندسی جدید و در واقع کار خود ما است و همانطور که قبلاً بیان کردیم، این میدان‌ها بطور طبیعی در مطالعه سالیتون‌های ریچی هذلولوی ظاهر می‌شوند. جهت بررسی وجود و رده‌بندی این نوع میدان‌ها طبیعتاً باید از منیفلدهای با ساختار هندسی ساده‌تر شروع می‌کردیم. بنابراین، وجود این میدان‌های برداری را در حالت منیفلدهای همگن سه بعدی با جبرهای لی تک‌مدولی و همچنین غیر تک‌مدولی با مترهای ریمانی و لورنتزی مطالعه نمودیم. بررسی وجود و رده‌بندی این میدان‌ها، منجر به حل دستگاه معادلات غیرخطی می‌شد (که حل چنین دستگاه‌هایی معمولاً در ارتباط با هندسه جبری و مشخص کردن واریته‌های آفین است) که به روش تحلیلی پاسخ‌های حقیقی دستگاه‌ها را پیدا کردیم.

مراجع

- [1] Azami, S., *Harmonic-hyperbolic geometric flow*, Electron. J. Differ. Equ., 165(2017), 1-9.
- [2] Azami, S., Fasihi-Ramandi, G., *Hyperbolic Ricci soliton on warped product manifolds*, Filomat, 37 (2023), no. 20, 6843–6853.
- [3] Calvaruso, G., *Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds.*, Geom. Dedicata, 127(2007), 99-119.
- [4] Cordero, A. L., Parker, P. E., *Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rend. Math. Appl., 17(1997), 129-155.
- [5] Dai, W., Kong, D., Liu, K., *Hyperbolic geometric flow (I): short-time existence and nonlinear stability*, Pure Appl. Math. Q., 6(2010), 331-359.
- [6] Deshmukh, S., Chen, B. Y., *A note on Yamabe solitons*, Balkan J. Geom. Appl., 23(2018), 37-43.
- [7] Faraji, H., Azami, S., Fasihi-Ramandi, G., *Three Dimensional Homogeneous Hyperbolic Ricci Solitons*, J. Nonlinear Math. Phys., 30(2023), 135-155.
- [8] Falcitelli, M., Sarkar, A., Halder, S., *Conformal Vector fields and conformal Ricci solitons on α -Kenmotsu Manifolds*, Mediterr. J. Math., 20(2023), 1-18.
- [9] Hamilton, R. S., *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom., 17(1982), 255-306.
- [10] Hamilton, R. S., *The Ricci flow on surfaces*, Contemp. Math. 71(1988), 237-261.
- [11] Ivey, T., *New examples of compact Ricci solitons*, Proc. Amer. Math Soc., 122(1994), 241-245.

- [12] Kong, D., Liu, K., *Wave character of metrics and hyperbolic flow*, J. Math. Phys. 48(2007), 103508-1-103508-14.
- [13] Kong, D., Liu, Q., Song, C., *Classical solutions to a dissipative hyperbolic geometry flow in two space variables*, J. Hyperbol. Differ. Equ., 16(2019), 223-243.
- [14] Milnor, J., *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math., 1(1976), 293-329.
- [15] Rahmani, S., *Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois* (French) [Lorentz metrics on three-dimensional unimodular Lie groups], J. Geom. Phys., 9(1992), 295-302.
- [16] Tokura, W., Batista, E., Kai, P., *Triviality Results for Quasi κ -Yamabe solitons*, J. Math. Anal and Appl., 502(2021), 125274, 1-6.
- [17] Wang, Y., *Affine Ricci solutions of three-dimensional Lorentzian Lie groups*, J. Nonlinear Math. Phys., 28(2021), 277-291.
- [18] Yamabe, H., *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka J. Math., 12(1960), 21-37.