Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 12, Issue 2, pp. 1–7

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: 10.22034/mmr.2026.11729

The influence of the structure of Sylow subgroups on the structure of finite groups

Hamid Mousavi(1) [1]

(1) Department of Mathematics,Faculty of Mathematics, Statistic and Computer Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Received: 4 August 2026 Accepted: 18 August 2026 Published online: 23 September 2026

Abstract: The structure of Sylow subgroups within a finite group is an area of interest for many researchers, leading to numerous published papers on the topic. This paper will examine how the cyclicity or normality of specific Sylow subgroups affects the overall structure of the finite group.

Keywords: Soluble group, Nilpotent group, Sylow subgroup, Finite groups.

2020 Mathematics Subject Classification: 20D10; 20D20.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author

E-mail addresses:hmousavi@tabrizu.ac.ir (Hamid Mousavi) hmousavi@tabrizu.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره 12، شماره 2، ص ۱–۷
شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
DOI: 10.22034/mmr.2026.11729

تاثیر ساختار زیرگروه‌های سیلو بر ساختار گروه‌های متناهی

حمید موسوی [(۱)] [۱]

[(۱)] گروه ریاضی ، دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۵/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۲۷ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

چکیده: ساختار زیرگروه‌های سیلو در یک گروه متناهی، مورد توجه بسیاری از محققان است و منجر به انتشار مقالات متعدد در این زمینه شده است. این مقاله بررسی خواهد کرد که چگونه دوری بودن یا نرمال بودن زیرگروه‌های سیلوی خاص بر ساختار کلی گروه متناهی تأثیر می‌گذارند.

واژه‌هاي كليدي: گروه حل‌پذیر، گروه پوچتوان، زیرگروه سیلو، گروه‌های متناهی.

رده‌بندی ریاضی: 20D10; 20D20.

۱ مقدمه

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. به ازای هر عامل اول از مرتبه G مانند p، هر زیرگروه G از مرتبه توانی از p را یک pـزیرگروه از گروه G گویند. pـزیرگروه S از G را یک pـزیرگروه سیلو نامیم هرگاه مرتبه S با شاخص آن در G متباین باشد. در این صورت می‌توان نوشت $|G| = |S|m$ که $p \nmid m$. همچنین زیرگروه H از G را یک زیرگروه هال نامیم هرگاه مرتبه H با شاخص آن متباین باشد. در واقع زیرگروه هال تعمیمی از زیرگروه‌های سیلو هستند و یا زیرگروه سیلو یک زیرگروه هال است که مرتبه آن توانی از یک عدد اول است.

زیرگروه‌های سیلو توسط پیتر سیلو [۲] در سال ۱۸۷۲ معرفی شدند. سیلو ثابت کرد به ازای هر عامل اول از مرتبه G مانند p؛

۱. گروه G دارای یک زیرگروه سیلو است.

۲. هر pـزیرگروه G مشمول یک pـزیرگروه سیلو است.

۳. هر دو pـزیرگروه سیلو مزدوج هستند.

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(Hamid Mousavi) hmousavi@tabrizu.ac.ir

[2] Peter Ludvig Meidell Sylow (1832 1918)

۴. تعداد pـ زیرگروه‌های سیلو همنهشت ۱ به پیمانه p است.

نتایج فوق به عنوان قضایای سیلو مشهور هستند. ف. هال [۱] در دهه ۱۹۲۰ الی ۱۹۳۰ قضایای سیلو را برای زیرگروه‌های هال در گروه‌های حل‌پذیر تعمیم داد.

دیر زمانی است که پژوهش‌های بسیار زیادی در مورد تاثیر ساختار زیرگروه‌های سیلو بر ساختار گروه‌های متناهی توسط پژوهشگران صورت گرفته است. بسیاری از این پژوهش‌ها اکنون جز مطالب کلاسیک و آموزشی در کتب نظریه گروه‌ها هستند. به عنوان مثال:

۱. اگر زیرگروه‌های سیلو یک گروه متناهی نرمال باشند، آنگاه گروه پوچتوان خواهد بود. [۲، قضیه ۲۶.۱]

۲. اگر زیرگروه‌های سیلو یک گروه متناهی دوری باشند آن گروه حل‌پذیر خواهد بود. [۲، نتیجه ۱۵.۵]

۳. اگر ۲ـ زیرگروه سیلو در یک گروه متناهی دوری باشد آنگاه ۲ـ زیرگروه سیلو دارای یک متمم نرمال خواهد بود. [۲، نتیجه ۱۴.۵]

۴. اگر یک pـ زیرگروه سیلو در مرکز نرمال‌ساز خود باشد آنگاه آن pـ زیرگروه سیلو داری متمم نرمال خواهد بود. [۲، قضیه ۱۳.۵]

مثال‌های بسیار دیگر در کتب کلاسیک نظریه گروه‌ها موجود هستند. هدف از مقاله فوق ارائه چند نتیجه از تاثیر گذاری ساختار زیرگروه‌های سیلو بر ساختار گروه متناهی است. نمادهای مورد استفاده در این مقاله استاندارد بوده و منظور از $\mathcal{S}y\ell_p(G)$، مجموعه pـ زیرگروه‌های سیلو G است و C_p گروه دوری از مرتبه p است.

۲ نتایج اصلی

اگر هر زیرگروه یک گروه متناهی دوری باشد، آنگاه آن گروه یا دوری است، یا با $C_p \times C_p$ یکریخت است که یک pـ گروه آبلی از مرتبه $p^۲$ است ویا یکریخت با $Q_۸$ است. اگر زیرگروه‌های سیلو یک گروه متناهی دوری باشند آنگاه آن گروه حل‌پذیر خواهد بود.

گروه متناهی G را پوچتوان گوییم هرگاه هر زیرگروه سیلو آن نرمال باشد.

گزاره ۱.۲. *فرض کنیم G یک گروه متناهی غیر پوچتوان از مرتبه زوج باشد به طوری که هر زیرگروه سیلو غیرنرمال آن دوری است. در این صورت G حل‌پذیر است و با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است که در آنها N یک زیرگروه هال نرمال و پوچتوان است و S یک زیرگروه از مرتبه فرد با زیرگروه‌های سیلو دوری است.*

(i) $G \cong N \rtimes (S \rtimes C_{۲^n})$.

(ii) $G \cong N \rtimes S$.

اثبات. فرض کنیم $Q \in \mathcal{S}y\ell_۲(G)$ و N حاصلضرب زیرگروه‌های سیلو نرمال از G باشد. در این صورت N یک زیرگروه هال نرمال و پوچتوان از G. بنابر قضیه شور ـ زاسنهاوس، N دارای یک متمم مانند H است. بنابر این $G \cong N \rtimes H$. واضح است که همه زیرگروه‌های سیلو H غیرنرمال و از این رو دوری است پس H حل‌پذیر است [۲، نتیجه ۱۵.۵]. چون N پوچتوان است پس G حل‌پذیر است. اگر N بدیهی باشد، $G = H$.

[1] Philip Hall (1904 – 1982)

ابتدا فرض کنیم Q غیرنرمال باشد. در این صورت دوری است و بنابر [۲، نتیجه ۱۴.۵]، دارای یک متمم نرمال مانند S است. چون زیرگروه‌های سیلو S در G غیرنرمال هستند، بنابر این همگی دوری بوده و G با ساختار (i) یکریخت است.

حال فرض کنیم $Q \trianglelefteq G$. بنابر این $Q \leqslant N$ و H یک گروه از مرتبه فرد است که هر زیرگروه سیلو آن دوری است. از این $H = S$ و G با ساختار (ii) یکریخت است. □

مسأله ۲.۲. *اگر زیرگروه‌های سیلو غیرنرمال و آبلی یک گروه متناهی، دوری باشند، آنگاه چه تاثیری روی ساختار گروه خواهند داشت؟*

پاسخ به سوال بالا مشکل است. فرض کنید ۲ـ زیرگروه سیلو G نرمال باشد در این صورت گروه حل‌پذیر است. اگر ۲ـ زیرگروه سیلو غیرنرمال و آبلی باشد شرط بالا باز موجب حل‌پذیری گروه خواهد شد. ولی اگر ۲ـ زیرگروه سیلو غیرنرمال و غیرآبلی باشد، آنگاه هیچ اطلاعاتی در مورد گروه نمی‌دهد و باید زیرگروه‌های سیلو دیگر مورد بررسی قرار گیرند. اما اگر همه زیرگروه‌های غیرنرمال و آبلی، دوری باشند آنگاه مرکز گروه دوری خواهد بود.

قضیه ۳.۲. *فرض کنیم G یک گروه متناهی غیر پوچتوان باشد به طوری که همه زیرگروه غیرنرمال و آبلی آن دوری است. در این صورت مرکز G دوری است.*

اثبات. فرض کنیم مرکز G غیر دوری باشد. چون مرکز یک گروه آبلی است و حاصل ضرب زیرگروه‌های سیلو خود است، پس حداقل یک زیرگروه سیلو غیر دوری دارد. فرض کنیم L یک pـ زیرگروه غیر دوری از $Z(G)$ باشد.

اکنون به ازای هر عضو g از مرتبه متباین با p، زیرگروه $\langle L, g\rangle$ غیر دوری و آبلی است پس لزوما نرمال است. از این رو $\langle g\rangle \trianglelefteq G$ زیرا یک زیرگروه مشخصه در $\langle L, g\rangle$ است. بنابر این به ازای هر $q \neq p$ qـ زیرگروه سیلو G نرمال است. فرض کنیم x یک عضو دلخواه از P، pـ زیرگروه سیلو G باشد. چون $\langle L, x\rangle \trianglelefteq G$ پس به ازای هر $g \in G$،

$$x^g \in \langle L, x\rangle^g = \langle L, x\rangle \leqslant P.$$

در نتیجه همه زیرگروه‌های سیلو G نرمال هستند که متناقض فرض غیر پوچتوانی G است. □

ملاحظه ۴.۲. *اگر هر زیرگروه یک گروه، نرمال باشد گروه را هامیتونی گویند که ساختار آن به صورت زیر است.*

$$Q_8 \times E_{2^n} \times A,$$

که در آن E_{2^n} یک ۲ـ گروه آبلی مقدماتی است و A یک گروه آبلی است به طوری که مرتبه هر عضو آن فرد است. در صورتی که گروه متناهی باشد، زیرگروه A یک گروه متناهی از مرتبه فرد است. بنابر این اگر یک گروه متناهی از مرتبه فرد هامیلتونی باشد، آنگاه لزوماً آبلی است.

قضیه ۵.۲. *فرض کنیم در گروه متناهی G هر زیرگروه آبلی غیر دوری، نرمال باشد و P یک pـ زیرگروه سیلو غیر آبلی از مرتبه فرد باشد. در این صورت زیرگروه‌های سیلو از مرتبه فرد به غیر از P دوری هستند.*

اثبات. فرض کنیم L زیرگروه غیر دوری P از مرتبه p^2 باشد. اکنون فرض کنیم Q، qـ زیرگروه سیلو G باشد که $q \neq p$ عدد اول فرد است. اگر Q غیر دوری باشد زیرگروه غیر دوری از مرتبه q^2 مانند K دارد. چون $K, L \trianglelefteq G$ پس $[K, L] \leqslant K \cap L = 1$. بنابر این به ازای هر عضو L مانند x، زیرگروه $K\langle x\rangle$ آبلی غیر دوری است. از این رو در G نرمال است. با توجه به اینکه $\langle x\rangle$ در $K\langle x\rangle$ مشخصه است پس در G نرمال است لذا در P نیز نرمال است. در نتیجه $x \in Z(P)$ و از این رو $L \leqslant Z(P)$.

چون P غیر آبلی است پس $x \in P$ موجود است که $x \notin \langle x \rangle$. با توجه به اینکه L غیر دوری است عضو $y \in L$ موجود است که $y \notin \langle x \rangle$ پس $\langle y, x \rangle$ آبلی غیر دوری است و از این رو در G نرمال است. لذا دوباره خواهیم داشت $[\langle x, y \rangle, K] = 1$. بنابر این $K\langle x \rangle$ آبلی غیر دوری است و در G نرمال است. مشابه بالا $\langle x \rangle$ در $K\langle x \rangle$ مشخصه است پس در G نرمال است که موجب تناقض $\langle x \rangle \trianglelefteq P$ خواهد شد. بنابر این Q دوری است. □

می‌دانیم اگر ۲ـ زیرگروه سیلو یک گروه دوری باشد، آنگاه آن ۲ـ زیرگروه سیلو دارای یک متمم نرمال است. اکنون حالت خاص دیگری هم داریم که در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۶.۲. *فرض کنیم G یک گروه باشد به طوری که $3 \nmid |G|$. اگر ۲ـ زیرگروه سیلو G با Q_8 یکریخت باشد، آنگاه ۲ـ زیرگروه سیلو دارای یک متمم نرمال است.*

اثبات. فرض کنیم $Q \in Syl_2(G)$. اگر $Q \trianglelefteq G$ در این صورت بنا بر قضیه شورزاسنهاوس زیرگروه N موجود است که $G = QN$. با توجه به اینکه $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$ و $3 \nmid |G|$، پس $[Q, N] = 1$ لذا $N \trianglelefteq G$.

فرض کنیم $Q \ntrianglelefteq G$ و G کوچکترین گروهی از لحاظ مرتبه باشد که حکم برای آن برقرار نیست. بنابر [۱]، گروه G ساده نیست پس می‌توان فرض کرد M یک زیرگروه نرمال ماکسیمال از G باشد.

اگر $M \leqslant Q$، مرتبه M برابر ۴ یا ۲ است. پس Q/M یا دوری است و یا با $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یکریخت است. با توجه به ساده بودن G/M حالت دوم می‌تواند رخ دهد. در این حالت نیز با توجه به اینکه $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$ و $3 \nmid |G|$ پس $\mathcal{N}(Q/M) = \mathcal{C}(Q/M)$ که تناقض وجود متمم نرمال برای Q/M را می‌دهد. از این رو $M \nleqslant Q$.

اگر $Q \leqslant M$، چون $Q \ntrianglelefteq M$ (در غیر این صورت $Q \trianglelefteq G$)، بنا بر انتخاب G زیرگروه M دارای ۲ـ متمم نرمال مانند M_1 است. با توجه به اینکه مرتبه و شاخص M_1 در M متباین هستند پس M_1 در M مشخصه است و از این رو در G نرمال است. در صورتی که $M \nleqslant Q$، زیرگروه $M \cap Q$ یک زیرگروه سره از Q و لذا دوری است پس دوباره M دارای ۲ـ متمم نرمال است.

در هر حالت $M = M_1Q$ و $M/M_1 \cong Q$، ۲ـ زیرگروه سیلو G/M_1 در آن نرمال است. بنابر ابتدای برهان G/M_1 دارای ۲ـ متمم نرمال مانند N/M_1 است. واضح است که $N \trianglelefteq G$ از مرتبه فرد است و $G = QN$ که تناقض نهایی را می‌دهد. □

مثال ۷.۲. *به عنوان مثالی از گروه‌های G صادق در قضیه ۶.۲، که مرتبه آنها دارای ۲ عامل اول باشند، گروه‌های از مرتبه $8p$ هستند که $p \geq 5$. اگر pـ زیرگروه سیلو G غیرنرمال باشد آنگاه تعداد pـ زیرگروه‌های سیلو آن برابر $kp + 1 = 8$ است و از این رو $p = 7$. پس G از مرتبه ۵۶ است. اکنون بنابر یک نتیجه مقدماتی ۲ـ زیرگروه سیلو G لزوماً نرمال است. چون $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$ و $7 \nmid 24$، تناقض حاصل می‌شود. از این رو pـ زیرگروه سیلو G نرمال است. بنابر این یا $G \cong C_p \times Q_8$ و یا $G \cong C_p \rtimes Q_8$. کوچکترین مرتبه برای گروه‌های صادق در قضیه برای $p = 5$ حاصل می‌شود. برای $p = 3$ سه گروه $C_3 \times Q_8$، $C_3 \rtimes Q_8$ و $Q_8 \rtimes C_3 \cong \mathrm{SL}(2, 3)$ را خواهیم داشت که گروه سوم در قضیه صدق نمی‌کند زیرا عدد ۳ مرتبه آن را عاد می‌کند.*

در حالت غیرپوچتوان گروه‌های صادق در قضیه دارای نمایش زیر هستند.

$$G = \langle x, y, z | x^p, y^4, z^4, y^2z^2, x^yx, x^z, z \rangle \cong C_p \rtimes Q_8. \quad (p \geq 3)$$

برای همه گروه‌های با نمایش بالا مرکز از مرتبه ۲ است و $G/Z(G) \cong C_2 \times D_{2p}$.

قضیه ۶.۲، قابل تعمیم به حالتی است که ۲ـ زیرگروه سیلو آن با چهارگان تعمیم یافته یکریخت باشد، اما برهان آن ساده نیست و می‌توانید به [۳] مراجعه کنید.

آخرین نتیجه این مقاله، قضیه زیراست که ۲ـ زیرگروه سیلو G غیرنرمال است ولی ۲ـ زیرگروه سیلو هر زیرگروه آن نرمال است. درواقع هر زیرگروه سره G حل‌پذیر است. در قضیه زیر نشانداده می‌شود $G \cong C_p \rtimes C_{۲^n}$ و $G/Z(G) \cong D_{۲p}$ که در آن p یک عدد اول است. بنابر این G نیز حل‌پذیر است.

قضیه ۸.۲. *فرض کنیم ۲ـ زیرگروه سیلو G غیرنرمال ولی ۲ـ زیرگروه سیلو هر زیرگروه سره آن نرمال باشد. در این صورت به ازای عدد اول فرد p، و عدد طبیعی n،*

$$G = \langle x, y | x^{۲^n} = y^p = ۱, y^x = y^{-۱} \rangle.$$

اثبات. فرض کنیم x و y دو عضو از مرتبه ۲ باشند به طوری که مرتبه $H = \langle x, y \rangle$ توانی از ۲ نباشد. اگر xy از مرتبه n باشد انگاه $H \cong D_{۲n}$. فرض کنیم $n \mid p \neq ۲$، چون $D_{۲p}$ زیرگروهی از G است که ۲ـ زیرگروه سیلو آن نرمال نیست، پس $n = p$ و $G \cong D_{۲p}$. لذا حکم برقرار است. پس فرض کنیم به ازای هر دو عضو از مرتبه ۲، مرتبه $H = \langle x, y \rangle$ توانی از ۲ باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم G حل‌پذیر است. فرض کنیم G کوچکترین مثال نقض باشد و K یک رده تزویج از اعضای مرتبه ۲ در G باشد. بنابر قضیه ۲.۸.۳ از گروههای متناهی گرنشتاین، K مشمول یک ۲ـ زیرگروه نرمال مانند N است. چون G/N در فرض قضیه صدق می‌کند، پس بنابر انتخاب G، G/N حل‌پذیر و از این رو G حل‌پذیر است، که تناقض است. پس G حل‌پذیر است.

فرض کنیم Q، ۲ـ زیرگروه سیلو G باشد. بدیهی است که G غیر آبلی و $G' \neq G$. اگر QG' یک زیرگروه سره از G باشد، چون Q در QG' مشخصه است و $QG' \trianglelefteq G$، تناقض نرمال بودن Q را خواهیم داشت. پس $G = QG'$. در این صورت $Q \cap G' \trianglelefteq G$. فرض کنیم N متمم $Q \cap G'$ در G' باشد. بنابر این $G' = (Q \cap G')N$ و $۲ \nmid |N|$.

فرض کنیم $P \in \mathcal{S}y\ell_p(N)$. اگر $P \trianglelefteq G$ آنگاه بنا بر استدلال فراتینی

$$G = \mathcal{N}_G(P)G' = (Q \cap G')\mathcal{N}_G(P)N.$$

از این رو $Q = (Q \cap G')(Q \cap \mathcal{N}_G(P))$. اگر $(Q \cap G') \nleqslant \mathcal{N}_G(P)$ آنگاه $\mathcal{N}_G(P)N$ یک زیرگروه سره از G است پس $Q \cap \mathcal{N}_G(P)N \trianglelefteq \mathcal{N}_G(P)N$. بنابر این $Q \trianglelefteq G$ که تناقض است. پس $Q \cap G' \leqslant \mathcal{N}_G(P)$ و $G = \mathcal{N}_G(P)N$. در نتیجه $Q \leqslant \mathcal{N}_G(P)$ و خواهیم داشت $[Q, P] = ۱$.

اگر $\pi(N) \geq ۲$ (تعداد عوامل اول $|N|$) آنگاه به ازای هر $P \in \mathcal{S}y\ell_p(G)$، یا $P \trianglelefteq G$ که در این حالت QP یک زیر گروه سره از G است پس $[Q, P] = ۱$ و یا $P \nsubseteq G$ که بنابر استدلال بالا دوباره داریم $[Q, P] = ۱$. لذا $[Q, N] = ۱$ و تناقض $Q \trianglelefteq G$ را خواهیم داشت. از این رو $\pi(N) = ۱$ و $N = P \in \mathcal{S}y\ell_p(G)$. در نتیجه $G = QP$. چون $Q \nsubseteq G$ پس لزوماً $P \trianglelefteq G$ (استدلال بالا).

اکنون به ازای هر زیرگروه ماکسیمال $Q_۱$ از Q، چون $Q_۱P$ یک زیر گروه سره است پس $Q_۱ \trianglelefteq_{ch} QP \trianglelefteq G$ از این رو $Q_۱ \trianglelefteq G$ و چون Q غیرنرمال است پس فقط دارای یک زیرگروه ماکسیمال و از این رو دوری است. در نتیجه $\mathcal{N}_G(Q)/\mathcal{C}_G(Q)$ یک ۲ـ زیرگروه است و بنابر این $\mathcal{N}_G(Q) = \mathcal{C}_G(Q)$. حال فرض کنیم M یک زیرگروه ماکسیمال شامل Q باشد، چون $Q \trianglelefteq M$ پس $M = \mathcal{N}_G(Q)$. بنابر این $P \cap M \leqslant \mathcal{C}_G(Q)$ یک زیرگروه ماکسیمال در P است. اگر P غیر دوری باشد آنگاه بنا بر قضیه مشکه $(P \cap M)/\Phi(P)$ دارای یک متمم پایا از مرتبه p تحت Q مانند $H/\Phi(P)$ دارد. چون $P = (P \cap M)H$ و هر دو HQ و $(P \cap M)Q$ زیرگروه‌های سره G هستند پس $[P, Q] = ۱$ که متناقض غیرنرمال بودن Q است. در نتیجه P دوری است. با توجه به اینکه $P = [P, Q] \times \mathcal{C}_P(Q)$ و P دوری است پس $(P \cap M) \leqslant \mathcal{C}_P(Q) \leqslant \mathcal{C}_G(Q) = ۱$ بنابر این $|P| = p$ و $P = [P, Q]$.

قرار می‌دهیم $Q = \langle x \rangle$ و $P = \langle z \rangle$. چون $P = \langle [x, z] \rangle$ و $[P, \langle x^۲ \rangle] = ۱$ پس

$$[z, x]^x = (z^{-۱} z^x)^x = (z^{-۱} z^x)^{-۱}.$$

از این رو با فرض $y = [z, x]$ داریم.

$$G = \langle x, y | x^{۲^n} = y^p = ۱, y^x = y^{-۱} \rangle.$$

□

مراجع

[1] R. Brauer and M. Suzuki, *On Finite groups of even order whose 2-Sylow group is a Quaternion group*, Proc Natl Acad Sci USA, Vol. 45(12), (1959).

[2] I. M. Isaacs, *Finite group theory*, AMS, Graduate Studies in Mathematics Volume 92, (2008).

[3] H. Mousavi, Finite groups with Quaternion Sylow subgroup, Comptes Rendus Mathématique, 358, **No 9-10**, (2020). https://doi.org/10.5802/crmath.131