Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 12, Issue 2, pp. 8–21

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: 10.22034/mmr.2026.11730

Bayesian spatial prediction for the extended skew-t random field

Mehrdad Taghipour[(1)] and Mohammad Mehdi Saber[(2)][1]

[(1)] Department of Statistics, University of Qom, Qom, Iran.

[(2)] Department of Statistics, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran.

Received: 19 November 2024 Accepted: 18 August 2026 Published online:23 September 2026

Abstract: This paper introduces a new spatial random field based on the multivariate extended skew-t (EST) distribution, which enables more accurate spatial prediction. Owing to its inherent flexibility in modeling asymmetry as well as heavy-tailed and light-tailed data, the proposed random field is well-suited for predicting non-Gaussian spatial data. Simulation results demonstrate that the proposed model significantly improves prediction accuracy compared to the classical Gaussian random field, particularly in scenarios involving skewed and heavy-tailed spatial data.

Keywords: spatial data; Gaussian random field; multivariate extended skew-t distributions; spatial Bayesian prediction.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author

E-mail address: mmsaber@eghlid.ac.ir (Mohammad Mehdi Saber)

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره 12، شماره 2، ص ۸–۲۱
شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵۴
DOI: 10.22034/mmr.2026.11730

پیش‌بینی فضایی بیزی برای میدان تصادفی t ـ چوله تعمیم‌یافته

مهرداد تقی‌پور(۱)؛ محمدمهدی صابر(۲)[۱]

(۱) گروه آمار، دانشگاه قم، قم، ایران. mtaghipour@qom.ac.ir

(۲) گروه آمار، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران. mmsaber@eghlid.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۸/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۲۷ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

چکیده: در این مقاله، با بهره‌گیری از توزیع t ـ چوله تعمیم‌یافته‌ی چندمتغیره، یک میدان تصادفی فضایی جدید تعریف شده و کارایی آن در پیش‌بینی فضایی بررسی می‌شود. این توزیع به‌دلیل انعطاف‌پذیری بالا در مدل‌سازی هم‌زمان چولگی و دم‌سنگینی داده‌ها، در چارچوب استنباط بیزی امکان پیش‌بینی دقیق‌تری را برای داده‌های فضایی نامتقارن فراهم می‌کند. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در مقایسه با میدان‌های تصادفی متداول گاوسی، به‌کارگیری این مدل در مواجهه با داده‌های فضایی چوله و دم‌سنگین، خطای پیش‌بینی را به‌طور معناداری کاهش داده و دقت برآوردها را افزایش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: داده‌های فضایی، میدان تصادفی گاوسی، توزیع t ـ چوله تعمیم‌یافته چندمتغیره، پیش‌بینی بیزی فضایی.

۱ مقدمه

یکی از مباحث مهم در مبحث کلیدی در آمار فضایی، مساله پیش بینی مکانی است. در بسیاری از مدل‌های کلاسیک، فرض بر این است که داده ها از یک میدان تصادفی گاوسی[۲] پیروی می‌کنند. با این حال، در عمل در بسیاری از داده‌های مکانی (فضایی) ماهیت غیر گاوسی دارند. رویکرد متداول برای برخورد با چنین داده‌هایی، اعمال تبدیلات نرمال‌ساز است(برای نمونه به[۱۴–۱۶] مراجعه کنید). با این وجود، استفاده از تبدیل‌های نرمال‌ساز در کاربردهای عملی همواره مطلوب نیست، زیرا تفسیر نتایج رویدادهای تبدیل شده معمولاً دشوارتر از داده‌های اولیه است[۴، ۱۳].

براي مدل سازي مستقيم داده هاي نامتقارن، کيم و مالیک [۱۲] از ميدان تصادفي گاوسي چوله[۳] استفاده کردند. از آنجا که توزيع گاوسي چوله تحت عمل شرطي بسته نيست، دومينگز و همکاران[۸] خانواده ي توزيع هاي گاوسي چوله بسته [۴] را معرفي نمودند که اين ويژگي مطلوب را داراست. اين توزيع در کاربردهاي متنوعي از جمله پيش بيني

[۱] نویسنده مسئول مقاله (Mohammad Mehdi Saber) mmsaber@eghlid.ac.ir

[2] Gaussian random field

[3] Skew Gaussian

[۴] (CSG) Gaussian Skew Closed

فضايي بيزي [۱۰] ، رگرسيون فضايي بيزي، وارون سازي داده هاي لرزه اي[۱۱] و نيز پيش بيني بيزي در مدل هاي آميخته خطی تعميم يافته[۱] با متغيرهاي نهفته ي چوله ي بسته [۹] مورد استفاده قرار گرفته است.

با اين حال، توزيع گاوسي چوله ي بسته براي مدل سازي داده هاي داراي دم هاي سنگين مناسب نيست. از سوي ديگر، از آنجا كه توزيع t گزينه‌ای كارآمد براي داده هاي حقيقي با دم هاي سنگين محسوب مي شود، روئيسلين و امره[۱۷] ميدان تصادفي توزيع t را تعريف كردند. اما به دليل تقارن ذاتي اين ميدان، كارايي لازم براي داده هاي نامتقارن را ندارد . به همين منظور، توزيع توزيع t ـ چوله.به عنوان مدل منعطفي با پارامترهاي كنترل كننده ي چولگي و كشيدگي معرفي شد كه آزاليني و جنتون [۶] نيز با ارائه ي مباني نظري و مثال هاي كاربردي از آن حمايت كرده اند.

با اين وجود، توزيع t ـ چوله نيز محدوديت هايي دارد: نخست آنكه، همانند توزيع گاوسي چوله، تحت شرطي گيري بسته نيست كه اين موضوع در استنتاج هاي شرطي و پيش بيني هاي مكاني محدوديت ايجاد مي كند. دوم آنكه، اگرچه اين توزيع براي داده هاي با دم هاي سنگين مناسب است، اما انعطاف لازم براي مدل سازي داده هاي با دم هاي سبك تر از توزيع نرمال را ندارد. براي رفع اين كاستي ها، آرلانو-وال و جنتون [۱] خانواده ي توزيع هاي چندمتغيره ي t ـ چوله‌ی تعميم‌يافته را معرفی و به‌طور مفصل بررسي كردند. اين خانواده علاوه بر انعطاف پذيري رياضي و كارايي در مدل سازي توزيع هايي با چولگي و دم هاي سنگين تر را نيز داراست. به گفته ي مؤلفان [۱]، اين توزيع خانواده اي بسيار منعطف از مدل هاي آماري را فراهم مي آورد.

ساختار مقاله به اين ترتيب است: در بخش دوم، توزيع چندمتغيره‌ی t ـ چوله تعميم‌يافته مرور شده و ويژگی‌های كليدی

آن كه براي تعريف ميدان تصادفي جديد و پيش بيني فضايي ضروري اند، بيان مي شود. در بخش سوم، ميدان تصادفي مبتني بر اين توزيع معرفي و مدل فضايي پيشنهادي ارائه مي گردد؛ همچنين روش برآورد پارامترهاي مدل تشريح مي شود. در نهايت، بخش چهارم به بررسي نتايج شبيه سازي مدل پيشنهادي و مقايسه ي عملكرد آن با مدل هاي كلاسيك گاوسي اختصاص دارد.

۲ متغير تصادفی چندمتغيره تعميم‌يافته t ـ چوله

آرلانو واله و جنتون [۱] توزيع تعميم يافته ي t ـ چوله را بصورت زير معرفی كردند.

تعريف ۱. بردار تصادفی پيوسته p ـ بعدی $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ دارای توزيع چند متغيره‌ی t ـ چوله تعميم يافته Extended (Skew-t) (EST) است و با نماد $\mathbf{X} \sim EST_p(\mu, \mathbf{\Sigma}, \lambda, \nu, \tau)$ نشان داده می شود. ، اگر تابع چگالی آن به صورت زير باشد:

$$(۱) \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{t_p(\mathbf{x};\mu,\mathbf{\Sigma},\nu)}{T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^T\mathbf{R}\lambda}};\nu\right)} T_1\left(\frac{\lambda^T\mathbf{z}+\tau}{\sqrt{\frac{\nu+p}{\nu+Q(z)}}}\right);\nu+p), \quad \mathbf{x} \in R^p,$$

كه در آن $\omega = diag(\mathbf{\Sigma})^{\frac{1}{2}}$ (ماتريس مقياس) و $\mathbf{R} = \omega^{-1}\mathbf{\Sigma}\,\omega^{-1}$ (ماتريس همبستگی) ، $\mathbf{z} = \omega^{-1}(\mathbf{x}-\mu)$ و $Q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$ می‌باشد. پارمترهای $\lambda \in \mathbb{R}^p$ و $\tau \in \mathbb{R}$ بترتيب نشان دهنده‌ی چولگی و توسعه هستند. همچنين $t_p(\mathbf{x};\mu,\mathbf{\Sigma},\nu)$ نشان دهنده تابع چگالی توزيع t چند متغيره‌ی استاندارد با بردار مكان $\mu \in \mathbb{R}^p$، ماتريس مقياس $\mathbf{\Sigma}$ و درجه آزادی $\nu > 0$ است:

$$(۲) \; t_p(\mathbf{x};\mu,\mathbf{\Sigma},\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}(\nu\pi)^{\frac{p}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{Q(\mathbf{z})}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+p}{2}\right)},$$

با توجه به ساختار پارامتريک ان توزيع، EST_p خانواده بسيار منعطف از مدل‌های آماری را ارائه می‌دهد كه طيف وسيعی از داده‌ها را پوشش می‌دهد. به عنوان مثال:

[۱] (SGLMM) Models Mixed Linear Generalized

- اگر $\lambda = ۰$ و $\tau = ۰$ باشد، رابطه (۱) به توزیع t چندمتغیره‌ی متقارن $t_p(\mu, \Sigma, \nu)$ تقلیل می‌یابد. در این حالت، با میل کردن $\nu \to +\infty$ به توزیع نرمال چندمتغیره‌ی $N_p(\mu, \Sigma)$ و برای $\nu = ۱$ به توزیع کوشی چندمتغیره‌ی $C_p(\mu, \Sigma)$ می‌رسیم.
- اگر $\nu \to +\infty$ باشد، توزیع به حالت نرمال چندمتغیره همگرا می‌شود، در حالی که برای $\tau \to -\infty$ چگالی بهصفر میل می‌کند.
- برای $\tau = ۰$ توزیع با تعریف t ـ چوله چند متغیره $ST_p(\mu, \Sigma, \nu, \lambda)$ معرفی شده توسط آزالینی و کاپیتانیو [۵] منطبق می‌گردد.
- توزیع نرمال چوله ي $SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ [۷] و کوشی چوله $SC_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ [۲] بترتیب با حدگیری $\nu \to +\infty$ و قراردادن $\nu = ۱$ در مدل ST_p حاصل می‌شوند.
- اگر $\lambda = ۰$ باشد، خانواده‌ای جدید از توزیع‌های متقارن (با پارامتر توسعه τ) به دست می‌آید.در نهایت، با میل کردن $\nu \to +\infty$ در حضور $\tau \neq ۰$، توزیع نرمال چوله‌ی تعمیم یافته $ESN_p(\mu, \Sigma, \lambda, \tau)$ [۳، ۴] استخراج می‌شود.

این انعطاف پذیري ساختاري، توزیع EST_p را به ابزاري قدرتمند براي مدل سازي داده هاي حقیقي با چولگي، کشیدگي و رفتار دم هاي متفاوت تبدیل کرده است. در ادامه، ویژگي هاي کلیدي این توزیع که در ادامه ي مقاله مورد نیاز است، آورده شده است.

ویژگی ۱. بسته بودن تحت توزیع حاشیه‌ای

اگر افراز $\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}_۱^T, \mathbf{X}_۲^T)$ را در نظر بگیریم، بطوریکه $\dim(\mathbf{X}_۱) = p_۱,\ \dim(\mathbf{X}_۲) = p_۲$ و $p_۱ + p_۲ = p$ باشد،

آنگاه $\mathbf{X}_۱$ نیز دارای توزیع $ESN_۱$ خواهد بود:

$$\mathbf{X}_۱ \sim EST_{p_۱}(\mu_۱, \Sigma_{۱۱}, \lambda_۱^*, \nu, \tau_۱^*), \quad (۳)$$

که در آن:

$$\tau_۱^* = \frac{\tau}{\sqrt{۱+\lambda_۲^T \mathbf{R}_{۲۲\cdot۱} \lambda_۲}} \quad \lambda_۱^* = \frac{\lambda_۱ + \mathbf{R}_{۱۱}^{-۱}\mathbf{R}_{۱۲}\lambda_۲}{\sqrt{۱+\lambda_۲^T \mathbf{R}_{۲۲\cdot۱} \lambda_۲}},$$

$$\mathbf{R}_{۲۲\cdot۱} = \mathbf{R}_{۲۲} - \mathbf{R}_{۲۱}\mathbf{R}_{۱۱}^{-۱}\mathbf{R}_{۱۲}.$$

ویژگی ۲. نمایش تصادفی (پیچش)

فرض کنید متغیر تصادفی $\mathbf{Z}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\frac{\nu + T_{(-\overline{\tau},\infty)}^۲}{\nu + ۱}} \mathbf{X}_۱ + \delta\, T_{(-\overline{\tau},\infty)},$$

که در آن:

$$\delta = \frac{\mathbf{R}\,\lambda}{\sqrt{۱+\lambda^T \mathbf{R} \lambda}}, \quad \overline{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{۱+\lambda^T \mathbf{R} \lambda}},$$

$$\mathbf{X}_۱ \sim t_p(۰,\ \mathbf{R} - \delta\delta^T, \nu + ۱),$$

$$T_{(-\overline{\tau},\infty)} = (\, T_۰ | \, T_۰ + \overline{\tau} > ۰), \qquad T_۰ \sim t(۰, ۱, \nu)$$

و متغیرهای $\mathbf{X}_۱$ و $T_۰$ مستقل هستند.در این صورت:

$$\mathbf{Z} \sim EST_p(۰,\ \mathbf{R}, \nu, \lambda, \overline{\tau}), \quad (۴)$$

ویژگی ۳. توزیع شرطی EST

با فرض $\mathbf{X} \sim EST_p(\mu, \mathbf{\Sigma}, \lambda, \nu, \tau)$ و افراز مشابه وبژگی ۱، توزیع شرطي $\mathbf{X}_۲$ به شرط $\mathbf{X}_۱ = \mathbf{x}_۱$ به صورت زیر است:

$$(\ \mathbf{X}_۲ | \mathbf{X}_۱ = \mathbf{x}_۱) \sim EST_{p_۲}(\mu_{۲/۱}, \alpha_{Q_۱}\mathbf{\Sigma}_{۲۲/۱}, \lambda_{۲/۱}, \nu_{۲/۱}, \tau^*_{۲/۱})$$

بطوریکه

$$\mu_{۲/۱} = \mu_۲ + \mathbf{\Sigma}_{۲۱}\mathbf{\Sigma}_{۱۱}^{-۱}(\mathbf{x}_۱ - \mu_۱),$$

$$\mathbf{z}_۱ = \mathbf{w}_۱^{-۱}(\mathbf{x}_۱ - \mu_۱), \ ، \ Q_۱(\mathbf{z}_۱) = \mathbf{z}_۱^T\mathbf{R}_{۱۱}^{-۱}\mathbf{z}_۱$$

$$\mathbf{\Sigma}_{۲۲/۱} = \mathbf{\Sigma}_{۲۲} - \mathbf{\Sigma}_{۲۱}\mathbf{\Sigma}_{۱۱}^{-۱}\mathbf{\Sigma}_{۱۲},$$

$$\mathbf{w}_{۲/۱} = diag(\mathbf{\Sigma}_{۲۲/۱})^{\frac{۱}{۲}}, \mathbf{w}_۲ = diag(\mathbf{\Sigma}_{۲۲})^{\frac{۱}{۲}}, , \lambda_{۲/۱} = \mathbf{w}_{۲/۱}\mathbf{w}_۲^{-۱}\lambda_۲$$

$$\tau^*_{۲/۱} = \frac{\tau_{۲/۱}}{\sqrt{\alpha_{Q_۱}}}, \ \alpha_{Q_۱} = \frac{\nu + Q_۱(\mathbf{z})}{\nu + p_۱}. \ \tau_{۲/۱} = (\lambda_۲^T\mathbf{R}_{۲۱}\mathbf{R}_{۱۱}^{-۱} + \lambda_۱^T)z_۱ + \tau, \ ، \ \nu_{۲/۱} = \nu + p_۱$$

ویژگی۴. امید ریاضي و ماتریسواریانس- کوواریانس

اگر $Z \sim EST_۱(\mu, ۱, \lambda, \nu, \tau)$ باشد، آنگاه برای $\nu > ۱$ و $\nu > ۲$ داریم:

$$E(Z) = \mu + \delta E(T_{(-\overline{\tau}, \infty)}),$$

$$(۵)\ Var(Z) = a_*^۲(۱ - \delta^۲) + \sigma_*^۲\delta^۲,$$

که در آن

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{۱ + \lambda^۲}}, \qquad \overline{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{۱ + \lambda^۲}}$$

$$a_*^۲ = \frac{\nu}{\nu - ۱}(۱ + \frac{\mathbf{E}\left(T_{(-\overline{\tau}, \infty)}\right)}{\nu}), \sigma_*^۲ = E(T^۲_{(-\overline{\tau}, \infty)}) - E^۲(T_{(-\overline{\tau}, \infty)}),$$

$$\nu > ۱, E(T_{(-\overline{\tau}, \infty)}) = \frac{\nu}{\nu - ۱}(۱ + \frac{\overline{\tau}^۲}{\nu})\frac{t_۱(\overline{\tau}; \nu)}{T_۱(\overline{\tau}; \nu)},$$

$$.E(T^۲_{(-\overline{\tau}, \infty)}) = \frac{\nu}{\nu - ۲}\frac{T_۱\left(\sqrt{\frac{\nu - ۲}{\nu}}\ \overline{\tau}\ ;\ \ \nu - ۲\right)}{T_۱(\overline{\tau}; \nu)} - \overline{\tau}E\left(T_{(-\overline{\tau}, \infty)}\right), \nu > ۲$$

با استفاده از ویژگی(۳) ، بردار میانگین و ماتریس واریانس- کوواریانس برای حالت چند متغیره $\mathbf{Z} \sim EST_p(\mu, \mathbf{\Sigma}, \lambda, \nu, \tau)$ به صورت زیر تعمیم مي یابد:

$$(۶)\ \nu > ۱, E(\mathbf{Z}) = \mu + \delta\ E(T_{(-\overline{\tau}, \infty)}),$$

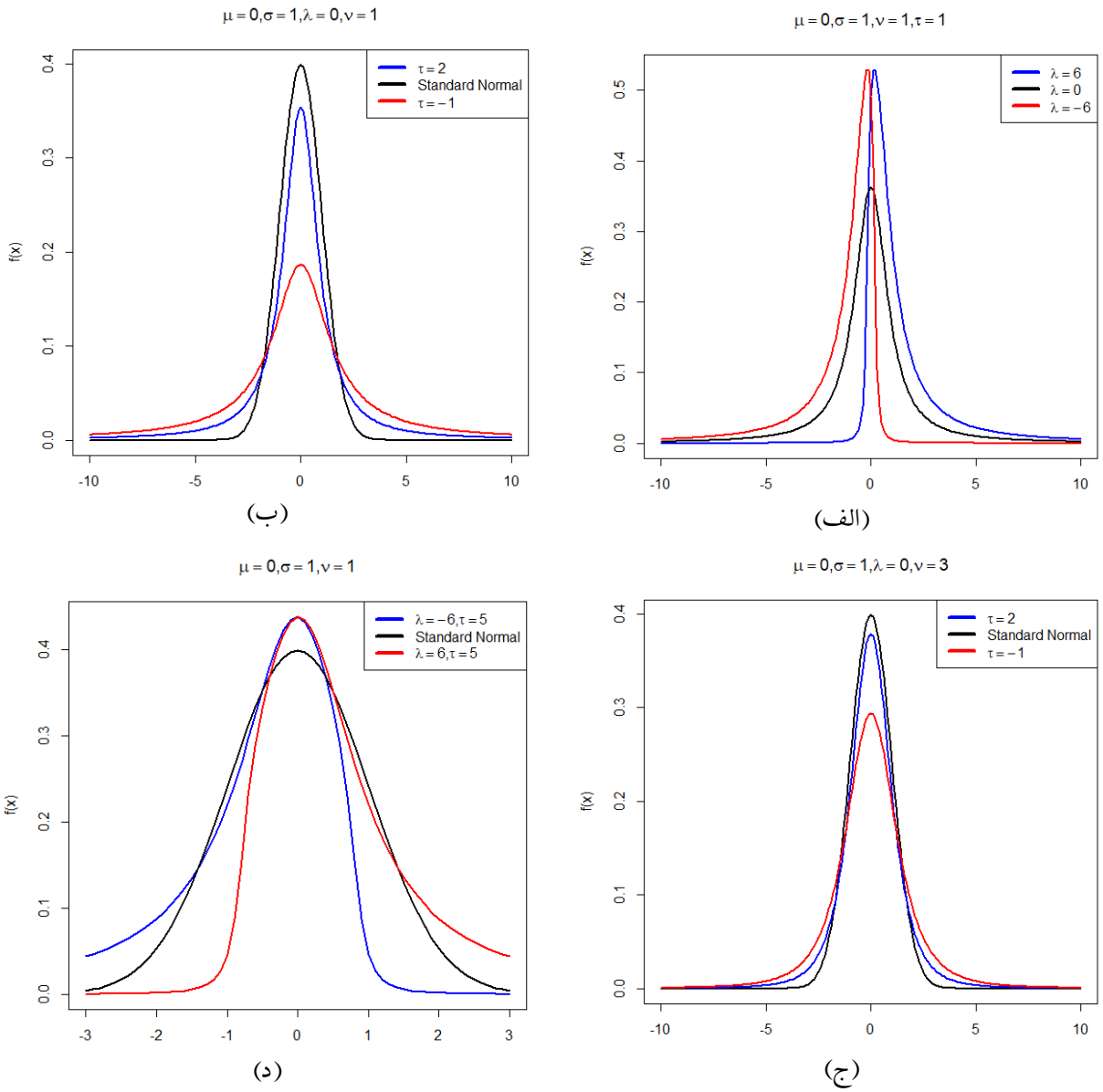
$$(۷)\ .\ \nu > ۲\ ، \ Var(\mathbf{Z}) = a_*^۲\left(\mathbf{R} - \delta\delta^T\right) + \sigma_*^۲\delta\delta^T$$

براي درك شهودي بهتر از رفتار اين توزيع، حالت تك متغيره ي ($p = ۱$) را در نظر می‌گیریم. اگر $X \sim EST_۱(\mu, \sigma^۲, \lambda, \nu, \tau)$ باشد، تابع چگالي آن به صورت زير ساده مي شود:

$$f_X(x) = \frac{t_۱(x; \mu, \sigma^۲, \nu)}{T_۱\left(\frac{\tau}{\sqrt{۱+\lambda^۲}}; \nu\right)}T_۱\left(\frac{\frac{\lambda(x-\mu)}{\sigma+\tau}}{\sqrt{\frac{\nu+۱}{\nu+\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^۲}}}; \nu + ۱\right),\ x \in \mathbb{R}\ . \qquad (۸)$$

شکل () نمودار تابع چگالي() را براي مقادير مختلفي از پارامترهاي شکل و توسعه نمايش مي دهد.

شکل هاي) الف (تا (د) رفتار تابع چگالي توزيع $EST_۱(\mu, , \sigma^۲, \lambda, \nu, \tau)$ را تحت تغييرات پارامترهاي شکل



شکل ۱: نمودار تابع چگالی توزیع EST برای مقادیر مختلف پارامترها.

(λ) و توسعه (τ) نمايشمي دهند. در تمامي نمودارها، منحني سياه رنگ نشا ندهنده ي چگالي توزيع نرمال استاندارد است.

- **شكل (الف) :**(با ثابت نگه داشت $\mu = ۰,\ \sigma = ۱,\ \nu = ۱, \tau = ۱$ تحت تاثير پارامتر چولگی λ بررسی شده است. همان طور كه مشاهده مي شود، براي $\lambda = ۰$ چگالي متقارن است. با افزايش λ به مقادير مثبت $(\lambda = ۶)$، توزيع چوله به راست شده و دم سمت راست كشيده تر مي گردد؛ در مقابل، براي $(\lambda = -۶)$، چولگي منفي (چوله به چپ (ظاهر مي شود.

- **شكل (ب):** در اين حالت $\lambda = ۰$ و $\nu = ۱$ ثابت بوده و پارامتر توسعه τ تغير می‌كند. با كاهش τ از ۲ به ۱-، چگالي نسبت به حالت نرمال تمركز بيشتري در مركز يافته و دم هاي آن سنگين تر مي شوند. اين رفتار نشان دهنده ي تأثير پارامتر برش در توزيع EST است كه مقادير كوچكتر τ احتمال وقوع مقادير دور از مركز را افزايش می‌دهد.

- **شكل (ج):** مشابه شكل (الف)، اما با مقدار بزرگ تر $\tau = ۵$. در اين حالت اثر برش كاهش يافته و توزيع رفتاري نزديك تر به توزيع t ـ چوله‌ی استاندارد نشان مي دهد. جهت چولگي همچنان توسط علامت λ تعيين می‌شود ($\lambda > ۰$ چوله به راست، $\lambda < ۰$ چوله به چپ).

- **شكل (د):** تاثير τ برای $\nu = ۳$ (به جای $\nu = ۱$) بررسی شده است. با وجود سبك تر بودن دم هاي توزيع t با $\nu = ۳$ نسبت به حالت كوشی $(\nu = ۱)$، روند كلي يكسان است: كاهش τ منجر به سنگين تر شدن دم ها نسبت به توزيع نرمال می‌گردد.

  نتيجه گيري آماري: زمانی كه $\lambda = ۰$ باشد توزيع EST به خانواده ي متقارن t (يا t ـ بريده شده) تقليل مي يابد كه به طور ذاتي داراي دم هاي سنگين تر از توزيع نرمال است (به ويژه براي ν های كوچك). با فعال سازي چولگي $(\lambda \neq ۰)$، تقارن از بين رفته و رفتار دم ها نامتقارن مي شود: در حالت $\lambda > ۰$، دم سمت راست نسبت به دم چپ سبك تر، و در حالت $\lambda < ۰$، دم سمت چپ سبك تر خواهد بود. اين ويژگي، همراه با كنترل مستقل سنگيني دم ها از طريق ν و τ انعطاف پذيري مدل EST را برای برازش داده هاي واقعي با ساختارهاي پيچيده تضمين مي كند.

۳ ميدان تصادفی t ـ چوله تعميم‌يافته (ESTRF)

در اين بخش، با بهره گيري از خواصتوزيع چندمتغيره ي معرفي شده، ميدان تصادفي t ـ چوله‌ی تعميم يافته را به صورت زير تعريف كنيم.

۱.۳ تعريف و نمايش تصادفی

ميدان تصادفی $\{ Z(\mathbf{s}) : s \in D \subseteq R^d \}$ را يک ميدان تصادفی t ـ چوله تعميم يافته[1] می ناميم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر مجموعه ی متناهی از مكان ها $s_۱, \ldots, s_n \in D$، بردار مشاهده شده

$$\mathbf{Z} = (Z(s_۱), \ldots, Z(s_n))^T$$

دارای توزيع $EST_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \lambda, \nu, \tau)$ باشد.

[1] Extended Skew-t Random Field (ESTRF)

بر اساس ویژگي نمایشتصادفي توزیع، EST اگر بردار $(n+1)$−بعدی $\mathbf{X} = \left(X_1^T, X_\circ\right)^T$ دارای توزیع t ـ چند متغیره‌ی متقارن باشد، یعنی

$$\mathbf{X} \sim t_{n+1}\left(\circ,\ \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \circ \\ \circ^T & 1 \end{pmatrix}, \nu\right),$$

آنگاه بردار تصادفي شرطي $\mathbf{Z}\left(X_1 \mid X_\circ < \lambda^{\mathbf{T}} X_1 + \tau\right)$ دارای توزیع $EST_n(\circ, \mathbf{\Sigma}, \lambda, \nu, \tau)$ خواهد بود. این نمایش، پایه ي نظري ساخت میدان هاي تصادفي غیرگاوسي با کنترل هم زمان چولگي و سنگیني دم ها را فراهم مي آورد.

۲.۳ مدل فضایی

فرض کنید $\{ Z(\mathbf{s}) : s \in D \}$ یک میدان تصادفی EST با پارامترهاي

$$\mathbf{Z} \sim EST_n(\mathbf{F}\beta, \mathbf{\Sigma}, \lambda \mathbf{1}_n, \nu, \tau)$$

باشد که در آن $\mathbf{F} = [f_j(s_i)]_{n\times r}$ ماتریس توابع معلوم، $\beta \in R^r$ ضرایب رگرسیونی نامعلوم و $\lambda \mathbf{1}_n$ نشان دهنده‌ی پارامتر چولگي ثابت در تمامي مکان هاست. ماتریس کوواریانس $\mathbf{\Sigma} = [\Sigma_{ij}]_{n\times n}$ با درایه‌های

$$\Sigma_{ij} = \gamma\left(\|s_i - s_j\|\right) = \sigma^2 \rho(\|s_i - s_j\|\,; \theta)$$

تعریف مي شود؛ که در آن $\rho(.;\theta)$ تابع همبستگي فضایي معلوم با پارامترهاي نامعلوم θ ، $\sigma^2 > \circ$ واریانس فرآیند، و ν, τ پارامترهای شکل فرض شده‌ی معلوم هستند. هدف برآورد پارامترهای مجهول $\eta = (\beta^T, \sigma^2, \theta, \lambda)^T$ بر اساس مشاهدات $\mathbf{Z} = (Z(\mathbf{s}_1), \ldots, Z(\mathbf{s}_n))^T$ است.

۳.۳ برآورد پارامترها

با استفاده از تابع چگال توزیع EST رابطه (۱) در بخش (۲)، تابع درست نمایي براي يك تحقق مشاهده شده‌ي $\mathbf{Z}$ به صورت زیر است:

$$L(\eta) = \frac{t_n(\mathbf{z}; \mathbf{F}\beta, \mathbf{\Sigma}, \nu)}{T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^2\, \mathbf{1}_n^T \mathbf{R} \mathbf{1}_n}}; \nu\right)} T_1\left(\frac{\lambda \mathbf{1}_n^T \mathbf{Z} + \tau}{\sqrt{\frac{\nu+n}{\nu+Q(\mathbf{z})}}}; \nu+n\right), \qquad (۹)$$

که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{w}^{-1}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}^{-1}$ ماتریس همبستگي، $\mathbf{w} = diag(\mathbf{\Sigma})^{\frac{1}{2}}$ و $Q(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{F}\beta)^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{F}\beta)$ مي باشد. لگاریتم درست نمایي به صورت زیر نوشته مي شود:

$$\updownarrow(\eta) = \ln t_n(\mathbf{z}; \mathbf{F}\beta, \mathbf{\Sigma}, \nu) + \ln T_1\left(\frac{\lambda \mathbf{1}_n^T \mathbf{Z} + \tau}{\sqrt{\frac{\nu+n}{\nu+Q(\mathbf{z})}}}; \nu+n\right) - \ln T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^2\, \mathbf{1}_n^T \mathbf{R} \mathbf{1}_n}}; \nu\right) \quad (۱۰)$$

به دلیل حضور توابع توزیع تجمعي $T_1(.)$ و وابستگي غیرخطي پارامترها، بیشینه سازي $\updownarrow(\eta)$ فاقد فرم بسته است و نیاز به الگوریتم هاي بهینه سازي عددي (مانند $BFGS$ یا $Nelder - Mead$) دارد.

۴.۳ برآورد بیزی و الگوریتم CMMC

در این بخش برآورد پارمترها را با استفاده از روش بیزی بدست می‌آوریم. فرض کنید $\eta = (\beta^{\mathbf{T}}, \sigma^{۲}, \theta, \lambda)^{T}$ و β دارای توزیع پیشین $N_r(\beta_{۰}, \mathbf{\Sigma}_{۰})$ باشد و همچنین $\sigma^{۲}$، θ و λ بترتیب دارای توزیع‌های پیشین $Gamma\,(d_i, \nu_i)\ ,\ i = ۱, ۲, ۳$ باشند. با ضرب تابع درست نمايي () در چگالي هاي پيشين، چگالي پسين پارامترها به صورت تناسبي زير به دست مي آيد:

$$\pi\,(\eta|\mathbf{Z}) \propto L\,(\eta)\ \ \phi_r\,(\beta, \beta_{۰}, \mathbf{\Sigma}_{۰})\ \ \sigma^{۲(d_{۱}-۱)}\ \theta^{d_{۲}-۱}\lambda^{d_{۳}-۱}e^{-(\nu_{۱}\sigma^{۲}+\nu_{۲}\theta+\nu_{۳}\lambda)}$$

به دلیل پیچیدگیِ تحلیلی چگالی پسین، از الگوریتم زنجیره‌ی مارکوف مونت کارلو[۱] (MCMC) با ساختار گیبز–متروپلیس– هستینگز[۲] استفاده می‌کنیم. توزیع‌های شرطی کامل به صورت زیر هستند:

$$(۱۱)\ \ \pi\,(\beta|\mathbf{Z},\sigma^{۲},\theta,\lambda) \propto L\,(\eta)\ \ \phi_r\,(\beta, \beta_{۰}, \mathbf{\Sigma}_{۰})\,,$$
$$(۱۲)\ \ \pi\,(\sigma^{۲}|\mathbf{Z},\beta,\theta,\lambda) \propto L\,(\eta)\ \ \sigma^{۲(d_{۱}-۱)}e^{-\nu_{۱}\sigma^{۲}},$$
$$(۱۳)\ \ \pi\,(\theta|\mathbf{Z},\beta,\sigma^{۲},\lambda) \propto L\,(\eta)\ \ \theta^{d_{۲}-۱}e^{-\nu_{۲}\theta},$$
$$(۱۴)\ \ \pi\,(\lambda|\mathbf{Z},\beta,\sigma^{۲},\lambda) \propto L\,(\eta)\ \ \lambda^{d_{۳}-۱}e^{-\nu_{۳}\lambda},$$

این توزیع‌ها نیز شکل بسته‌ای ندارند؛ از اینرو برای تولید داده‌ها از این چگالی‌ها، از الگوریتم‌های متروپولیس–هستینگز[۳] (MH) استفاده می‌کنیم. توزیع پیشنهادي براي (۱۱) بصورت $g_{\beta}\,(\mathbf{y}) = N_r(\beta, diag(b^{۲}))$ (انتخاب مي شود که در که در آن b عدد مناسبی است که کارایی نمونه برداری MH کنترل می کند. توزیع های پیشنهادی برای (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) به ترتیب $i = ۴, ۵, ۶$ $Gamma\,(d_i, v_i)$ هستند.

۵.۳ پیش‌بینی

هدف، پیش بيني مقدار فرآيند در مکان جدید $\mathbf{s}_{۰} \notin \{\mathbf{s}_{۱}, .., \mathbf{s}_{n}\}$ یعنی بر اساس مشاهدات $\mathbf{Z} = (Z\,(\mathbf{s}_{۱}), \ldots, Z(\mathbf{s}_{n}))$ است. بردار ترکیبي $\mathbf{Z}^{*} = (Z\,(\mathbf{s}_{۰}), \mathbf{Z}^{T})^{T}$ داراي توزيع

$$\mathbf{Z}^{*} \sim EST_{n+۱}(\mathbf{F}^{*}\beta, \mathbf{\Sigma}^{*}, \lambda^{*}, \nu, \tau)$$

که در آن

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{s}_{۰}) = (f_{۱}\,(\mathbf{s}_{۰}), \ldots, f_{r}\,(\mathbf{s}_{۰}))^{T}, \lambda^{*} = (\lambda_{۰}, \lambda\mathbf{۱}_{n})^{T}, \mathbf{F}^{*} = (\mathbf{f}\,(\mathbf{s}_{۰}), \mathbf{F}^{T})^{T}$$
$$\gamma = (\gamma\,(\|\mathbf{s}_{۰} - \mathbf{s}_{۱}\|), \ldots, \gamma\,(\|\mathbf{s}_{۰} - \mathbf{s}_{n}\|))^{T}, \mathbf{\Sigma}^{*} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{۰۰} & \gamma^{\mathbf{T}} \\ \gamma & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix},$$

می‌باشند.

بر اساس ویژگي ()(توزیع شرطی EST)، توزیع شرطي $Z\,(\mathbf{s}_{۰})\,|\mathbf{Z}$ بصورت زیر است:

$$Z\,(\mathbf{s}_{۰})\,|\mathbf{Z} \sim EST_{۱}(\mu_{۰|\mathbf{Z}}, \sigma^{۲}_{۰|\mathbf{Z}}, \lambda_{۰|\mathbf{Z}}, \nu + n, \tau_{۰|\mathbf{Z}})$$

که پارامترهاي آن با استفاده از افراز ماتريسي و متغير استانداردشده ی $\mathbf{Y} = \omega^{-۱}(\mathbf{Z} - \mathbf{F}\beta)$ به صورت زیر محاسبه مي شوند:

---

[۱] method Carlo Monte chain Markov
[۲] Metropolis-Hastings
[۳] Metropolis-Hastings

$$\mu_{\circ|\mathbf{Z}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{s}_{\circ}\right)^{\mathbf{T}}\beta + \gamma^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{Z} - \mathbf{F}^{T}\beta\right),$$

$$\sigma^{2}_{\circ|\mathbf{Z}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\circ\circ} - \gamma^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\gamma,$$

$$\lambda_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\lambda_{\circ} - \gamma^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\lambda\mathbf{1}_{n}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^{2}\mathbf{1}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_{\mathbf{n}} - \frac{\left(\gamma^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_{\mathbf{n}}\right)^{2}}{\mathbf{1}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_{\mathbf{n}}}}}$$

$\nu_{\circ|\mathbf{Z}} = \nu + n$ ،
$\tau_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\tau + \lambda_{\circ}\gamma^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y} + \lambda\mathbf{1}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}Y}{\sqrt{\frac{\nu + Q_{1}(\mathbf{Y})}{\nu+n}}}$.
که در آن $Q_{1}\left(\mathbf{Y}\right) = \mathbf{Y}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{Y}$ و $R_{11} = \omega^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\,\omega^{-1}$ است.

با فرض تابع زیان درجه ي دوم $L\left(\widehat{Z}, Z\right) = \left(\widehat{Z} - Z\right)^{2}$، پیش بینی کننده بهینه ي بیزي برابر امید ریاضي شرطي است. با استفاده از ویژگي ۴، پیش بیني کننده و واریانس پیش بیني به صورت زیر به دست مي آیند:

$$\widehat{Z}\ \left(\mathbf{s}_{\circ}\right) = E\left(Z\left(\mathbf{s}_{\circ}\right)|\mathbf{Z}\right) = \mu_{\circ|\mathbf{Z}} + \delta_{\circ|\mathbf{Z}}\,E\left(T\left(-\overline{\tau}_{\circ|\mathbf{Z}}\ ,\ \infty\right)\right), \qquad (۱۵)$$

$$Var\left(Z\left(\mathbf{s}_{\circ}\right)|\mathbf{Z}\right) = a_{*}^{2}\sigma^{2}_{\circ|\mathbf{Z}}\left(1 - \delta^{2}_{\circ|\mathbf{Z}}\right) + a_{*}^{2}\sigma^{2}_{\circ|\mathbf{Z}}\sigma^{2}_{\circ|\mathbf{Z}}, \qquad (۱۶)$$

که در آن $\delta_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\lambda_{\circ|\mathbf{Z}}}{\sqrt{1+\lambda^{2}_{\circ|\mathbf{Z}}}}$ ، $\overline{\tau}_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\tau_{\circ|\mathbf{Z}}}{\sqrt{1+\lambda^{2}_{\circ|\mathbf{Z}}}}$ و مقادیر $E\left(T_{(\circ)}\right)$ و $E^{2}\left(T_{(\circ)}\right)$ دقیقاً مطابق روابط ویژگي ۴ با جایگزیني $\nu \longrightarrow \nu + n$ و $\overline{\tau} \longrightarrow \overline{\tau}_{\circ|\mathbf{Z}}$ محاسبه می‌شوند. این ساختار، تعمیمي طبیعي از کریجینگ ساده به فضاي توزیع هاي چوله ي سنگین دم را فراهم مي آورد.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش به منظور ارزیابي عملکرد مدل میدان تصادفي توزیع t چوله تعمیم یافته (EST) در پیش بیني فضایي و برآورد پارامترها، یك مطالعه‌ی شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار R انجام شده‌است. در این مطالعه $n = ۳۰۰$ داده فضایی از مدل EST با پارامترهای معلوم تولید گردید. مقادیر واقعي پارامترها در جدول ۱ آورده شده است. مقادیر $f_{i}\left(\mathbf{s}_{j}\right)$ به صورت اعداد تصادفي مستقل از توزیع یکنواخت در بازه (۱و۰) شبیه سازي شدند.

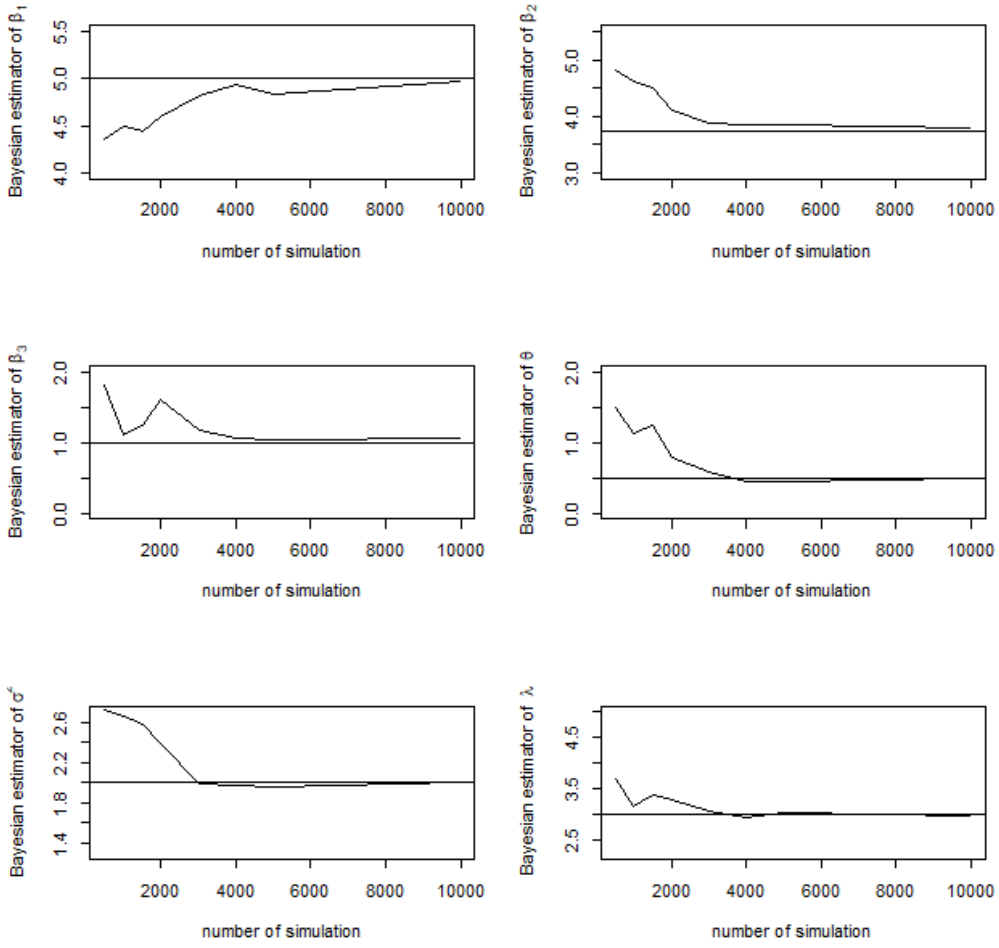
براي بررسي ناهنجاري داده ها، آزمون نرمالیتي شاپیروویلکسبر روي داده هاي تولیدي انجام گرفت. مقدار P-value کمتر ۰٫۰۵ به دست آمد که فرض نرمال بودن داده ها را در سطح اطمینان ۹۵٪ رد مي کند. این نتیجه لزوم استفاده از مدل هاي غیرگاوسي مانند EST را تأیید مي نماید.

۱.۴ برآورد پارامترها

ابتدا پارامترهاي مدل با بیشینه سازي لگاریتم درست نمایي (رابطه ۱۰) و استفاده از تابع optimدر نرم افزار R برآورد شدند. مقادیر حاصل از روشماکسیمم درست نمایي (MLE) بعنوان مقدار آغازین در رویکرد بیزی به کار گرفته شدند. در استنباط بیزی از الگوریتم نمونه‌گیری گیبز با ۵۰۰۰ تکرار استفاده گردید. نمودارهاي همگرایي براي

میانگین پارامترها در شکل ۲ نشان داده شده است. این نمودارها حاکي از همگرايي مناسب زنجيره هاي ماركوف به مقادير واقعي پارامترها هستند.

جدول ۱ مقادیر برآورد شده، اريبي (bias) و میانگین توان دوم خطا (MSE) پارامترهای مدل را برای دو روش برآوردگری ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) و بیزی ارائه می‌دهد. مقادير كوچك MSE و اريبي حاكي از كارايي برآوردگرهاي بيزي براي مدل EST مي باشد.



شکل ۲: نمودار همگرایی زنجیره‌های مارکوف برای پارامترهای مدل EST.

۲.۴ پیش‌بینی مقادیر گمشده

براي ارزيابي توان پيش بيني مدل EST در مقايسه با مدل گاوسي معمول، ۴۰ مكان به طور تصادفي از بين ۳۰۰ مكان به عنوان مقادير گمشده انتخاب شدند. اين فرآيند ۱۰۰۰ بار تكرار گرديد(در هر تكرار ۴۰ مكان جديد و متفاوت به عنوان نقاط گمشده انتخاب مي شوند). پيش بيني مقادير گمشده با استفاده از دو مدل EST (مدل پيشنهادي) و مدل گاوسي انجام شد. معيارهاي ارزيابي شامل واريانس پيش بيني، اريبي و ميانگين مربعات خطا (MSE) مي باشند. واريانس پيش بيني بر اساس ويژگي) ۴) توزيع EST محاسبه گرديد.

نتايج در جدول ۲ آورده شده است. مدل EST در مقايسه با مدل گاوسي داراي MSE بسيار كوچكتر (۱۴.۰ در برابر ۳۹.۲)، واريانس پيش بيني كمتر (۰۵۹.۰ در برابر ۹۴۶.۰ و قدر مطلق اريبي كمتري (۰۳۷.۰ در برابر (

جدول ۱: مقادیر برآوردشده، اریبی و میانگین توان دوم خطای پارامترهای مدل EST برای دو روش ماکزیمم درست‌نمایی و بیزی.

پارامتر	مقدار واقعی	روش درست‌نمایی ماکزیمم			روش بیزی		
		برآورد	اریبی	MSE	برآورد	اریبی	MSE
β_1	۵	۹۸۵.۴	۰۱۱.۰−	۰۰۴۸.۰	۰۷۰۷.۵	۰۷۰۷.۰	۳۱۹۷۶.۰
β_2	۷۵.۳	۷۸.۳	۰۰۸۷.۰	۰۰۲۷.۰	۸۴۳۱.۳	۰۹۳۱.۰	۰۰۹۷۸.۰
β_3	۱	۹۱.۰	۰۸۵۸.۰	۰۱۶۴.۰	۹۹۹۹.۰	۰۰۰۱.۰−	۰۰۲۵۷.۰
σ^2	۲	۸۷.۱	۰۲۱۴.۰−	۰۰۳۴.۰	۴۱۲۱.۸	۴۱۲۱.۶	۱۷۲۴۶.۴۱
θ	۵.۰	۴۹.۰	۰۱۴۶.۰−	۰۰۳۷.۰	۶۲۶۶.۰	۱۲۵۵.۰	۰۲۰۳۷.۰
λ	۳	۱۶.۳	۰۱۴۶.۰	۰۰۴۵.۰	۹۶۴۶.۷	۹۴۶.۴	۵۵۸۷۳.۳۱

(۱۱۶.۰ مي باشد. نتايج به وضوح نشان مي دهند كه مدل EST در مواجهه با داده هاي فضايي چوله و دم سنگين، عملكرد بسيار بهتري نسبت به مدل گاوسي دارد و پيش بيني هاي دقيق تري ارائه مي دهد.

جدول ۲: نتایج پیش‌بینی دو مدل چوله‌ـ تی و گاوسی.

مدل EST			مدل گاوسی		
واریانس	اریبی	MSE	واریانس	اریبی	MSE
۰۵۹.۰	۰۳۷.۰	۱۴.۰	۹۴۶.۰	۱۱۶.۰−	۳۹.۲

۳.۴ بحث و نتیجه‌گیری

نتايج مطالعه شبيه سازي نشان مي دهد كه مدل ميدان تصادفي t ـ چوله تعميم يافتهESTRF ( ) عملكرد مطلوبي در برآورد پارامترها و پيش بيني فضايي داده هاي نامتقارن با دم هاي سنگين دارد. برآوردگرهاي بيزي با استفاده از الگوريتم گيبز و متروپوليس-هستينگز، همگرايي مناسبي به مقادير واقعي نشان دادند و اريبي و MSE كوچكي توليد كردند. در پيش بيني مقادير گمشده، مدل EST برتري آشكاري نسبت به دل كلاسيكگاوسي داشت؛ به طوري كه ميانگين مربعات خطاي پيش بيني از ۳۹.۲ به ۱۴.۰ كاهش يافت و واريانس پيش بيني نيز از ۹۴۶.۰ به ۰۵۹.۰ تنزل پيدا كرد. اين نتايج حاكي از كارايي بالاي مدل پيشنهادي در مواجهه با داده هاي فضايي چوله و دم سنگين است.

به طور خلاصه، مدل ميدان تصادفي تعميم يافته t ـ چوله براي داده هايي كه از نظر چولگي و سنگيني دم ها نسبت به توزيع نرمال، سنگين تر يا حتي سبك تر هستند، كارآمدتر و بهتر عمل مي كند. اين ويژگي همراه با ساختار پارامتريك منعطف، ESTRF را به ابزاري قدرتمند براي تحليل داده هاي فضايي نامتقارن با رفتار دم هاي متفاوت تبديل كرده است.

به عنوان پيشنهاد براي پژوهش هاي آتي، مي توان كاربرد اين مدل را در داده هاي فضايي با ابعاد بالا، مدل سازي فضايي-زماني و همچنين داده هاي فضايي با ساختار وابستگي غيرايستا مورد بررسي قرار داد. همچنين توسعه نسخه اي از اين ميدان تصادفي با پارامترهاي چولگي وابسته به مكان مي تواند جذاب باشد.

كاهش چشمگير MSE و واريانس پيش بيني نسبت به مدل گاوسي، برتري اين رويكرد را در كاربردهاي عملي كه داده هاي فضايي انحراف از نرمال را نشان مي دهند، تأييد مي كند.

در این مقاله با استفاده از توزیع تعمیم یافته t ـ چوله یک میدان تصادفی تحت عنوان میدان تصادفی تعمیم یافته t ـ چوله را معرفی کردیم. شبیه سازی داده‌ها نشان داد که این مدل برای داده هایی که از نظر چولگی و سنگینی دم ها از توزیع نرمال، سنگین تر و یا سبکتر هستند،کارآمدتر است و بهتر عمل می‌کند.

مراجع

References

[1] B. Arellano-Valle and G. Genton, Multivariate extended skew-t distributions and related families, International Journal of Statistics, 68 (2010), 201–234.

[2] B. C. Arnold and R. J. Beaver, The Skew-Cauchy distribution, Statistics and Probability Letters, 49 (2000), 285–290.

[3] B. C. Arnold and R. J. Beaver, Hidden truncation models, Sankhya Ser. A, 62 (2000), 22–35.

[4] A. Azzalini and A. Capitanio, Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution, Journal of the Royal Statistical Society Series B, 61 (1999), 579–602.

[5] A. Azzalini and A. Capitanio, Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution, Journal of the Royal Statistical Society Series B, 65 (2003), 367–389.

[6] A. Azzalini and M. G. Genton, Robust likelihood methods based on the skew-t and related distributions, International Statistical Review, 76 (2008), 106–129.

[7] A. Azzalini and A. Dalla Valle, The multivariate skew-normal distribution, Biometrika, 83 (1996), 715–726.

[8] J. Dominguez-Molina, G. Gonzales-Farias and A. Gupta, The multivariate closed skew normal distribution, Technical Report 03-12, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, 2003.

[9] F. Hosseini and M. Mohammadzadeh, Bayesian prediction for spatial generalised linear mixed models closed skew normal latent variables, Australian & New Zealand Journal of Statistics, 54(1) (2012), 43–62.

[10] O. Karimi, H. Omre and M. Mohammadzadeh, Bayesian closed-skew Gaussian inversion of seismic AVO data for elastic material properties, Geophysics, 75(1) (2010), 1–11.

[11] O. Karimi and M. Mohammadzadeh, Bayesian spatial prediction for discrete closed skew Gaussian random field, Mathematical Geosciences, 43 (2011), 565–582.

[12] H.-M. Kim and B. K. Mallick, Analyzing spatial data using skew Gaussian processes, in Spatial Cluster Modelling, A. B. Lawson and D. G. T. Denison (eds.), 2002, 163–173.

[13] H.-M. Kim and B. K. Mallick, A Bayesian prediction using the Skew-Gaussian distribution, Journal of Statistical Planning and Inference, 120 (2004), 85–100.

[14] V. D. Oliveira, B. Kedem and D. Short, Bayesian Prediction of Transformed Gaussian Random Fields, Journal of the American Statistical Association, 92 (1997), 1422–1433.

[15] V. De Oliveira and M. D. Ecker, Bayesian hot spot detection in the presence of a spatial trend: application to total nitrogen concentration in Chesapeake Bay, Environmetrics, 13 (2002), 85–101.

[16] V. De Oliveira, A note on the correlation structure of transformed Gaussian random fields, Australian & New Zealand Journal of Statistics, 45(3) (2003), 353–366.

[17] J. Roislien and H. Omre, T-distributed random fields: a parametric model for heavy-tailed well-log data, Mathematical Geology, 38 (2006), 821–849.