

Bayesian spatial prediction for the extended skew-t random field

Mehrdad Taghipour⁽¹⁾ and Mohammad Mehdi Saber⁽²⁾¹

⁽¹⁾ Department of Statistics, University of Qom, Qom, Iran.

⁽²⁾ Department of Statistics, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran.

Received: 19 November 2024

Accepted: 18 August 2026

Published online: 23 September 2026

Abstract: This paper introduces a new spatial random field based on the multivariate extended skew-t (EST) distribution, which enables more accurate spatial prediction. Owing to its inherent flexibility in modeling asymmetry as well as heavy-tailed and light-tailed data, the proposed random field is well-suited for predicting non-Gaussian spatial data. Simulation results demonstrate that the proposed model significantly improves prediction accuracy compared to the classical Gaussian random field, particularly in scenarios involving skewed and heavy-tailed spatial data.

Keywords: spatial data; Gaussian random field; multivariate extended skew-t distributions; spatial Bayesian prediction.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author
E-mail address: mmsaber@eghlid.ac.ir (Mohammad Mehdi Saber)



پیش‌بینی فضایی بیزی برای میدان تصادفی t - چوله تعمیم‌یافته

مهرداد تقی‌پور^(۱)؛ محمدمهدی صابر^(۲)

^(۱) گروه آمار، دانشگاه قم، قم، ایران. mtaghipour@qom.ac.ir

^(۲) گروه آمار، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران. mmsaber@eghlid.ac.ir

تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۲۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۸/۲۹

چکیده: در این مقاله، با بهره‌گیری از توزیع t - چوله تعمیم‌یافته‌ی چندمتغیره، یک میدان تصادفی فضایی جدید تعریف شده و کارایی آن در پیش‌بینی فضایی بررسی می‌شود. این توزیع به دلیل انعطاف‌پذیری بالا در مدل‌سازی هم‌زمان چولگی و دم‌سنگینی داده‌ها، در چارچوب استنباط بیزی امکان پیش‌بینی دقیق‌تری را برای داده‌های فضایی نامتقارن فراهم می‌کند. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در مقایسه با میدان‌های تصادفی متداول گاوسی، به‌کارگیری این مدل در مواجهه با داده‌های فضایی چوله و دم‌سنگین، خطای پیش‌بینی را به‌طور معناداری کاهش داده و دقت برآوردها را افزایش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: داده‌های فضایی، میدان تصادفی گاوسی، توزیع t - چوله تعمیم‌یافته چندمتغیره، پیش‌بینی بیزی فضایی.

۱ مقدمه

یکی از مباحث مهم در مبحث کلیدی در آمار فضایی، مساله پیش‌بینی مکانی است. در بسیاری از مدل‌های کلاسیک، فرض بر این است که داده‌ها از یک میدان تصادفی گاوسی^۲ پیروی می‌کنند. با این حال، در عمل در بسیاری از داده‌های مکانی (فضایی) ماهیت غیر گاوسی دارند. رویکرد متداول برای برخورد با چنین داده‌هایی، اعمال تبدیلات نرمال‌ساز است (برای نمونه به [۱۴-۱۶] مراجعه کنید). با این وجود، استفاده از تبدیل‌های نرمال‌ساز در کاربردهای عملی همواره مطلوب نیست، زیرا تفسیر نتایج رویدادهای تبدیل شده معمولاً دشوارتر از داده‌های اولیه است [۴، ۱۳]. برای مدل‌سازی مستقیم داده‌های نامتقارن، کیم و مالیک [۱۲] از میدان تصادفی گاوسی چوله^۳ استفاده کردند. از آنجا که توزیع گاوسی چوله تحت عمل شرطی بسته نیست، دومینگز و همکاران [۸] خانواده‌ی توزیع‌های گاوسی چوله بسته^۴ را معرفی نمودند که این ویژگی مطلوب را داراست. این توزیع در کاربردهای متنوعی از جمله پیش‌بینی

^(۱) نویسنده مسئول مقاله (Mohammad Mehdi Saber) mmsaber@eghlid.ac.ir

^۲Gaussian random field

^۳Skew Gaussian

^۴(CSG) Gaussian Skew Closed

فضایی بیزی [۱۰]، رگرسیون فضایی بیزی، وارون سازی داده های لرزه ای [۱۱] و نیز پیش بینی بیزی در مدل های آمیخته خطی تعمیم یافته^۱ با متغیرهای نهفته ی چوله ی بسته [۹] مورد استفاده قرار گرفته است.

با این حال، توزیع گاوسی چوله ی بسته برای مدل سازی داده های دارای دم های سنگین مناسب نیست. از سوی دیگر، از آنجا که توزیع t گزینه ای کارآمد برای داده های حقیقی با دم های سنگین محسوب می شود، روئیسین و امره [۱۷] میدان تصادفی توزیع t را تعریف کردند. اما به دلیل تقارن ذاتی این میدان، کارایی لازم برای داده های نامتقارن را ندارد. به همین منظور، توزیع توزیع t -چوله به عنوان مدل منعطفی با پارامترهای کنترل کننده ی چولگی و کشیدگی معرفی شد که آزالینی و جنتون [۶] نیز با ارائه ی مبانی نظری و مثال های کاربردی از آن حمایت کرده اند. با این وجود، توزیع t -چوله نیز محدودیت هایی دارد: نخست آنکه، همانند توزیع گاوسی چوله، تحت شرطی گیری بسته نیست که این موضوع در استنتاج های شرطی و پیش بینی های مکانی محدودیت ایجاد می کند. دوم آنکه، اگرچه این توزیع برای داده های با دم های سنگین مناسب است، اما انعطاف لازم برای مدل سازی داده های با دم های سبک تر از توزیع نرمال را ندارد. برای رفع این کاستی ها، آرلانو-وال و جنتون [۱] خانواده ی توزیع های چندمتغیره ی t -چوله ی تعمیم یافته را معرفی و به طور مفصل بررسی کردند. این خانواده علاوه بر انعطاف پذیری ریاضی و کارایی در مدل سازی توزیع هایی با چولگی و دم های سنگین تر را نیز داراست. به گفته ی مؤلفان [۱]، این توزیع خانواده ای بسیار منعطف از مدل های آماری را فراهم می آورد.

ساختار مقاله به این ترتیب است: در بخش دوم، توزیع چندمتغیره ی t -چوله تعمیم یافته مرور شده و ویژگی های کلیدی

آن که برای تعریف میدان تصادفی جدید و پیش بینی فضایی ضروری اند، بیان می شود. در بخش سوم، میدان تصادفی مبتنی بر این توزیع معرفی و مدل فضایی پیشنهادی ارائه می گردد؛ همچنین روش برآورد پارامترهای مدل تشریح می شود. در نهایت، بخش چهارم به بررسی نتایج شبیه سازی مدل پیشنهادی و مقایسه ی عملکرد آن با مدل های کلاسیک گاوسی اختصاص دارد.

۲ متغیر تصادفی چندمتغیره تعمیم یافته t -چوله

آرلانو وال و جنتون [۱] توزیع تعمیم یافته ی t -چوله را بصورت زیر معرفی کردند. تعریف ۱. بردار تصادفی پیوسته p -بعدی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)'$ دارای توزیع چند متغیره ی t -چوله تعمیم یافته (Skew- t) Extended (EST) است و با نماد $\mathbf{X} \sim EST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ نشان داده می شود. اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$(1) \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{t_p(\mathbf{x}; \mu, \Sigma, \nu)}{T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^T \mathbf{R} \lambda}}; \nu\right)} T_1\left(\frac{\lambda^T \mathbf{z} + \tau}{\sqrt{\frac{\nu+p}{\nu+Q(\mathbf{z})}}}; \nu+p\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p,$$

که در آن $\mathbf{z} = \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mu)$ ، (ماتریس همبستگی)، $\mathbf{R} = \omega^{-1} \Sigma \omega^{-1}$ و $\omega = \text{diag}(\Sigma)^{\frac{1}{2}}$ (ماتریس مقیاس)

و

$Q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}$ می باشد. پارامترهای $\lambda \in \mathbb{R}^p$ و $\tau \in \mathbb{R}$ بترتیب نشان دهنده ی چولگی و توسعه هستند. همچنین $t_p(\mathbf{x}; \mu, \Sigma, \nu)$ نشان دهنده تابع چگالی توزیع t چند متغیره ی استاندارد با بردار مکان $\mu \in \mathbb{R}^p$ ، ماتریس مقیاس Σ و درجه آزادی $\nu > 0$ است:

$$(2) \quad t_p(\mathbf{x}; \mu, \Sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}} (\nu\pi)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{Q(\mathbf{z})}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+p}{2}\right)},$$

با توجه به ساختار پارامتریک آن توزیع، EST_p خانواده بسیار منعطف از مدل های آماری را ارائه می دهد که طیف وسیعی از داده ها را پوشش می دهد. به عنوان مثال:

- اگر $\lambda = 0$ و $\tau = 0$ باشد، رابطه (۱) به توزیع t چندمتغیره‌ی متقارن $t_p(\mu, \Sigma, \nu)$ تقلیل می‌یابد. در این حالت، با میل کردن $\nu \rightarrow +\infty$ به توزیع نرمال چندمتغیره‌ی $N_p(\mu, \Sigma)$ و برای $\nu = 1$ به توزیع کوشی چندمتغیره‌ی $C_p(\mu, \Sigma)$ می‌رسیم.
 - اگر $\nu \rightarrow +\infty$ باشد، توزیع به حالت نرمال چندمتغیره همگرا می‌شود، در حالی که برای $\tau \rightarrow -\infty$ چگالی به‌صفر میل می‌کند.
 - برای $\tau = 0$ توزیع با تعریف t -چوله چند متغیره $ST_p(\mu, \Sigma, \nu, \lambda)$ معرفی شده توسط آزالینی و کاپیتانیو [۵] منطبق می‌گردد.
 - توزیع نرمال چوله $SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ [۷] و کوشی چوله $SC_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ [۲] بترتیب با حدگیری $\nu \rightarrow +\infty$ و قراردادادن $\nu = 1$ در مدل ST_p حاصل می‌شوند.
 - اگر $\lambda = 0$ باشد، خانواده‌ای جدید از توزیع‌های متقارن (با پارامتر توسعه τ) به دست می‌آید. در نهایت، با میل کردن $\nu \rightarrow +\infty$ در حضور $\tau \neq 0$ ، توزیع نرمال چوله‌ی تعمیم یافته $ESN_p(\mu, \Sigma, \lambda, \tau)$ [۳، ۴] استخراج می‌شود.
- این انعطاف‌پذیری ساختاری، توزیع EST_p را به ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی داده‌های حقیقی با چولگی، کشیدگی و رفتار دم‌های متفاوت تبدیل کرده است. در ادامه، ویژگی‌های کلیدی این توزیع که در ادامه‌ی مقاله مورد نیاز است، آورده شده است.

ویژگی ۱. بسته بودن تحت توزیع حاشیه‌ای

اگر افراز $\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T)$ را در نظر بگیریم، بطوریکه $\dim(\mathbf{X}_1) = p_1$ ، $\dim(\mathbf{X}_2) = p_2$ و $p_1 + p_2 = p$ باشد،

آنگاه $\mathbf{X}_1$ نیز دارای توزیع ESN_1 خواهد بود:

$$(3) \quad \mathbf{X}_1 \sim EST_{p_1}(\mu_1, \Sigma_{11}, \lambda_1^*, \nu, \tau_1^*),$$

که در آن:

$$., \mathbf{R}_{22|1} = \mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{R}_{12} \quad \tau_1^* = \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda_2^T \mathbf{R}_{22|1} \lambda_2}} \quad \lambda_1^* = \frac{\lambda_1 + \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{12} \lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^T \mathbf{R}_{22|1} \lambda_2}},$$

ویژگی ۲. نمایش تصادفی (پیچش)

فرض کنید متغیر تصادفی $\mathbf{Z}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\frac{\nu + T_{(-\bar{\tau}, \infty)}^2}{\nu + 1}} \mathbf{X}_1 + \delta T_{(-\bar{\tau}, \infty)},$$

که در آن:

$$\delta = \frac{\mathbf{R} \lambda}{\sqrt{1+\lambda^T \mathbf{R} \lambda}}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^T \mathbf{R} \lambda}},$$

$$\mathbf{X}_1 \sim t_p(0, \mathbf{R} - \delta \delta^T, \nu + 1),$$

$$T_{(-\bar{\tau}, \infty)} = (T_0 | T_0 + \bar{\tau} > 0), \quad T_0 \sim t(0, 1, \nu)$$

و متغیرهای $\mathbf{X}_1$ و T_0 مستقل هستند. در این صورت:

$$\mathbf{Z} \sim EST_p(0, \mathbf{R}, \nu, \lambda, \bar{\tau}), \quad (4)$$

ویژگی ۳. توزیع شرطی EST

با فرض $X \sim EST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ و افراز مشابه ویژگی ۱، توزیع شرطی X_2 به شرط $X_1 = x_1$ به صورت زیر است:

$$(X_2 | X_1 = x_1) \sim EST_{p_2}(\mu_{2|1}, \alpha_{Q_1} \Sigma_{22|1}, \lambda_{2|1}, \nu_{2|1}, \tau_{2|1}^*)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} \mu_{2|1} &= \mu_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (x_1 - \mu_1), \\ z_1 &= \mathbf{w}_1^{-1} (x_1 - \mu_1), \quad Q_1(z_1) = z_1^T \mathbf{R}_{11}^{-1} z_1 \\ \Sigma_{22|1} &= \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}, \\ \mathbf{w}_{2|1} &= \text{diag}(\Sigma_{22|1})^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{w}_2 = \text{diag}(\Sigma_{22})^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_{2|1} = \mathbf{w}_{2|1} \mathbf{w}_2^{-1} \lambda_2 \\ \tau_{2|1}^* &= \frac{\tau_{2|1}}{\sqrt{\alpha_{Q_1}}}, \quad \alpha_{Q_1} = \frac{\nu + Q_1(z)}{\nu + p_1}, \quad \tau_{2|1} = (\lambda_2^T \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} + \lambda_1^T) z_1 + \tau, \quad \nu_{2|1} = \nu + p_1 \end{aligned}$$

ویژگی ۴. امید ریاضی و ماتریس واریانس-کوواریانس

اگر $Z \sim EST_1(\mu, 1, \lambda, \nu, \tau)$ باشد، آنگاه برای $\nu > 1$ و $\nu > 2$ داریم:

$$E(Z) = \mu + \delta E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}),$$

$$(\delta) \text{ Var}(Z) = a_*^2 (1 - \delta^2) + \sigma_*^2 \delta^2,$$

که در آن

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

$$a_*^2 = \frac{\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)})}{\nu} \right), \quad \sigma_*^2 = E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}^2) - E^2(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}),$$

$$\nu > 1, \quad E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}) = \frac{\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{\bar{\tau}}{\nu} \right) \frac{t_1(\bar{\tau}; \nu)}{T_1(\bar{\tau}; \nu)},$$

$$E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}^2) = \frac{\nu}{\nu-2} \frac{T_1\left(\sqrt{\frac{\nu-1}{\nu}} \bar{\tau}; \nu-2\right)}{T_1(\bar{\tau}; \nu)} - \bar{\tau} E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}), \quad \nu > 2$$

با استفاده از ویژگی (۳)، بردار میانگین و ماتریس واریانس-کوواریانس برای حالت چند متغیره $Z \sim EST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

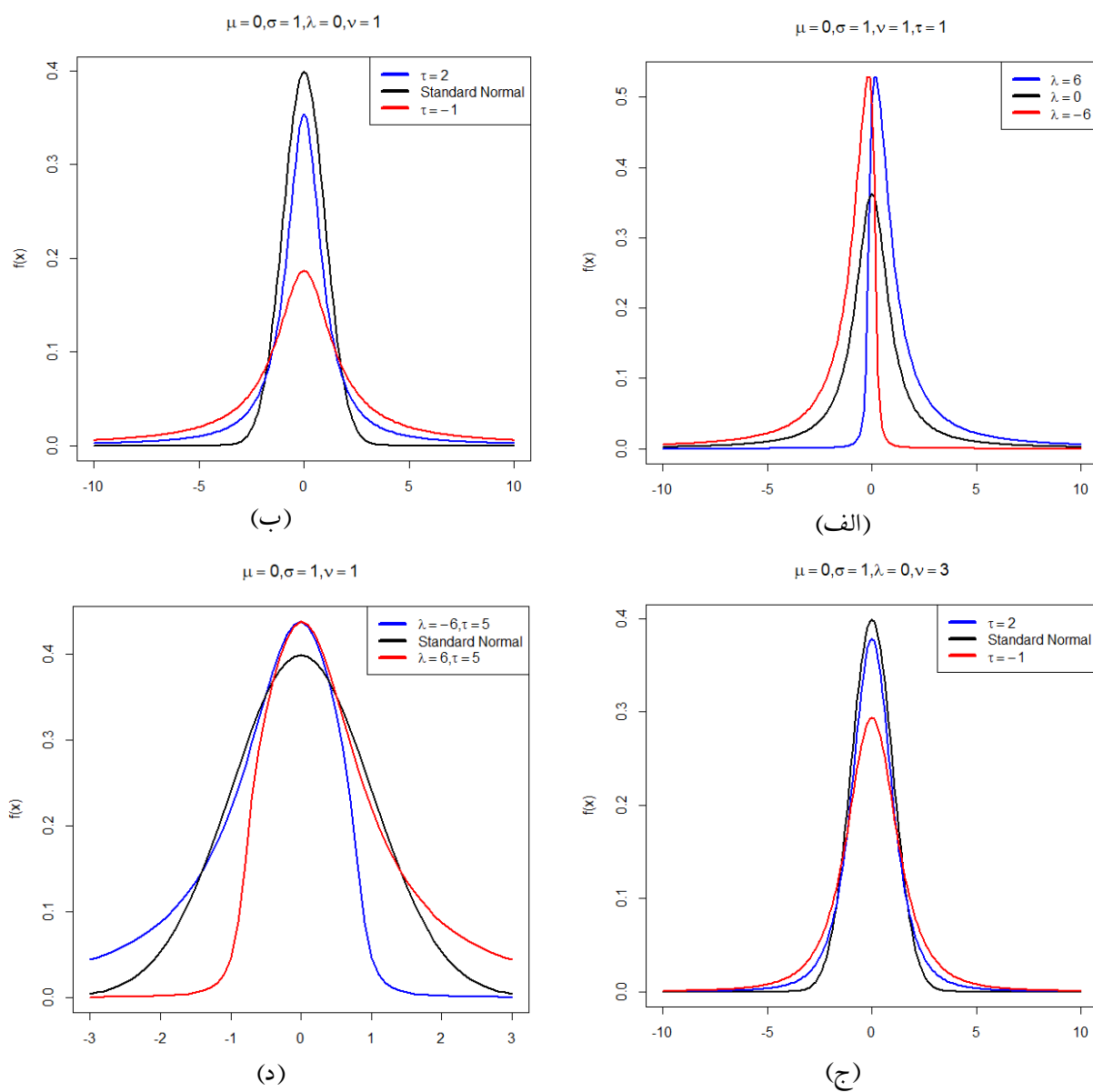
$$(\delta) \nu > 1, \quad E(Z) = \mu + \delta E(T_{(-\bar{\tau}, \infty)}),$$

$$(\gamma) \nu > 2, \quad \text{Var}(Z) = a_*^2 (\mathbf{R} - \delta \delta^T) + \sigma_*^2 \delta \delta^T$$

برای درک شهودی بهتر از رفتار این توزیع، حالت تک متغیره $(p = 1)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $X \sim EST_1(\mu, \sigma^2, \lambda, \nu, \tau)$ باشد، تابع چگالی آن به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_X(x) = \frac{t_1(x; \mu, \sigma^2, \nu)}{T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \nu\right)} T_1\left(\frac{\frac{\lambda(x-\mu)}{\sigma+\tau}}{\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+(\frac{x-\mu)^2}{\sigma^2}}}}; \nu+1\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\lambda)$$

شکل () نمودار تابع چگالی () را برای مقادیر مختلفی از پارامترهای شکل و توسعه نمایش می‌دهد. شکل های الف (تا د) رفتار تابع چگالی توزیع $EST_1(\mu, \sigma^2, \lambda, \nu, \tau)$ را تحت تغییرات پارامترهای شکل



شکل ۱: نمودار تابع چگالی توزیع EST برای مقادیر مختلف پارامترها.

(λ) و توسعه (τ) نمایش می‌دهند. در تمامی نمودارها، منحنی سیاه رنگ نشا ندهنده ی چگالی توزیع نرمال استاندارد است.

● **شکل (الف):** با ثابت نگه داشت $\mu = 0, \sigma = 1, \nu = 1, \tau = 1$ تحت تاثیر پارامتر چولگی λ بررسی شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، برای $\lambda = 0$ چگالی متقارن است. با افزایش λ به مقادیر مثبت ($\lambda = 6$)، توزیع چوله به راست شده و دم سمت راست کشیده تر می‌گردد؛ در مقابل، برای ($\lambda = -6$)، چولگی منفی (چوله به چپ) ظاهر می‌شود.

● **شکل (ب):** در این حالت $\lambda = 0$ و $\nu = 1$ ثابت بوده و پارامتر توسعه τ تغییر می‌کند. با کاهش τ از ۲ به ۱-، چگالی نسبت به حالت نرمال تمرکز بیشتری در مرکز یافته و دم های آن سنگین تر می‌شوند. این رفتار نشان دهنده ی تاثیر پارامتر برش در توزیع EST است که مقادیر کوچکتر τ احتمال وقوع مقادیر دور از مرکز را افزایش می‌دهد.

● **شکل (ج):** مشابه شکل (الف)، اما با مقدار بزرگ تر $\tau = 5$. در این حالت اثر برش کاهش یافته و توزیع رفتاری نزدیک تر به توزیع t -چوله ی استاندارد نشان می‌دهد. جهت چولگی همچنان توسط علامت λ تعیین می‌شود ($\lambda > 0$ چوله به راست، $\lambda < 0$ چوله به چپ).

● **شکل (د):** تاثیر τ برای $\nu = 3$ (به جای $\nu = 1$) بررسی شده است. با وجود سبک تر بودن دم های توزیع t با $\nu = 3$ نسبت به حالت کوشی ($\nu = 1$)، روند کلی یکسان است: کاهش τ منجر به سنگین تر شدن دم ها نسبت به توزیع نرمال می‌گردد.

نتیجه گیری آماری: زمانی که $\lambda = 0$ باشد توزیع EST به خانواده ی متقارن t (یا t -بریده شده) تقلیل می‌یابد که به طور ذاتی دارای دم های سنگین تر از توزیع نرمال است (به ویژه برای ν های کوچک). با فعال سازی چولگی ($\lambda \neq 0$)، تقارن از بین رفته و رفتار دم ها نامتقارن می‌شود: در حالت $\lambda > 0$ ، دم سمت راست نسبت به دم چپ سبک تر، و در حالت $\lambda < 0$ ، دم سمت چپ سبک تر خواهد بود. این ویژگی، همراه با کنترل مستقل سنگینی دم ها از طریق ν و τ انعطاف پذیری مدل EST را برای برازش داده های واقعی با ساختارهای پیچیده تضمین می‌کند.

۳ میدان تصادفی t -چوله تعمیم یافته (ESTRF)

در این بخش، با بهره گیری از خواص توزیع چندمتغیره ی معرفی شده، میدان تصادفی t -چوله ی تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف کنیم.

۱.۳ تعریف و نمایش تصادفی

میدان تصادفی $\{Z(s) : s \in D \subseteq R^d\}$ را یک میدان تصادفی t -چوله تعمیم یافته^۱ می‌نامیم، هرگاه برای $n \in \mathbb{N}$ و هر مجموعه ی متناهی از مکان ها $s_1, \dots, s_n \in D$ ، بردار مشاهده شده

$$\mathbf{Z} = (Z(s_1), \dots, Z(s_n))^T$$

دارای توزیع $EST_n(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ باشد.

¹Extended Skew-t Random Field (ESTRF)

بر اساس ویژگی نمایش تصادفی توزیع، EST اگر بردار $(n+1)$ - بعدی $\mathbf{X} = (X_1^T, X_0)^T$ دارای توزیع t - چند متغیره‌ی مقارن باشد، یعنی

$$\mathbf{X} \sim t_{n+1} \left(\circ, \begin{pmatrix} \Sigma & \circ \\ \circ^T & 1 \end{pmatrix}, \nu \right),$$

آنگاه بردار تصادفی شرطی $(X_1 | X_0 < \lambda^T X_1 + \tau)$ دارای توزیع $EST_n(\circ, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ خواهد بود. این نمایش، پایه‌ی نظری ساخت میدان‌های تصادفی غیرگوسی با کنترل هم‌زمان چولگی و سنگینی دم‌ها را فراهم می‌آورد.

۲.۳ مدل فضایی

فرض کنید $\{Z(s) : s \in D\}$ یک میدان تصادفی EST با پارامترهای

$$\mathbf{Z} \sim EST_n(\mathbf{F}\beta, \Sigma, \lambda \backslash_n, \nu, \tau)$$

باشد که در آن $\mathbf{F} = [f_j(s_i)]_{n \times r}$ ماتریس توابع معلوم، $\beta \in R^r$ ضرایب رگرسیونی نامعلوم و $\lambda \backslash_n$ نشان دهنده‌ی پارامتر چولگی ثابت در تمامی مکان‌هاست. ماتریس کوواریانس $\Sigma = [\Sigma_{ij}]_{n \times n}$ با درایه‌های

$$\Sigma_{ij} = \gamma(\|s_i - s_j\|) = \sigma^2 \rho(\|s_i - s_j\|; \theta)$$

تعریف می‌شود؛ که در آن $\rho(\cdot; \theta)$ تابع همبستگی فضایی معلوم با پارامترهای نامعلوم θ ، $\sigma^2 > 0$ واریانس فرآیند، و ν, τ پارامترهای شکل فرض شده‌ی معلوم هستند. هدف برآورد پارامترهای مجهول $\eta = (\beta^T, \sigma^2, \theta, \lambda)^T$ بر اساس مشاهدات $\mathbf{Z} = (Z(s_1), \dots, Z(s_n))^T$ است.

۳.۳ برآورد پارامترها

با استفاده از تابع چگال توزیع EST رابطه (۱) در بخش (۲)، تابع درست‌نمایی برای یک تحقق مشاهده شده $\mathbf{Z}$ به صورت زیر است:

$$L(\eta) = \frac{t_n(\mathbf{z}; \mathbf{F}\beta, \Sigma, \nu)}{T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda^T \backslash_n^T \mathbf{R} \backslash_n}}; \nu\right)} T_1\left(\frac{\lambda \backslash_n^T \mathbf{Z} + \tau}{\sqrt{\frac{\nu+n}{\nu+Q(\mathbf{z})}}}; \nu+n\right), \quad (9)$$

که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{w}^{-1} \Sigma \mathbf{w}^{-1}$ ماتریس همبستگی، $\mathbf{w} = \text{diag}(\Sigma)^{\frac{1}{2}}$ و $Q(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{F}\beta)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{F}\beta)$ می‌باشد. لگاریتم درست‌نمایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\uparrow(\eta) = \ln t_n(\mathbf{z}; \mathbf{F}\beta, \Sigma, \nu) + \ln T_1\left(\frac{\lambda \backslash_n^T \mathbf{Z} + \tau}{\sqrt{\frac{\nu+n}{\nu+Q(\mathbf{z})}}}; \nu+n\right) - \ln T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda^T \backslash_n^T \mathbf{R} \backslash_n}}; \nu\right) \quad (10)$$

به دلیل حضور توابع توزیع تجمعی $T_1(\cdot)$ و وابستگی غیرخطی پارامترها، بیشینه‌سازی $\uparrow(\eta)$ فاقد فرم بسته است و نیاز به الگوریتم‌های بهینه‌سازی عددی (مانند $BFGS$ یا $Nelder - Mead$) دارد.

۴.۳ برآورد بیزی و الگوریتم CMMC

در این بخش برآورد پارمترها را با استفاده از روش بیزی بدست می‌آوریم. فرض کنید β و $\eta = (\beta^T, \sigma^2, \theta, \lambda)^T$ دارای توزیع پیشین $N_r(\beta_0, \Sigma_0)$ باشد و همچنین $\sigma^2, \theta, \lambda$ و به ترتیب دارای توزیع‌های پیشین $\text{Gamma}(d_i, \nu_i)$, $i = 1, 2, 3$ باشند. با ضرب تابع درست نمایی ($\cdot$) در چگالی‌های پیشین، چگالی پسین پارمترها به صورت تناسبی زیر به دست می‌آید:

$$\pi(\eta|\mathbf{Z}) \propto L(\eta) \phi_r(\beta, \beta_0, \Sigma_0) \sigma^{2(d_1-1)} \theta^{d_2-1} \lambda^{d_3-1} e^{-(\nu_1 \sigma^2 + \nu_2 \theta + \nu_3 \lambda)}$$

به دلیل پیچیدگی تحلیلی چگالی پسین، از الگوریتم زنجیره‌ی مارکوف مونت کارلو^۱ (MCMC) با ساختار گیز-متروپلیس-هستینگز^۲ استفاده می‌کنیم. توزیع‌های شرطی کامل به صورت زیر هستند:

$$(11) \pi(\beta|\mathbf{Z}, \sigma^2, \theta, \lambda) \propto L(\eta) \phi_r(\beta, \beta_0, \Sigma_0),$$

$$(12) \pi(\sigma^2|\mathbf{Z}, \beta, \theta, \lambda) \propto L(\eta) \sigma^{2(d_1-1)} e^{-\nu_1 \sigma^2},$$

$$(13) \pi(\theta|\mathbf{Z}, \beta, \sigma^2, \lambda) \propto L(\eta) \theta^{d_2-1} e^{-\nu_2 \theta},$$

$$(14) \pi(\lambda|\mathbf{Z}, \beta, \sigma^2, \lambda) \propto L(\eta) \lambda^{d_3-1} e^{-\nu_3 \lambda},$$

این توزیع‌ها نیز شکل بسته‌ای ندارند؛ از اینرو برای تولید داده‌ها از این چگالی‌ها، از الگوریتم‌های متروپلیس-هستینگز^۳ (MH) استفاده می‌کنیم. توزیع پیشنهادی برای (۱۱) بصورت $g_\beta(\mathbf{y}) = N_r(\beta, \text{diag}(b^2))$ انتخاب می‌شود که در آن b عدد مناسبی است که کارایی نمونه برداری MH کنترل می‌کند. توزیع‌های پیشنهادی برای (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) به ترتیب $i = 4, 5, 6$ $\text{Gamma}(d_i, \nu_i)$ هستند.

۵.۳ پیش‌بینی

هدف، پیش‌بینی مقدار فرآیند در مکان جدید $\mathbf{s}_0 \notin \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ یعنی براساس مشاهدات $\mathbf{Z} = (Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n))$ است. بردار ترکیبی $\mathbf{Z}^* = (Z(\mathbf{s}_0), \mathbf{Z}^T)^T$ دارای توزیع

$$\mathbf{Z}^* \sim \text{EST}_{n+1}(\mathbf{F}^* \beta, \Sigma^*, \lambda^*, \nu, \tau)$$

که در آن

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_0) = (f_1(\mathbf{s}_0), \dots, f_r(\mathbf{s}_0))^T, \lambda^* = (\lambda_0, \lambda_{1:n})^T, \mathbf{F}^* = (\mathbf{f}(\mathbf{s}_0), \mathbf{F}^T)^T$$

$$\gamma = (\gamma(\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|), \dots, \gamma(\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_n\|))^T, \Sigma^* = \begin{pmatrix} \Sigma_{00} & \gamma^T \\ \gamma & \Sigma \end{pmatrix},$$

می‌باشند.

بر اساس ویژگی ($\cdot$) (توزیع شرطی (EST)، توزیع شرطی $Z(\mathbf{s}_0) | \mathbf{Z}$ بصورت زیر است:

$$Z(\mathbf{s}_0) | \mathbf{Z} \sim \text{EST}_1(\mu_{\cdot|\mathbf{Z}}, \sigma_{\cdot|\mathbf{Z}}^2, \lambda_{\cdot|\mathbf{Z}}, \nu + n, \tau_{\cdot|\mathbf{Z}})$$

که پارامترهای آن با استفاده از افراز ماتریسی و متغیر استاندارد شده ی $\mathbf{Y} = \omega^{-1}(\mathbf{Z} - \mathbf{F}\beta)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mu_{\circ|\mathbf{Z}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_{\circ})^T \beta + \gamma^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{F}^T \beta),$$

$$\sigma_{\circ|\mathbf{Z}}^2 = \Sigma_{\circ\circ} - \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma,$$

$$\lambda_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\lambda_{\circ} - \gamma^T \Sigma^{-1} (\lambda \mathbf{1}_n)}{\sqrt{1 + \lambda^T \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n - \frac{(\gamma^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n)^T}{\mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n}}}$$

$$\nu_{\circ|\mathbf{Z}} = \nu + n, \quad \tau_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\tau + \lambda_{\circ} \gamma^T \Sigma^{-1} \mathbf{Y} + \lambda \mathbf{1}_n^T \mathbf{Y}}{\sqrt{\frac{\nu + Q_1(\mathbf{Y})}{\nu + n}}}$$

که در آن $R_{11} = \omega^{-1} \Sigma \omega^{-1}$ و $Q_1(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{Y}$ است. با فرض تابع زیان درجه ی دوم $L(\hat{Z}, Z) = (\hat{Z} - Z)^2$ ، پیش‌بینی کننده بهینه ی بیزی برابر امید ریاضی شرطی است. با استفاده از ویژگی ۴، پیش‌بینی کننده و واریانس پیش‌بینی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_{\circ}) = E(Z(\mathbf{s}_{\circ})|\mathbf{Z}) = \mu_{\circ|\mathbf{Z}} + \delta_{\circ|\mathbf{Z}} E(T(-\bar{\tau}_{\circ|\mathbf{Z}}, \infty)), \quad (15)$$

$$Var(Z(\mathbf{s}_{\circ})|\mathbf{Z}) = a_{\circ}^2 \sigma_{\circ|\mathbf{Z}}^2 (1 - \delta_{\circ|\mathbf{Z}}^2) + a_{\circ}^2 \sigma_{\circ|\mathbf{Z}}^2 \sigma_{\circ}^2, \quad (16)$$

که در آن $\bar{\tau}_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\tau_{\circ|\mathbf{Z}}}{\sqrt{1 + \lambda_{\circ}^2}}$ ، $\delta_{\circ|\mathbf{Z}} = \frac{\lambda_{\circ|\mathbf{Z}}}{\sqrt{1 + \lambda_{\circ}^2}}$ و مقادیر $E(T_{(\circ)})$ و $E^2(T_{(\circ)})$ دقیقاً مطابق روابط ویژگی ۴ با جایگزینی $\nu \rightarrow \nu + n$ و $\bar{\tau} \rightarrow \bar{\tau}_{\circ|\mathbf{Z}}$ محاسبه می‌شوند. این ساختار، تعمیمی طبیعی از کریجینگ ساده به فضایی توزیع های چوله ی سنگین دم را فراهم می‌آورد.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش به منظور ارزیابی عملکرد مدل میدان تصادفی توزیع t چوله تعمیم یافته (EST) در پیش‌بینی فضایی و برآورد پارامترها، یک مطالعه شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار R انجام شده است. در این مطالعه $n = 300$ داده فضایی از مدل EST با پارامترهای معلوم تولید گردید. مقادیر واقعی پارامترها در جدول ۱ آورده شده است. مقادیر $f_i(\mathbf{s}_j)$ به صورت اعداد تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت در بازه (۰ و ۱) شبیه سازی شدند.

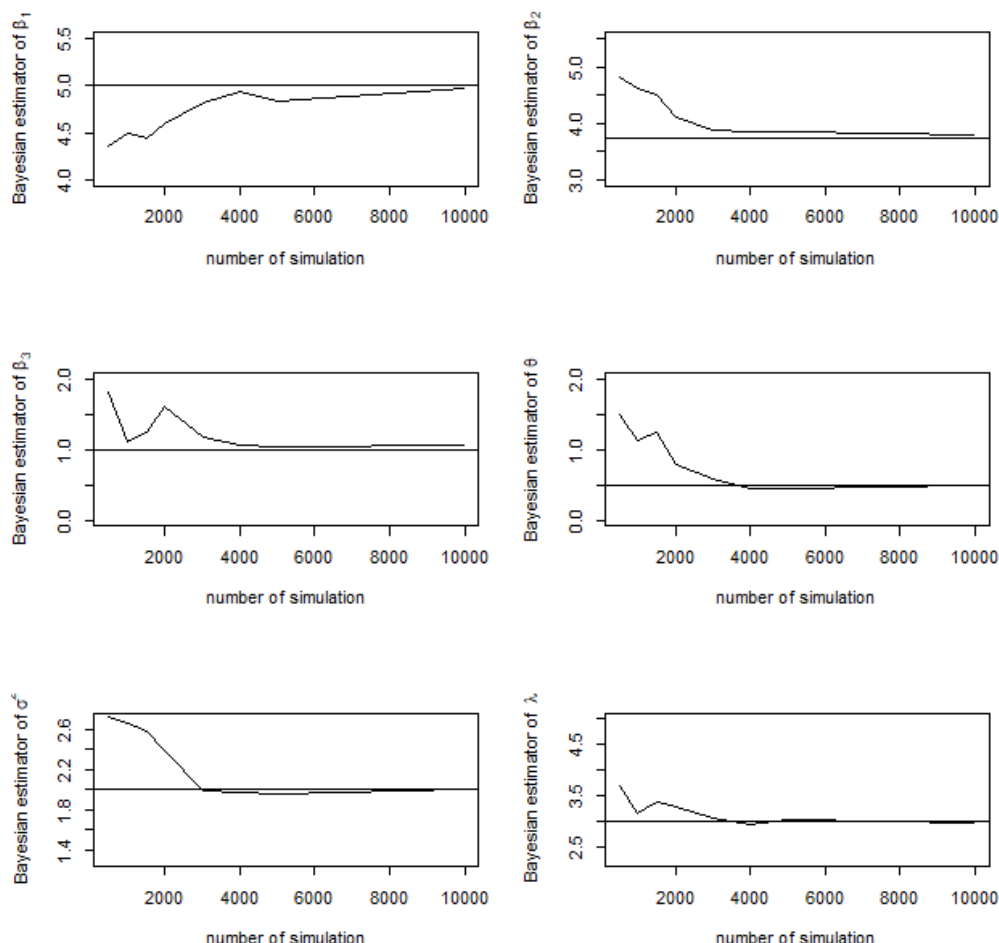
برای بررسی ناهنجاری داده ها، آزمون نرمالیتی شاپیرووویلکسبر روی داده های تولیدی انجام گرفت. مقدار P-value کمتر ۵٪ به دست آمد که فرض نرمال بودن داده ها را در سطح اطمینان ۹۵٪ رد می کند. این نتیجه لزوم استفاده از مدل های غیرگوسی مانند EST را تأیید می نماید.

۱.۴ برآورد پارامترها

ابتدا پارامترهای مدل با بیشینه سازی لگاریتم درست نمایی (رابطه ۱۰) و استفاده از تابع optim در نرم افزار R برآورد شدند. مقادیر حاصل از روش ماکسیمم درست نمایی (MLE) بعنوان مقدار آغازین در رویکرد بیزی به کار گرفته شدند. در استنباط بیزی از الگوریتم نمونه گیری گیبز با ۵۰۰۰ تکرار استفاده گردید. نمودارهای همگرایی برای

میانگین پارامترها در شکل ۲ نشان داده شده است. این نمودارها حاکی از همگرایی مناسب زنجیره های مارکوف به مقادیر واقعی پارامترها هستند.

جدول ۱ مقادیر برآورد شده، اریبی (bias) و میانگین توان دوم خطا (MSE) پارامترهای مدل را برای دو روش برآوردگری ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) و بیزی ارائه می‌دهد. مقادیر کوچک MSE و اریبی حاکی از کارایی برآوردگرهای بیزی برای مدل EST می‌باشد.



شکل ۲: نمودار همگرایی زنجیره‌های مارکوف برای پارامترهای مدل EST.

۲.۴ پیش‌بینی مقادیر گمشده

برای ارزیابی توان پیش‌بینی مدل EST در مقایسه با مدل گاوسی معمول، ۴۰ مکان به طور تصادفی از بین ۳۰۰ مکان به عنوان مقادیر گمشده انتخاب شدند. این فرآیند ۱۰۰۰ بار تکرار گردید (در هر تکرار ۴۰ مکان جدید و متفاوت به عنوان نقاط گمشده انتخاب می‌شوند). پیش‌بینی مقادیر گمشده با استفاده از دو مدل EST (مدل پیشنهادی) و مدل گاوسی انجام شد. معیارهای ارزیابی شامل واریانس پیش‌بینی، اریبی و میانگین مربعات خطا (MSE) می‌باشند. واریانس پیش‌بینی بر اساس ویژگی (۴) توزیع EST محاسبه گردید.

نتایج در جدول ۲ آورده شده است. مدل EST در مقایسه با مدل گاوسی دارای MSE بسیار کوچکتر (۱۴.۰) در برابر (۳۹.۲)، واریانس پیش‌بینی کمتر (۵۹.۰) در برابر (۹۴۶.۰) و قدر مطلق اریبی کمتری (۳۷.۰) در برابر (

جدول ۱: مقادیر برآوردشده، اریبی و میانگین توان دوم خطای پارامترهای مدل EST برای دو روش ماکزیمم درست‌نمایی و بیزی.

پارامتر	مقدار واقعی	روش درست‌نمایی ماکزیمم			روش بیزی		
		برآورد	اریبی	MSE	برآورد	اریبی	MSE
β_1	۵	۹۸۵.۴	۰۱۱.۰-	۰۰۴۸.۰	۰۷۰۷.۵	۰۷۰۷.۰	۳۱۹۷۶.۰
β_2	۷۵.۳	۷۸.۳	۰۰۸۷.۰	۰۰۲۷.۰	۸۴۳۱.۳	۰۹۳۱.۰	۰۰۹۷۸.۰
β_3	۱	۹۱.۰	۰۰۸۵۸.۰	۰۱۶۴.۰	۹۹۹۹.۰	۰۰۰۱.۰-	۰۰۲۵۷.۰
σ^2	۲	۸۷.۱	۰۰۲۱۴.۰-	۰۰۳۴.۰	۴۱۲۱.۸	۴۱۲۱.۶	۱۷۲۴۶.۴۱
θ	۵.۰	۴۹.۰	۰۱۴۶.۰-	۰۰۳۷.۰	۶۲۶۶.۰	۱۲۵۵.۰	۰۲۰۳۷.۰
λ	۳	۱۶.۳	۰۱۴۶.۰	۰۰۴۵.۰	۹۶۴۶.۷	۹۴۶.۴	۵۵۸۷۳.۳۱

(۱۱۶.۰ می باشد. نتایج به وضوح نشان می‌دهند که مدل EST در مواجهه با داده‌های فضایی چوله و دم سنگین، عملکرد بسیار بهتری نسبت به مدل گاوسی دارد و پیش‌بینی‌های دقیق‌تری ارائه می‌دهد.

جدول ۲: نتایج پیش‌بینی دو مدل چوله-تی و گاوسی.

مدل EST			مدل گاوسی		
واریانس	اریبی	MSE	واریانس	اریبی	MSE
۰۵۹.۰	۰۳۷.۰	۱۴.۰	۹۴۶.۰	۱۱۶.۰-	۳۹.۲

۳.۴ بحث و نتیجه‌گیری

نتایج مطالعه شبیه‌سازی نشان می‌دهد که مدل میدان تصادفی t - چوله تعمیم‌یافته (ESTRF) عملکرد مطلوبی در برآورد پارامترها و پیش‌بینی فضایی داده‌های نامتقارن با دم‌های سنگین دارد. برآوردهای بیزی با استفاده از الگوریتم گیز و متروپولیس-هستینگز، همگرایی مناسبی به مقادیر واقعی نشان دادند و اریبی و MSE کوچکی تولید کردند. در پیش‌بینی مقادیر گمشده، مدل EST برتری آشکاری نسبت به دل کلاسیک گاوسی داشت؛ به طوری که میانگین مربعات خطای پیش‌بینی از ۳۹.۲ به ۱۴.۰ کاهش یافت و واریانس پیش‌بینی نیز از ۹۴۶.۰ به ۵۹.۰ تنزل پیدا کرد. این نتایج حاکی از کارایی بالای مدل پیشنهادی در مواجهه با داده‌های فضایی چوله و دم سنگین است.

به طور خلاصه، مدل میدان تصادفی تعمیم‌یافته t - چوله برای داده‌هایی که از نظر چولگی و سنگینی دم‌ها نسبت به توزیع نرمال، سنگین‌تر یا حتی سبک‌تر هستند، کارآمدتر و بهتر عمل می‌کند. این ویژگی همراه با ساختار پارامتریک منعطف، ESTRF را به ابزاری قدرتمند برای تحلیل داده‌های فضایی نامتقارن با رفتار دم‌های متفاوت تبدیل کرده است.

به عنوان پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی، می‌توان کاربرد این مدل را در داده‌های فضایی با ابعاد بالا، مدل‌سازی فضایی-زمانی و همچنین داده‌های فضایی با ساختار وابستگی غیرایستا مورد بررسی قرار داد. همچنین توسعه نسخه‌ای از این میدان تصادفی با پارامترهای چولگی وابسته به مکان می‌تواند جذاب باشد.

کاهش چشمگیر MSE و واریانس پیش‌بینی نسبت به مدل گاوسی، برتری این رویکرد را در کاربردهای عملی که داده‌های فضایی انحراف از نرمال را نشان می‌دهند، تأیید می‌کند.

در این مقاله با استفاده از توزیع تعمیم‌یافته t - چوله یک میدان تصادفی تحت عنوان میدان تصادفی تعمیم‌یافته t - چوله را معرفی کردیم. شبیه‌سازی داده‌ها نشان داد که این مدل برای داده‌هایی که از نظر چولگی و سنگینی دم‌ها از توزیع نرمال، سنگین‌تر و یا سبک‌تر هستند، کارآمدتر است و بهتر عمل می‌کند.

مراجع

References

- [1] B. Arellano-Valle and G. Genton, Multivariate extended skew-t distributions and related families, *International Journal of Statistics*, 68 (2010), 201–234.
- [2] B. C. Arnold and R. J. Beaver, The Skew-Cauchy distribution, *Statistics and Probability Letters*, 49 (2000), 285–290.
- [3] B. C. Arnold and R. J. Beaver, Hidden truncation models, *Sankhya Ser. A*, 62 (2000), 22–35.
- [4] A. Azzalini and A. Capitanio, Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 61 (1999), 579–602.
- [5] A. Azzalini and A. Capitanio, Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 65 (2003), 367–389.
- [6] A. Azzalini and M. G. Genton, Robust likelihood methods based on the skew-t and related distributions, *International Statistical Review*, 76 (2008), 106–129.
- [7] A. Azzalini and A. Dalla Valle, The multivariate skew-normal distribution, *Biometrika*, 83 (1996), 715–726.
- [8] J. Dominguez-Molina, G. Gonzales-Farias and A. Gupta, The multivariate closed skew normal distribution, Technical Report 03-12, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University, 2003.
- [9] F. Hosseini and M. Mohammadzadeh, Bayesian prediction for spatial generalised linear mixed models closed skew normal latent variables, *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 54(1) (2012), 43–62.
- [10] O. Karimi, H. Omre and M. Mohammadzadeh, Bayesian closed-skew Gaussian inversion of seismic AVO data for elastic material properties, *Geophysics*, 75(1) (2010), 1–11.
- [11] O. Karimi and M. Mohammadzadeh, Bayesian spatial prediction for discrete closed skew Gaussian random field, *Mathematical Geosciences*, 43 (2011), 565–582.
- [12] H.-M. Kim and B. K. Mallick, Analyzing spatial data using skew Gaussian processes, in *Spatial Cluster Modelling*, A. B. Lawson and D. G. T. Denison (eds.), 2002, 163–173.
- [13] H.-M. Kim and B. K. Mallick, A Bayesian prediction using the Skew-Gaussian distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 120 (2004), 85–100.

- [14] V. D. Oliveira, B. Kedem and D. Short, Bayesian Prediction of Transformed Gaussian Random Fields, *Journal of the American Statistical Association*, 92 (1997), 1422–1433.
- [15] V. De Oliveira and M. D. Ecker, Bayesian hot spot detection in the presence of a spatial trend: application to total nitrogen concentration in Chesapeake Bay, *Environmetrics*, 13 (2002), 85–101.
- [16] V. De Oliveira, A note on the correlation structure of transformed Gaussian random fields, *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 45(3) (2003), 353–366.
- [17] J. Roislien and H. Omre, T-distributed random fields: a parametric model for heavy-tailed well-log data, *Mathematical Geology*, 38 (2006), 821–849.