Kharazmi University

Mathematical Research
Year 2026, Volume 12, Issue 2, pp. 43–62

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: 10.22034/mmr.2026.131041.0

Behavioral Equivalence between General Fuzzy Automata: A Functorial and BL-Algebraic Approach

Marzieh Shamsizadeh[(1)] [1] and Khadijeh Abolpour[(2)]

[(1)] Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Energy and Data Sciences, Behbahan Khatam Alanbia University of Technology, Behbahan, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Shi.C., Islamic Azad University, Shiraz, Iran

Received: 8 November 2025 Accepted: 1 September 2026 Published online: 23 September 2026

Abstract: This paper presents a categorical framework for modeling and analyzing the behavior of general fuzzy automata based on BL-algebras. First, a category of BL-general fuzzy automata is defined in which morphisms act as fuzzy mappings between fuzzy state sets and reconstruct the initial, transition, and output structures compositionally. Functors from the category of nondeterministic automata to this category are then introduced to model fuzzy system behavior through transition and fuzzy-output mappings. To compare the behavior of these functors, behavioral equivalence is defined using the biresiduum operator, and a family of equivalent fuzzy mappings between functors is introduced. It is proved that, whenever this family is nonempty, it has a greatest member that reconstructs the behavioral structures in a fuzzy manner. Moreover, using the notion of bisimulation between nondeterministic automata, it is shown that this relation is transferred under the behavioral functor to a fuzzy bisimulation between BL-general fuzzy automata. Consequently, the existence of a bisimulation between nondeterministic automata guarantees behavioral equivalence between their corresponding BL-general fuzzy automata.

Keywords: Behavioral equivalence, General fuzzy automata, Nondeterministic automata, Bisimulation, Categories, BL-algebras.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author
E-mail addresses: (Marzieh Shamsizadeh) shamsizadeh.m@bkatu.ac.ir, (Khadijeh Abolpour) kh.abolpour@iau.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره 12، شماره 2، ص ۴۳–۶۲
شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
DOI: 10.22034/mmr.2026.131041.0

هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی عمومی: رویکردی مبتنی بر تابعگون‌ها و BL_جبرها

مرضیه شمسی‌زاده[۱] [۲] و خدیجه ابول‌پور[۲]

[۱] گروه ریاضی و آمار، دانشکده انرژی و علوم داده، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء (ص) بهبهان، ایران
[۲] گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۸/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۱۰ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

چکیده: در این مقاله، چارچوبی رسته‌ای برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار اتوماتاهای فازی عمومی مبتنی بر BL_جبرها ارائه می‌شود. ابتدا رسته‌ای از اتوماتاهای فازی عمومی BL تعریف می‌گردد که در آن ریخت‌ها به‌صورت نگاشت‌های فازی بین مجموعه‌های حالت فازی عمل کرده و ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی را به‌صورت ترکیبی بازسازی می‌کنند. سپس تابعگون‌هایی از رسته‌ی اتوماتاهای غیرقطعی به این رسته معرفی می‌شوند که رفتار فازی سیستم را در قالب نگاشت رانشی و خروجی فازی مدل‌سازی می‌کنند. برای مقایسه‌ی رفتار این تابعگون‌ها، مفهوم هم‌ارزی رفتاری بر پایه‌ی عملگر دوماندهای تعریف شده و مجموعه‌ای از نگاشت‌های فازی هم‌ارز بین تابعگون‌ها معرفی می‌شود. اثبات می‌شود که این مجموعه، در صورت ناتهی بودن، دارای عضو بیشینه است که ساختارهای رفتاری را به‌صورت فازی بازسازی می‌کند. همچنین، با توجه به مفهوم دو_شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، نشان داده می‌شود که این رابطه تحت تابعگون رفتاری به یک دو_شبیه‌سازی فازی بین اتوماتاهای فازی عمومی BL منتقل می‌شود. بر پایه‌ی این انتقال، اثبات می‌گردد که وجود دو_شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی عمومی BL حاصل از آن‌ها را تضمین می‌کند.

واژه‌هاي كليدي: هم‌ارزی رفتاری، اتوماتای فازی عمومی، اتوماتا غیرقطعی، دو_شبیه‌سازی، رسته‌ها، BL_جبرها.

۱ مقدمه

مفهوم مجموعه‌های فازی نخستین‌بار توسط پروفسور لطفی عسکرزادهدر سال ۱۹۶۵ معرفی شد [۲۲] و به‌سرعت در حوزه‌های مختلف علمی از جمله هوش مصنوعی، تصمیم‌گیری، و پردازش زبان طبیعی گسترش یافت. در نظریه‌ی

[۲] نویسنده مسئول مقاله
shamsizadeh.m@bkatu.ac.ir (Marzieh Shamsizadeh) , kh.abolpour@iau.ac.ir (Khadijeh Abolpour)

اتوماتا، یکی از مسائل بنیادی، بررسی هم‌ارزی بین دو اتوماتای داده‌شده است؛ به‌عبارتی، آیا این دو سامانه رفتار مشابهی نسبت به ورودی‌ها دارند یا خیر؟ رفتار یک اتوماتا معمولاً از طریق زبانی که آن را شناسایی می‌کند توصیف می‌شود.

در مورد اتوماتاهای فازی متناهی قطعی، مسأله‌ی هم‌ارزی قابل حل است؛ اما در مورد اتوماتاهای فازی غیرقطعی، پیچیدگی محاسباتی به‌گونه‌ای است که این مسأله در دسته‌ی مسائل سخت قرار می‌گیرد [۷، ۱۹، ۲۱]. یکی از رویکردهای مؤثر برای تحلیل هم‌ارزی در این زمینه، استفاده از مفهوم شبیه‌سازی است که نخستین‌بار توسط میلنر[3] [۱۳] و پارک[4] [۱۴] معرفی شد. شبیه‌سازی نه‌تنها برای مقایسه‌ی رفتار اتوماتاها، بلکه برای کاهش تعداد حالت‌ها نیز کاربرد دارد. با این حال، فرآیند مینیمال‌سازی اتوماتاهای فازی غیرقطعی معمولاً نیازمند قطعی‌سازی اولیه است که خود منجر به افزایش تعداد حالت‌ها می‌شود. در سال‌های اخیر، مفهوم شبیه‌سازی در زمینه‌های مختلف اتوماتاهای فازی مورد توجه قرار گرفته است [۹، ۱۲، ۲۰] و در حوزه‌های متنوعی از علوم کامپیوتر[5] و آنالیز برنامه‌ها[6] به‌کار گرفته شده است [۲–۴، ۱۰، ۱۱].

در سال ۲۰۰۵، دوست‌فاطمه و کرمر[7] [۵] مفهوم اتوماتای فازی را گسترش داده و چارچوبی عمومی برای آن ارائه کردند. این توسعه با تکیه بر منطق پایه‌ای[8] که توسط هاجک[9] [۸] معرفی شده بود، صورت گرفت. منطق پایه‌ای یک ساختار جبری مناسب برای مدل‌سازی استنتاج‌های فازی فراهم می‌آورد.

در ادامه، ابول‌پور[10] و زاهدی[11] در سال ۲۰۱۲ مفهوم اتوماتای فازی عمومی را با استفاده از BL ـ جبرها تعمیم داده و اتوماتاهای فازی عمومی BL را معرفی کردند. شمسی‌زاده و زاهدی [۱۷، ۱۸] مفهوم دو ـ شبیه‌سازی را برای این نوع اتوماتاها تعریف نمودند که امکان مقایسه‌ی دقیق‌تر رفتار سامانه‌های فازی را فراهم می‌سازد. در این مقاله، با هدف توسعه‌ی چارچوبی رسته‌ای برای تحلیل رفتار اتوماتاهای فازی عمومی مبتنی بر BL ـ جبرها ابتدا رسته‌ای از این اتوماتاها تعریف می‌شود و تابعگون‌هایی از رسته‌ی اتوماتاهای غیرقطعی به این رسته معرفی می‌گردد. سپس، برای مقایسه‌ی رفتار تابعگون‌ها، مجموعه‌ای از نگاشت‌های فازی هم‌ارز تعریف می‌شود که ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی را به‌صورت ترکیبی بازسازی می‌کنند. در ادامه، اثبات می‌شود که این مجموعه، در صورت ناتهی بودن، دارای عضو بیشینه است که تمام شروط بازسازی و تقارن فازی را ارضا می‌کند. نهایتاً، با بهره‌گیری از مفهوم دو ـ شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، نشان داده می‌شود که این رابطه تحت تابعگون رفتاری به یک دو ـ شبیه‌سازی فازی منتقل می‌شود، و بر این اساس، هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی عمومی BL حاصل تضمین می‌گردد.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش، مفاهیم و تعاریفی که در ادامه‌ی مقاله به آن ها نیاز داریم و ارایه می‌گردد.

یک مشبکه کامل مانده ای یک جبر [۱۵] $L = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, ۰, ۱)$ است، به طوری‌که،

۱. $(L, \wedge, \vee, ۰, ۱)$ یک مشبکه کامل است که کوچکترین عضو آن ۰ و بزرگترین عضو آن ۱ می‌باشد،

۲. $(L, \otimes, ۱)$ یک تکواره جابجایی است که ۱ عضو همانی آن است،

۳. $\otimes$ و $\rightarrow$ دو عمل دوتایی با خاصیت الحاقی است که برای هر $x, y, z \in L$، به شکل زیر می‌باشد:

$$x \otimes y \leq z \iff x \leq y \rightarrow z.$$

[3] Milner
[4] Park
[5] Computer science
[6] Program analysis
[7] Doostfatemeh and Kremer
[8] Basic logic
[9] Hajek
[10] Abolpour
[11] Zahedi

اعمال $\otimes$ و $\rightarrow$ به ترتیب ضرب و مانده نامیده می‌شوند. دوتایی $(\otimes, \rightarrow)$ دوتایی الحاقی نامیده می‌شوند. همچنین برای هر $x, y \in L$ منظور از $x \otimes y$ مانده x توسط y است. یک دومانده ای در L عمل دوتایی $\leftrightarrow$ روی L است که برای هر $x, y \in L$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x).$$

اگر L یک مشبکه کامل مانده‌ای باشد، پس برای هر $x, y, z \in L$ و هر $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq L$ شرایط زیر برقرار است:

۱. $x \leq y$ نتیجه می‌دهد که $x \otimes z \leq y \otimes z$،

۲. $x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = ۱$،

۳. $x \otimes \vee_{i \in I} y_i = \vee_{i \in I}(x \otimes y_i)$،

۴. $x \otimes \wedge_{i \in I} y_i \leq \wedge_{i \in I}(x \otimes y_i)$،

۵. $x \otimes y = y \otimes x$،

۶. $۱ \otimes x = x$.

فرض کنید A و B مجموعه‌های غیرتهی باشند. یک رابطه‌ی L ـ فازی بین مجموعه‌های A و B (یا یک رابطه L ـ فازی از A به B) یک تابع از $A \times B$ به L است، یا بعبارت دیگر به آن، زیرمجموعه‌های L ـ فازی $A \times B$ گفته می‌شود. مجموعه همه‌ی رابطه‌های L ـ فازی از A به B با نماد $\mathcal{R}(A, B)$ نشان داده می‌شود.
برای مجموعه‌های غیرتهی A, B, C و رابطه‌های L ـ فازی $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ و $\psi \in \mathcal{R}(B, C)$، ترکیب آنها، $\varphi \circ \psi$، یک رابطه فازی $\mathcal{R}(A, C)$ است که برای هر $a \in A$ و $c \in C$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\varphi \circ \psi)(a, c) = \vee_{b \in B} \varphi(a, b) \otimes \psi(b, c).$$

تعریف ۱.۲. [۶] برای هر $L = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, ۱)$، یک رسته ζ شامل مجموعه‌ای از اشیاء است که اشیاء ζ نامیده می شود و با نماد $object(\zeta)$ نشان داده می‌شود. برای هر جفت $A, B \in object(\zeta)$، مجموعه‌ی همه‌ی ریخت‌های از A به B منوط به اینکه در شرایط (i) و (ii) صدق کند با نماد $Mor(\zeta)$ در رسته ζ نشان داده می‌شود.
یک ریخت مانند α که $\alpha \in Mor_L(A, B) \subseteq Mor(\zeta)$ عبارت است از یک ریخت مانند $\alpha : A \times B \rightarrow L$، که برای سادگی با نماد $\alpha : A \rightarrow B$ نشان داده می‌شود.

(i) برای هر سه شی $A, B, C \in object(\zeta)$ که لزوما مجزا نیستند، یک نگاشت وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C),$$
$$(A \longrightarrow B,\ B \longrightarrow C) \longmapsto A \longrightarrow C.$$

برای هر $A, B, C, D \in object(\zeta)$، و هر ریخت $\alpha \in Mor(A, B)$، $\beta \in Mor(B, C)$ و $\gamma \in Mor(C, D)$، ترکیب آنها را به صورت زیر داریم:

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma : A \rightarrow D.$$

برای دو ریخت $\alpha \in Mor(A, B), \beta \in Mor(B, C)$، برای هر $a \in A$، $c \in C$، ترکیب $\alpha \circ \beta \in Mor(A, C)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \circ \beta(a, c) = \vee_{b \in B} \alpha(a, b) \otimes \beta(b, c).$$

(ii) برای هر شیء A از ζ، مجموعه $Mor(A, A)$ شامل یک ریخت id_A است که همانی A نامیده می‌شود که در ویژگی زیر صدق می‌کند:
برای هر شیء $B \in object(\zeta)$ و برای هر $\alpha \in Mor(A, B)$ و $\beta \in Mor(B, A)$، داریم: $id_A \circ \alpha = \alpha, \beta \circ id_A = B$.

تعریف ۲.۲. [۶] یک سیستم (Q,δ) یک اتوماتای غیرقطعی (NDA) روی یک تکواره $(X,*)$ نامیده می‌شود، اگر Q یک مجموعه از حالت ها باشد و $\delta : Q \times X \to ۲^Q$ یک انتقال غیرقطعی است، که در آن:

۱. برای هر $q \in Q$، $\delta(q, ۱_X) = \{q\}$،

۲. برای هر $x, y \in X$، $q \in Q$، $\delta(q, x * y) = \bigcup_{p\in\delta(q,x)} \delta(p, y)$.

یک NDA روی یک تکواره $(X,*)$ با حالت‌های آغازین و پایانی یک سیستم به صورت (Q,δ,I,T) است به طوری‌که (Q,δ) یک NDA روی X و $I,T \subseteq Q$ است.
رسته NDA ها را با نماد NA_m نمایش می‌دهیم. یک ریخت در NA_m به صورت

$$\alpha : (Q_۱,\delta_۱) \to (Q_۲,\delta_۲),$$

تعریف می‌شود، یعنی $\alpha : Q_۱ \to Q_۲$ یک نگاشت است که برای هر $q \in Q_۱$ و $x \in X$ داریم:

$$\alpha(\cup_{q'\in Q_۱,\alpha(q')=\alpha(q)}\delta_۱(q', x)) = \delta_۲(\alpha(q), x) \cap \alpha(Q_۱).$$

رسته NDA ها با حالت‌های آغازین و پایین را با نماد NA°_m نمایش می‌دهیم.
یک ریخت $\alpha : (Q_۱,\delta_۱,I_۱,T_۱) \to (Q_۲,\delta_۲,I_۲,T_۲)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. $\alpha \in Mor((Q_۱,\delta_۱),(Q_۲,\delta_۲))$،

۲. $\alpha(I_۱) = I_۲ \cap \alpha(Q_۱), \alpha(T_۱) = T_۲ \cap \alpha(Q_۱)$.

تعریف ۳.۲. [۶] یک تابعگون $F : A \to B$ یک نگاشت حافظ ساختار بین رسته‌ها می باشد. تابعگون به وسیله‌ی دو تابع $C \to F(C)$ روی اشیاء و

$$(f : C \to D) \to (F(f) : F(C) \to F(D)),$$

روی نگاشت‌ها که در اصول زیر صدق می‌کند، تعریف می‌شود:

۱. برای هر $f, g \in Mor(A)$، $F(fg) = F(f)F(g)$،

۲. و برای هر C متعلق به شیء (A)، $F(I_C) = I_{F(C)}$.

تعریف ۴.۲. [۸] یک BL ـ جبر[۱۲] ، یک جبر $(L,\wedge,\vee,*,\to,۰,۱)$ با چهار عمل $\wedge,\vee,*,\to$ و دو ثابت $۰,۱$ می‌باشد به قسمی‌که

۱. $(L,\wedge,\vee,۰,۱)$ یک مشبکه‌ی کراندار،

۲. $(L,*,۱)$ یک تکواره جابجایی،

۳. $*$ و $\to$ یک جفت الحاقی است، یعنی $x\leq y\to z$ اگر و فقط اگر $x * y \leq z$ که در آن، $x, y, z \in L$،

۴. $x \wedge y = x * (x \to y)$ و

۵. $(x \to y) \vee (y \to x) = ۱$.

تعریف ۵.۲. [۱] فرض کنید $L = (L,\vee,\wedge,۰,۱)$ یک مشبکه‌ی کامل کراندار،

$$\widetilde{F} = (Q, X, \widetilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_۱, F_۲),$$

یک اتوماتای فازی عمومی و $(P(Q),\subseteq,\cap,\cup,\emptyset,Q)$، یک BL ـ جبر باشد. اتوماتای فازی عمومی BL [۱۳] یک ماشین ده‌تایی به صورت

$$\widetilde{F_l} = (\bar{Q}, X, \widetilde{R} = (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_۱, F_۲),$$

است که

[12] BL-algebra
[13] BL-general fuzzy automata

(i) $\bar{Q} = P(Q)$، Q یک مجموعه‌ی متناهی و $\bar{Q}$ مجموعه توانی Q است،

(ii) X مجموعه‌ی متناهی از الفبای ورودی،

(iii) $\widetilde{R}$ مجموعه‌ای از حالت‌های آغازین فازی، که به‌صورت $\widetilde{R} = (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\}))$ تعریف می‌شود، که در آن $\mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})$ درجه‌ی عضویت حالت آغازین را در زمان شروع نشان می‌دهد،

(iv) $\bar{Z}$ مجموعه‌ی متناهی از الفبای خروجی، $\bar{Z}$ مجموعه توانی Z است،

(v) $\omega_l : \bar{Q} \to \bar{Z}$ تابع خروجی تعریف شده به صورت $\omega_l(Q_i) = \{\omega(q)\big|q \in Q_i\}$،

(vi) $\delta_l : \bar{Q} \times X \times \bar{Q} \to L$ تابع انتقال فازی است که برای هر $Q_i, Q_j \in P(Q)$ و $a \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_l(\{p\}, a, \{q\}) = \delta(p, a, q),$$

و

$$\delta_l(Q_i, a, Q_j) = \vee_{q_i \in Q_i, q_j \in Q_j} \delta(q_i, a, q_j),$$

(vii) $f_l : \bar{Q} \times X \to \bar{Q}$ تابع حالت بعدی است که به صورت:

$$f_l(Q_i, a) = \cup_{q_i \in Q_i} \{q_j\big|\delta(q_i, a, q_j) \in \Delta\},$$

(viii) $\tilde{\delta}_l : (\bar{Q} \times L) \times X \times \bar{Q} \to L$ تابع انتقال تکمیلی تعریف شده به صورت:

$$\tilde{\delta}_l((Q_i, \mu^t(Q_i)), a, Q_j) = F_1(\mu^t(Q_i), \delta_l(Q_i, a, Q_j)),$$

که در آن $\mu^t(Q)$ درجه‌ی عضویت حالت Q را در زمان t نشان می‌دهد.

(ix) $F_1 : L \times L \to L$ تابع تخصیص عضویت که مقدار عضویت حالت مقصد را بر اساس درجه‌ی عضویت حالت مبدأ و وزن انتقال محاسبه می‌کند.

(x) $F_2 : L^* \to L$ تابع رفع چندعضویتی که برای تعیین یک مقدار عضویت واحد از مجموعه‌ی مقادیر عضویت چندگانه به‌کار می‌رود.

تعریف ۶.۲. [۱] اتوماتای فازی عمومی BL

$$\widetilde{F}_l = (\bar{Q}, X, \widetilde{R} = (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_1, F_2),$$

را در نظر بگیرید. $\rho : X^* \to \bar{Q}$ نگاشت رانشی اتوماتای فازی عمومی BL، $\widetilde{F}_l$ است که به صورت بازگشتی زیر تعریف می شود: $\rho(\Lambda) = \{q_\circ\}$ و برای هر $a_1, ..., a_n \in X$،

$$\rho(a_1 a_2 ... a_n) = Q_{i_n}, \rho(a_1 a_2 ... a_n a_{n+1}) = f_l(Q_{i_n}, a_{n+1}),$$

که $(Q_{i_n}, \mu^{t_\circ+n}(Q_{i_n})) \in \bar{Q}_{act}(a_1 a_2 ... a_n)$. نگاشت $\beta = \omega_l \circ \rho : X^* \to \bar{Z}$، رفتار $\widetilde{F}_l$ می‌باشد.

در ادامه این مقاله، همواره L برای نمایش مشبکه کامل کراندار به کار می‌رود.

تعریف ۷.۲. [۱۶] فرض کنید $\tilde{F}_l = (\bar{Q}, X, (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_1, F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی BL باشد. رفتار $\tilde{F}_l$ یک نگاشت $\beta = \omega_l \circ \rho : \mathcal{L}(\tilde{F}_l) \to \bar{Z}$ است به طوری‌که:

$$\mathcal{L}(\tilde{F}_l) = \{x \in X^*\big|\tilde{\delta}_l^*((\{q_\circ\}, \mu^{t_i}(\{q_\circ\})), x, P) > \circ, \text{ برای بعضی } P \in \bar{Q}\}.$$

تعریف ۸.۲. [۱۷] فرض کنید $\widetilde{F}_{li}, i = ۱, ۲$ دو اتوماتای فازی عمومی BL باشد. رابطه‌ی $\approx$ بین $\bar{Q}_۱$ و $\bar{Q}_۲$ را یک دو_شبیه‌سازی بین $\widetilde{F}_{l۱}$ و $\widetilde{F}_{l۲}$ می‌نامیم اگر برای $Q' \in \bar{Q}_۱$ و $Q'' \in \bar{Q}_۲$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\{q_{۰۱}\} \approx \{q_{۰۲}\}$،

۲. $Q' \approx Q''$ نتیجه دهد:

$$(\forall \alpha \in L)(Q'_۱ \in \bar{Q}_۱)(a \in X)(\delta_{l۱}(Q', a, Q'_۱) = \alpha \\ \Longrightarrow (\exists Q'_۲ \in \bar{Q}_۲)\delta_{l۲}(Q'', a, Q'_۲) \geq \alpha, Q'_۱ \approx Q'_۲) \text{ , و برعکس}$$

۳. $Q' \approx Q''$ نتیجه دهد $\omega_{l۱}(Q') = \omega_{l۲}(Q'')$.

۳ رسته‌ای از اتوماتای فازی عمومی BL

تعریف ۱.۳. فرض کنید ζ_G یک رسته از اتوماتای فازی عمومی BL باشد. یک ریخت بین

$$\tilde{F}_{rl۱} = (\bar{Q}_۱, X, \tilde{R}_۱ = (\{q_{۰۱}\}, \mu^{t_۰}(\{q_{۰۱}\})), \bar{Z}, \omega_{l۱}, \delta_{rl۱}, f_{l۱}, \tilde{\delta}_{rl۱}, F_۱, F_۲),$$

و

$$\tilde{F}_{rl۲} = (\bar{Q}_۲, X, \tilde{R}_۲ = (\{q_{۰۲}\}, \mu^{t_۰}(\{q_{۰۲}\})), \bar{Z}, \omega_{l۲}, \delta_{rl۲}, f_{l۲}, \tilde{\delta}_{rl۲}, F_۱, F_۲),$$

یک نگاشت به صورت $\alpha : \bar{Q}_۱ \times \bar{Q}_۲ \to L$ است به طوری‌که در نمودارهای زیر صدق کند:

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q_۱} \times X^* \times \overline{Q_۱} & \xrightarrow{\alpha \times ۱_{X^*} \times \alpha} & \overline{Q_۲} \times X^* \times \overline{Q_۲} \\ & {\scriptstyle \delta_{rl۱}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \delta_{rl۲}} & \\ & L & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\overline{Q_۱} \times L) \times X^* \times \overline{Q_۱} & \xrightarrow{(\alpha \times ۱_L) \times ۱_{X^*} \times \alpha} & (\overline{Q_۲} \times L) \times X^* \times \overline{Q_۲} \\ & {\scriptstyle \tilde{\delta}_{rl۱}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \tilde{\delta}_{rl۲}} & \\ & L & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q_۱} & \xrightarrow{\alpha} & \overline{Q_۲} \\ & {\scriptstyle \omega_{l۱}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \omega_{l۲}} & \\ & Z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{q_{۰۱}\} & \xrightarrow{\alpha} & \{q_{۰۲}\} \\ & {\scriptstyle \tilde{R}_۱} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \tilde{R}_۲} & \\ & L & \end{array}$$

پس، برای هر $x \in X^*$ و $Q_۲, P_۲ \in \bar{Q}_۲$ داریم:

(i) مقدار عضویت اولیه در اتوماتای دوم از طریق α قابل بازسازی باشد:

$$\mu^{t_۰}(\{q_{۰۲}\}) = \mu^{t_۰}(\{q_{۰۱}\}) \otimes \alpha(\{q_{۰۱}\}, \{q_{۰۲}\}),$$

(ii) انتقال تکمیلی در اتوماتای دوم از طریق انتقال‌های اتوماتای اول و نگاشت α قابل تقریب باشد:

$$\tilde{\delta}_{rl۲}((Q_۲,\mu^{t_۰}(Q_۲)),x,P_۲) = \bigvee_{Q_۱\in\bar{Q}_۱}\{\tilde{\delta}_{rl۱}((Q_۱,\mu^{t_۰}(Q_۱)),x,P_۱)\otimes\alpha(Q_۱,Q_۲)\otimes\alpha(P_۱,P_۲)\},$$

(iii) تابع خروجی در اتوماتای دوم از طریق خروجی‌های اتوماتای اول و نگاشت α قابل تقریب باشد:

$$\omega_{l۲}(Q_۲) = \bigcup_{\substack{P\in\bar{Q}_۱\\ \alpha(P,Q_۲)\neq۰}} \omega_{l۱}(P).$$

مثال ۲.۳. دو اتوماتای فازی عمومی BL زیر را در نظر بگیرید:

$$\widetilde{F}_{l۱} = (\bar{Q}_۱, X, \widetilde{R}_۱, \bar{Z}, \omega_{l۱}, \delta_{l۱}, f_{l۱}, \tilde{\delta}_{l۱}, F_۱, F_۲),$$

و

$$\widetilde{F}_{l۲} = (\bar{Q}_۲, X, \widetilde{R}_۲, \bar{Z}, \omega_{l۲}, \delta_{l۲}, f_{l۲}, \tilde{\delta}_{l۲}, F_۱, F_۲),$$

که در آن $L=\{۰,\frac{۱}{۲},۱\}$، $\otimes=\min$، $F_۱(\mu,\delta)=\min(\mu,\delta)$، و $F_۲=\max$. همچنین، $Q_۱=\{q_۰,q_۱\}$، $Q_۲=\{p_۰,p_۱\}$،

$$\bar{Q}_۱ = P(Q_۱) = \{\emptyset,\{q_۰\},\{q_۱\},\{q_۰,q_۱\}\},$$
$$\bar{Q}_۲ = P(Q_۲) = \{\emptyset,\{p_۰\},\{p_۱\},\{p_۰,p_۱\}\},$$

$X=\{a\}$، $Z=\{z\}$، $\bar{Z}=P(Z)=\{\emptyset,\{z\}\}$، $\widetilde{R}_۱=(\{q_۰\},۱)$. بنابراین، $\widetilde{R}_۲=(\{p_۰\},۱)$

$$\mu^{t_۰}(\{q_۰\})=۱, \qquad \mu^{t_۰}(\{p_۰\})=۱,$$

و برای سایر حالت‌ها، $\mu^{t_۰}=۰$ در نظر گرفته می‌شود. توابع انتقال در سطح حالت‌های منفرد به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_۱(q_۰,a,q_۱)=۱, \qquad \delta_۲(p_۰,a,p_۱)=۱,$$

و سایر انتقال‌ها در هر دو اتوماتا دارای وزن صفر هستند. همچنین،

$$\omega_۱(q_۰)=\omega_۲(p_۰)=\emptyset, \qquad \omega_۱(q_۱)=\omega_۲(p_۱)=\{z\}.$$

از تعریف ۵.۲، برای زیرمجموعه‌ها داریم:

$$\delta_{l۱}(\{q_۰\},a,\{q_۱\})=۱, \qquad \delta_{l۲}(\{p_۰\},a,\{p_۱\})=۱,$$
$$f_{l۱}(\{q_۰\},a)=\{q_۱\}, \qquad f_{l۲}(\{p_۰\},a)=\{p_۱\},$$

و

$$\tilde{\delta}_{l۱}((\{q_۰\},۱),a,\{q_۱\}) = F_۱(۱,\delta_{l۱}(\{q_۰\},a,\{q_۱\})) = F_۱(۱,۱)=۱,$$
$$\tilde{\delta}_{l۲}((\{p_۰\},۱),a,\{p_۱\}) = F_۱(۱,\delta_{l۲}(\{p_۰\},a,\{p_۱\})) = F_۱(۱,۱)=۱.$$

اکنون نگاشت فازی

$$\alpha : \bar{Q}_۱\times\bar{Q}_۲ \longrightarrow L$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\{q_۰\},\{p_۰\})=۱, \qquad \alpha(\{q_۱\},\{p_۱\})=۱,$$

و برای سایر زوج‌های مرتب، $\alpha(A,B)=۰$. این تعریف به‌وضوح متقارن است، زیرا اگر $\alpha(A,B)=۱$، آنگاه $\alpha(B,A)=۱$ نیز هست، و اگر $\alpha(A,B)=۰$، آنگاه $\alpha(B,A)=۰$ نیز می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم که α شرایط تعریف ریخت را ارضا می‌کند.

شرط :(i) برای هر $Q_۲\in\bar{Q}_۲$ باید داشته باشیم:

$$\mu^{t_۰}(Q_۲)=\bigvee_{Q_۱\in\bar{Q}_۱}\mu^{t_۰}(Q_۱)\otimes\alpha(Q_۱,Q_۲).$$

برای $Q_۲=\{p_۰\}$، داریم:

$$\mu^{t_۰}(\{p_۰\})=۱,$$

و

$$\bigvee_{Q_۱\in\bar{Q}_۱}\mu^{t_۰}(Q_۱)\otimes\alpha(Q_۱,\{p_۰\})=\mu^{t_۰}(\{q_۰\})\otimes\alpha(\{q_۰\},\{p_۰\})=۱\otimes۱=۱.$$

برای $Q_۲=\{p_۱\}$، از آنجا که $\mu^{t_۰}(\{p_۱\})=۰$ و برای هر $Q_۱$، یا $\mu^{t_۰}(Q_۱)=۰$ یا $\alpha(Q_۱,\{p_۱\})=۰$، داریم:

$$\bigvee_{Q_۱\in\bar{Q}_۱}\mu^{t_۰}(Q_۱)\otimes\alpha(Q_۱,\{p_۱\})=۰.$$

برای $Q_۲=\emptyset$ و $Q_۲=\{p_۰,p_۱\}$ نیز به‌طور مشابه، چون $\mu^{t_۰}(Q_۲)=۰$، شرط به‌صورت بدیهی برقرار است. بنابراین شرط (i) برای همه‌ی $Q_۲\in\bar{Q}_۲$ برقرار است.

شرط :(ii) برای هر $Q_۲,P_۲\in\bar{Q}_۲$ و هر $x\in X$ باید داشته باشیم:

$$\tilde{\delta}_{l۲}((Q_۲,\mu^{t_۰}(Q_۲)),x,P_۲)=\bigvee_{Q_۱,P_۱\in\bar{Q}_۱}\tilde{\delta}_{l۱}((Q_۱,\mu^{t_۰}(Q_۱)),x,P_۱)\otimes\alpha(Q_۱,Q_۲)\otimes\alpha(P_۱,P_۲).$$

برای $Q_۲=\{p_۰\}$، $P_۲=\{p_۱\}$ و $x=a$، داریم:

$$\tilde{\delta}_{l۲}((\{p_۰\},۱),a,\{p_۱\})=۱.$$

سمت راست:

$$\tilde{\delta}_{l۱}((\{q_۰\},۱),a,\{q_۱\})\otimes\alpha(\{q_۰\},\{p_۰\})\otimes\alpha(\{q_۱\},\{p_۱\})=۱\otimes۱\otimes۱=۱.$$

برای سایر $Q_۲,P_۲$، یا $\tilde{\delta}_{l۲}=۰$، یا $\alpha=۰$، بنابراین شرط به‌صورت بدیهی برقرار است. پس شرط (ii) برای همه‌ی حالت‌ها برقرار است.

شرط :(iii) برای هر $Q_۲\in\bar{Q}_۲$ باید داشته باشیم:

$$\omega_{l۲}(Q_۲)=\bigcup_{\substack{Q_۱\in\bar{Q}_۱\\ \alpha(Q_۱,Q_۲)>۰}}\omega_{l۱}(Q_۱).$$

برای $Q_۲=\{p_۱\}$، داریم $\alpha(\{q_۱\},\{p_۱\})=۱>۰$ و $\omega_{l۱}(\{q_۱\})=\{z\}$، بنابراین:

$$\omega_{l۲}(\{p_۱\})=\{z\}.$$

برای $Q_۲=\{p_۰\}$، داریم $\alpha(\{q_۰\},\{p_۰\})=۱>۰$ و $\omega_{l۱}(\{q_۰\})=\emptyset$، بنابراین:

$$\omega_{l۲}(\{p_۰\})=\emptyset.$$

برای $Q_۲ = \emptyset$ و $Q_۲ = \{p_۰, p_۱\}$، از آنجا که $\omega_{l۲}(Q_۲) = \emptyset$ و هیچ $Q_۱$ با $\alpha(Q_۱, Q_۲) > ۰$ وجود ندارد، شرط به‌صورت بدیهی برقرار است.

$Q_۱, Q_۲ \in \bar{Q}_۱$، از تعریف α داریم:

$$\alpha(Q_۱, Q_۲) = \alpha(Q_۲, Q_۱),$$

زیرا تنها مقادیر غیرصفر $\alpha(\{q_۰\}, \{p_۰\}) = ۱$ و $\alpha(\{q_۱\}, \{p_۱\}) = ۱$ هستند که متقارن‌اند، و سایر مقادیر صفر هستند که خود متقارن‌اند. بنابراین:

$$\alpha(Q_۱, Q_۲) \leftrightarrow \alpha(Q_۲, Q_۱) = ۱.$$

بنابراین، نگاشت فازی α تمام شرایط تعریف ریخت را ارضا می‌کند و در نتیجه یک ریخت بین دو اتوماتای فازی عمومی BL است.

قضیه ۳.۳. *تابعگون $F : NA^{\circ}_m \to \zeta_G$ وجود دارد.*

اثبات. فرض کنید $A = (Q_۱, \delta_۱, I_۱, T_۱)$ و $B = (Q_۲, \delta_۲, I_۲, T_۲)$ دو شیء از NA°_m باشند و $\alpha \in Mor(A, B) \subseteq Mor(NA_m)$ یک ریخت (تابع) باشد. بنابراین:

$$\alpha(I_۱) = I_۲ \cap \alpha(Q_۱), \quad \alpha(T_۱) = T_۲ \cap \alpha(Q_۱),$$

و

$$\alpha\left(\bigcup_{\alpha(r)=\alpha(p)} \delta_۱(r, x)\right) = \delta_۲(\alpha(p), x) \cap \alpha(Q_۱).$$

تعریف می‌کنیم:

$$F(A) = (\bar{Q}_۱, X, \tilde{R}_۱ = (\{q_{۰۱}\}, \mu^{t_۰}(\{q_{۰۱}\})), \bar{Z}, \omega_{l۱}, \delta_{rl۱}, f_{l۱}, \tilde{\delta}_{rl۱}, F_۱, F_۲),$$

$$F(B) = (\bar{Q}_۲, X, \tilde{R}_۲ = (\{q_{۰۲}\}, \mu^{t_۰}(\{q_{۰۲}\})), \bar{Z}, \omega_{l۲}, \delta_{rl۲}, f_{l۲}, \tilde{\delta}_{rl۲}, F_۱, F_۲),$$

که در آن $\{q_{۰۱}\} \cap I_۱ \neq \emptyset$، $\{q_{۰۲}\} \cap I_۲ \neq \emptyset$، $\mu^{t_۰}(\{q_{۰۱}\}) = \mu^{t_۰}(\{q_{۰۲}\}) = ۱$، و برای هر $Q' \in \bar{Q}_۱$، $x \in X^*$ و $z \in \bar{Z}$:

$$\tilde{\delta}_{l۱}((\{q_{۰۱}\}, \mu^{t_۰}(\{q_{۰۱}\})), x, Q') = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } Q' \cap \delta_۱(q_{۰۱}, x) \neq \emptyset, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

$$\omega_{l۱}(Q') = \begin{cases} \{z\} & \text{اگر } Q' \cap T_۱ \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

به‌طور مشابه برای $F(B)$:

$$\tilde{\delta}_{l۲}((\{q_{۰۲}\}, \mu^{t_۰}(\{q_{۰۲}\})), x, Q') = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } Q' \cap \delta_۲(q_{۰۲}, x) \neq \emptyset, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

$$\omega_{l۲}(Q') = \begin{cases} \{z\} & \text{اگر } Q' \cap T_۲ \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

اکنون، برای هر $P \in \bar{Q}_۱$ و $Q \in \bar{Q}_۲$، تعریف می‌کنیم:

$$F(\alpha)(P, Q) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } \alpha(P) = Q, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که $F(\alpha) \in Mor_L(F(A), F(B))$؛ یعنی سه شرط زیر برقرارند:

شرط (۱):

$$\mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۲}}\}) = \mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۱}}\}) \otimes F(\alpha)(\{q_{\circ\text{۱}}\}, \{q_{\circ\text{۲}}\}).$$

از آنجا که $\mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۱}}\}) = \text{۱}$ و $\alpha(\{q_{\circ\text{۱}}\}) = \{q_{\circ\text{۲}}\}$ (چون α یک ریخت است و حالت آغازین را به حالت آغازین نگاشت می‌کند)، داریم $F(\alpha)(\{q_{\circ\text{۱}}\}, \{q_{\circ\text{۲}}\}) = \text{۱}$. بنابراین:

$$\text{۱} \otimes \text{۱} = \text{۱} = \mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۲}}\}).$$

شرط (۲):

$$\tilde{\delta}_{l\text{۲}}((\{q_{\circ\text{۲}}\}, \mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۲}}\})), x, Q') = \bigvee_{P' \in \bar{Q}_\text{۱}} \tilde{\delta}_{l\text{۱}}((\{q_{\circ\text{۱}}\}, \mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۱}}\})), x, P') \otimes F(\alpha)(\{q_{\circ\text{۱}}\}, \{q_{\circ\text{۲}}\}) \otimes F(\alpha)(P', Q').$$

از آنجا که $F(\alpha)(\{q_{\circ\text{۱}}\}, \{q_{\circ\text{۲}}\}) = \text{۱}$، سمت راست به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\bigvee_{P' \in \bar{Q}_\text{۱}} \tilde{\delta}_{l\text{۱}}((\{q_{\circ\text{۱}}\}, \mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۱}}\})), x, P') \otimes F(\alpha)(P', Q').$$

حال، اگر $\tilde{\delta}_{l\text{۲}}((\{q_{\circ\text{۲}}\}, \mu^{t_\circ}(\{q_{\circ\text{۲}}\})), x, Q') = \text{۱}$، آنگاه $Q' \cap \delta_\text{۲}(q_{\circ\text{۲}}, x) \neq \emptyset$. از آنجا که α یک ریخت است، داریم:

$$\alpha(\delta_\text{۱}(q_{\circ\text{۱}}, x)) = \delta_\text{۲}(\alpha(q_{\circ\text{۱}}), x) \cap \alpha(Q_\text{۱}) = \delta_\text{۲}(q_{\circ\text{۲}}, x) \cap \alpha(Q_\text{۱}).$$

بنابراین، اگر $q' \in Q' \cap \delta_\text{۲}(q_{\circ\text{۲}}, x)$، آنگاه یک $p' \in \delta_\text{۱}(q_{\circ\text{۱}}, x)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(p') = q'$ و در نتیجه $\alpha(P') = Q'$ برای $P' = \delta_\text{۱}(q_{\circ\text{۱}}, x)$. پس $F(\alpha)(P', Q') = \text{۱}$ و $\tilde{\delta}_{l\text{۱}}((\{q_{\circ\text{۱}}\}, \mu^{t_\circ}), x, P') = \text{۱}$، که نشان می‌دهد سمت راست برابر ۱ است. عکس این استدلال نیز به‌طور مشابه برقرار است.

شرط (۳):

$$\omega_{l\text{۲}}(Q) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_\text{۱} \\ F(\alpha)(P,Q)=\text{۱}}} \omega_{l\text{۱}}(P).$$

اگر $\omega_{l\text{۲}}(Q) = \{z\}$، آنگاه $Q \cap T_\text{۲} \neq \emptyset$، و چون $\alpha(T_\text{۱}) = T_\text{۲} \cap \alpha(Q_\text{۱})$، یک $P \in \bar{Q}_\text{۱}$ با $\alpha(P) = Q$ و $P \cap T_\text{۱} \neq \emptyset$ وجود دارد، که نتیجه می‌دهد $\omega_{l\text{۱}}(P) = \{z\}$. بنابراین $\{z\} \subseteq \bigcup_{F(\alpha)(P,Q)=\text{۱}} \omega_{l\text{۱}}(P)$. عکس این مطلب نیز به‌طور مشابه برقرار است.

برای هر $A \in NA^\circ_m$، داریم $F(id_A) = id_{F(A)}$، زیرا $id_A(P) = P$ و لذا $F(id_A)(P, Q) = \text{۱}$ اگر و فقط اگر $P = Q$، که دقیقاً تعریف $id_{F(A)}$ است. همچنین برای هر $\alpha \in Mor(A, B)$ و $\beta \in Mor(B, C)$، از تعریف $F(\alpha)$ و $F(\beta)$ و ترکیب ریخت‌ها در ζ_G، به‌سادگی نشان داده می‌شود که $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$. بنابراین F یک تابعگون است. □

مثال ۴.۳. فرض کنید $L = \{\circ, \frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \text{۱}\}$، $\otimes = \min$، $F_\text{۱}(\mu, \delta) = \min(\mu, \delta)$، و $F_\text{۲} = \max$. فرض کنید $A = (Q_\text{۱}, \delta_\text{۱}, I_\text{۱}, T_\text{۱})$ و $B = (Q_\text{۲}, \delta_\text{۲}, I_\text{۲}, T_\text{۲})$ دو اتوماتای غیرقطعی با یک حالت آغازین باشند، که در آن:

$$Q_\text{۱} = \{q_\circ, q_\text{۱}\}, \qquad Q_\text{۲} = \{p_\circ, p_\text{۱}\},$$

$$I_\text{۱} = \{q_\circ\}, \qquad I_\text{۲} = \{p_\circ\},$$

$$T_\text{۱} = \{q_\text{۱}\}, \qquad T_\text{۲} = \{p_\text{۱}\},$$

$$X = \{a\}, \qquad Z = \{z\}.$$

مجموعه‌های توانی به‌صورت زیر هستند:

$$\bar{Q}_۱ = P(Q_۱) = \{\emptyset, \{q_۰\}, \{q_۱\}, \{q_۰, q_۱\}\},$$
$$\bar{Q}_۲ = P(Q_۲) = \{\emptyset, \{p_۰\}, \{p_۱\}, \{p_۰, p_۱\}\},$$
$$\bar{Z} = P(Z) = \{\emptyset, \{z\}\}.$$

توابع انتقال در سطح حالت‌های منفرد به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_۱(q_۰, a) = \{q_۱\}, \qquad \delta_۲(p_۰, a) = \{p_۱\},$$

و برای سایر حالت‌ها، $\delta_۱(q, a) = \emptyset$ و $\delta_۲(p, a) = \emptyset$. توابع خروجی در سطح حالت‌های منفرد به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_۱(q_۰) = \emptyset, \qquad \omega_۱(q_۱) = \{z\},$$
$$\omega_۲(p_۰) = \emptyset, \qquad \omega_۲(p_۱) = \{z\}.$$

ریخت $\alpha \in Mor(A, B)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(q_۰) = p_۰, \qquad \alpha(q_۱) = p_۱.$$

تعریف α را به‌صورت طبیعی به زیرمجموعه‌ها تعمیم می‌دهیم: برای هر $P \subseteq Q_۱$،

$$\alpha(P) = \{\alpha(p) \mid p \in P\}.$$

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که α یک ریخت است، زیرا:

$$\alpha(I_۱) = \alpha(\{q_۰\}) = \{p_۰\} = I_۲ \cap \alpha(Q_۱),$$
$$\alpha(T_۱) = \alpha(\{q_۱\}) = \{p_۱\} = T_۲ \cap \alpha(Q_۱),$$

و

$$\alpha(\delta_۱(q_۰, a)) = \alpha(\{q_۱\}) = \{p_۱\} = \delta_۲(\alpha(q_۰), a) \cap \alpha(Q_۱).$$

اکنون، تابعگون F را روی این اشیاء اعمال می‌کنیم. طبق تعریف، داریم:

$$F(A) = (\bar{Q}_۱, X, \widetilde{R}_۱, \bar{Z}, \omega_{l۱}, \delta_{rl۱}, f_{l۱}, \tilde{\delta}_{rl۱}, F_۱, F_۲),$$

که در آن $\widetilde{R}_۱ = (\{q_۰\}, ۱)$، و برای هر $Q' \in \bar{Q}_۱$، طبق تعریف ۵.۲:

$$\omega_{l۱}(Q') = \{\omega_۱(q) \mid q \in Q'\}.$$

بنابراین،

$$\omega_{l۱}(\emptyset) = \emptyset, \qquad \omega_{l۱}(\{q_۰\}) = \emptyset, \qquad \omega_{l۱}(\{q_۱\}) = \{z\}, \qquad \omega_{l۱}(\{q_۰, q_۱\}) = \{z\}.$$

همچنین، برای هر $Q' \in \bar{Q}_۱$ و $x \in X^*$:

$$\tilde{\delta}_{l۱}((\{q_۰\}, ۱), x, Q') = \begin{cases} ۱ & \text{if} Q' \cap \delta_۱(q_۰, x) \neq \emptyset, \\ ۰ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

از آنجا که $\delta_۱(q_۰, a) = \{q_۱\}$، داریم:

$$\tilde{\delta}_{l۱}((\{q_۰\}, ۱), a, \{q_۱\}) = F_۱(۱, \delta_{l۱}(\{q_۰\}, a, \{q_۱\})) = F_۱(۱, ۱) = ۱,$$

و برای سایر Q'، مقدار آن صفر است. به‌طور مشابه، $F(B)$ نیز تعریف می‌شود:

$$\omega_{l۲}(\emptyset)=\emptyset,\qquad \omega_{l۲}(\{p_۰\})=\emptyset,\qquad \omega_{l۲}(\{p_۱\})=\{z\},\qquad \omega_{l۲}(\{p_۰,p_۱\})=\{z\},$$

و

$$\tilde{\delta}_{l۲}((\{p_۰\},۱),a,\{p_۱\})=F_۱(۱,\delta_{l۲}(\{p_۰\},a,\{p_۱\}))=F_۱(۱,۱)=۱,$$

و برای سایر Q'، مقدار آن صفر است. حال، ریخت $F(\alpha):F(A)\to F(B)$ را مطابق تعریف داریم:

$$F(\alpha)(P,Q)=\begin{cases}۱ & \text{if}\alpha(P)=Q,\\ ۰ & \text{otherwise.}\end{cases}$$

بنابراین، مقادیر غیرصفر $F(\alpha)$ فقط برای زوج‌های زیر هستند:

$$F(\alpha)(\emptyset,\emptyset)=۱,\qquad F(\alpha)(\{q_۰\},\{p_۰\})=۱,$$
$$F(\alpha)(\{q_۱\},\{p_۱\})=۱,\qquad F(\alpha)(\{q_۰,q_۱\},\{p_۰,p_۱\})=۱.$$

اکنون نشان می‌دهیم که $F(\alpha)$ یک ریخت در ζ_G است.

شرط (۱): برای هر $Q_۲\in\bar{Q}_۲$ باید داشته باشیم:

$$\mu^{t_۰}(Q_۲)=\bigvee_{Q_۱\in\bar{Q}_۱}\mu^{t_۰}(Q_۱)\otimes F(\alpha)(Q_۱,Q_۲).$$

از آنجا که تنها حالت آغازین $\{q_۰\}$ دارای $\mu^{t_۰}=۱$ است و $\mu^{t_۰}(\{p_۰\})=۱$، برای $Q_۲=\{p_۰\}$ داریم:

$$\mu^{t_۰}(\{p_۰\})=۱,$$

و

$$\mu^{t_۰}(\{q_۰\})\otimes F(\alpha)(\{q_۰\},\{p_۰\})=۱\otimes۱=۱.$$

برای سایر $Q_۲\in\bar{Q}_۲$، یا $\mu^{t_۰}(Q_۲)=۰$ یا $F(\alpha)=۰$، بنابراین شرط به‌صورت بدیهی برقرار است.

شرط (۲): برای هر $Q_۲,P_۲\in\bar{Q}_۲$ و هر $x\in X$ باید داشته باشیم:

$$\tilde{\delta}_{l۲}((Q_۲,\mu^{t_۰}(Q_۲)),x,P_۲)=\bigvee_{Q_۱,P_۱\in\bar{Q}_۱}\tilde{\delta}_{l۱}((Q_۱,\mu^{t_۰}(Q_۱)),x,P_۱)$$
$$\otimes F(\alpha)(Q_۱,Q_۲)\otimes F(\alpha)(P_۱,P_۲).$$

برای $Q_۲=\{p_۰\}$، $P_۲=\{p_۱\}$ و $x=a$، داریم:

$$\tilde{\delta}_{l۲}((\{p_۰\},۱),a,\{p_۱\})=۱.$$

سمت راست:

$$\tilde{\delta}_{l۱}((\{q_۰\},۱),a,\{q_۱\})\otimes F(\alpha)(\{q_۰\},\{p_۰\})\otimes F(\alpha)(\{q_۱\},\{p_۱\})=۱\otimes۱\otimes۱=۱.$$

برای سایر $Q_۲,P_۲\in\bar{Q}_۲$، یا $\tilde{\delta}_{l۲}=۰$، یا $\mu^{t_۰}=۰$، یا $F(\alpha)=۰$، بنابراین شرط به‌صورت بدیهی برقرار است.

شرط (۳): برای هر $Q\in\bar{Q}_۲$ باید داشته باشیم:

$$\omega_{l۲}(Q)=\bigcup_{\substack{P\in\bar{Q}_۱\\ F(\alpha)(P,Q)=۱}}\omega_{l۱}(P).$$

برای $Q = \{p_1\}$، داریم $F(\alpha)(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1$ و $\omega_{l1}(\{q_1\}) = \{z\}$، بنابراین:

$$\omega_{l2}(\{p_1\}) = \{z\}.$$

برای $Q = \{p_0\}$، داریم $F(\alpha)(\{q_0\}, \{p_0\}) = 1$ و $\omega_{l1}(\{q_0\}) = \emptyset$، بنابراین:

$$\omega_{l2}(\{p_0\}) = \emptyset.$$

برای $Q = \emptyset$، داریم $F(\alpha)(\emptyset, \emptyset) = 1$ و $\omega_{l1}(\emptyset) = \emptyset$، بنابراین:

$$\omega_{l2}(\emptyset) = \emptyset.$$

برای $Q = \{p_0, p_1\}$، داریم $F(\alpha)(\{q_0, q_1\}, \{p_0, p_1\}) = 1$ و $\omega_{l1}(\{q_0, q_1\}) = \{z\}$، بنابراین:

$$\omega_{l2}(\{p_0, p_1\}) = \{z\}.$$

بنابراین شرط (۳) برای همه‌ی $Q \in \bar{Q}_2$ برقرار است. بنابراین، تمام شرایط ریخت برقرار است و $F(\alpha) \in Mor_L(F(A), F(B))$. همچنین به‌سادگی از تعریف F روی همانی‌ها و ترکیب‌ها، داریم $F(id_A) = id_{F(A)}$ و $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$، که نشان می‌دهد F یک تابعگون است.

تعریف ۵.۳. فرض کنید $M_i = (Q_i, \delta_i, I_i, T_i), i = 1, 2$ دو NDA باشد. پس رابطه $\approx$ روی Q_1 و Q_2 یک دو-شبیه سازی بین M_1 و M_2 است اگر شرایط زیر برقرار باشد.

۱. $q_1 \approx q_2$ نتیجه دهد $\delta_{l1}(q_1, a) \approx \delta_{l2}(q_2, a)$،

۲. $q_1 \in I_1, q_2 \in I_2$ نتیجه دهد $q_1 \approx q_2$،

۳. $q_1 \approx q_2$ نتیجه دهد $q_1 \in T_1, q_2 \in T_2$ یا $q_1 \notin T_1, q_2 \notin T_2$،

به طوری‌که $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ و $a \in X$.

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\approx$ یک دو-شبیه‌سازی بین دو اتوماتای غیرقطعی M_1 و M_2 باشد. پس $F(\approx)$ یک دو-شبیه سازی بین $F(M_1)$ و $F(M_2)$ است.*

اثبات. فرض کنید $M_1 = (Q_1, \delta_1, I_1, T_1)$ و $M_2 = (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$. پس داریم:

$$F(M_1) = (\bar{Q}_1, X, (\{q_{01}\}, \mu^{t_0}(\{q_{01}\})), \bar{Z}, \omega_{l1}, \delta_{rl1}, f_{l1}, \tilde{\delta}_{rl1}, F_1, F_2),$$

و

$$F(M_2) = (\bar{Q}_2, X, (\{q_{02}\}, \mu^{t_0}(\{q_{02}\})), \bar{Z}, \omega_{l2}, \delta_{rl2}, f_{l2}, \tilde{\delta}_{rl2}, F_1, F_2),$$

به طوری‌که $\{q_{01}\} \cap I_1 \neq \emptyset$، $\{q_{02}\} \cap I_2 \neq \emptyset$، $\mu^{t_0}(\{q_{01}\}) = 1$، $\mu^{t_0}(\{q_{02}\})$، و

$$\delta_{rl1}(Q', a, Q'') = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Q'' = \delta_1(Q', a) \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases},$$

$$\omega_{l1}(Q') = \begin{cases} z & \text{اگر } Q' \cap T_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases},$$

$$F(\approx)(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (\forall p_i \in P)(\exists q_i \in Q)(p_i \approx q_i) \text{و برعکس} \\ 0 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases},$$

که در آن $Q', Q'', P \in \bar{Q}_1$، $Q \in \bar{Q}_2$ و $z \in \bar{Z}$. فرض کنید $\approx$ یک دو-شبیه‌سازی بین M_1 و M_2 باشد. حال نشان می‌دهیم $F(\approx)$ یک دو-شبیه‌سازی بین $\tilde{F}_{l1}$ و $\tilde{F}_{l2}$ است:

۱. داریم: $q_{۰۱} \in I_۱$ و $q_{۰۲} \in I_۲$، پس $\{q_{۰۲}\} \approx \{q_{۰۱}\}$.

۲. فرض کنید $F(\approx)(Q,P) = ۱$ و $\delta_{rl۱}(Q,a,Q') = ۱$. پس برای هر $q_i \in Q$ وجود دارد $p_i \in P$، به قسمی‌که $q_i \approx p_i$ و برعکس. بنابراین،

$$\delta_۱(q_i,a) \approx \delta_۲(p_i,a),$$

که در آن $q_i \in Q$، و $p_i \in P$. بنابراین، $F(\approx)(Q',P') = ۱$، که در آن $P' = \{p' \in Q_۲ | p' \in \delta_l(p_i,a)\}$ و $\delta_l(P,a,P') = ۱$.

۳. $F(\approx)(Q,P) = ۱$. پس برای هر $q_i \in Q$ وجود دارد $p_i \in P$ به قسمی‌که $q_i \approx p_i$ و برعکس. پس $\omega_{l۱}(Q) = \omega_{l۲}(P)$.

□

تعریف ۷.۳. فرض کنید $E_۱, E_۲ : NA^\circ_m \to \zeta_G$ دو تابعگون باشند، و برای هر شیء $A \in NA^\circ_m$، اتوماتاهای فازی عمومی $E_۱(A)$ و $E_۲(A)$ به‌ترتیب دارای مجموعه حالت‌های $\bar{Q}_۱$ و $\bar{Q}_۲$ باشند. مجموعه‌ی نگاشت‌های فازی هم‌ارز بین این دو اتوماتا، که با نماد $\mathcal{E}_A$ نمایش داده می‌شود، شامل تمام نگاشت‌های فازی $\alpha_A : \bar{Q}_۱ \times \bar{Q}_۲ \to L$ است که شرایط زیر را هم‌زمان ارضا کنند:

(i) برای هر $Q_۲ \in \bar{Q}_۲$، مقدار عضویت آغازین در $E_۲(A)$ از طریق ترکیب فازی با $E_۱(A)$ قابل تقریب باشد:

$$\mu^{t_\circ}_{E_۲}(Q_۲) := \bigvee_{Q_۱ \in \bar{Q}_۱} \mu^{t_\circ}_{E_۱}(Q_۱) \otimes \alpha_A(Q_۱,Q_۲).$$

(ii) برای هر $Q_۲, P_۲ \in \bar{Q}_۲$ و هر $x \in X$، تابع انتقال فازی در $E_۲(A)$ از طریق ترکیب انتقال‌های $E_۱(A)$ و نگاشت α_A قابل تقریب باشد:

$$\delta_{E_۲}(Q_۲,x,P_۲) := \bigvee_{Q_۱,P_۱ \in \bar{Q}_۱} \delta_{E_۱}(Q_۱,x,P_۱) \otimes \alpha_A(Q_۱,Q_۲) \otimes \alpha_A(P_۱,P_۲).$$

(iii) برای هر $Q_۲ \in \bar{Q}_۲$، خروجی اتوماتای $E_۲(A)$ به‌صورت مجموعه‌ای از نمادها از طریق نگاشت α_A قابل تقریب باشد:

$$\omega_{E_۲}(Q_۲) := \bigcup_{\substack{Q_۱ \in \bar{Q}_۱ \\ \alpha_A(Q_۱,Q_۲) > ۰}} \omega_{E_۱}(Q_۱).$$

(iv) اگر $\bar{Q}_۱ = \bar{Q}_۲$، نگاشت α_A باید تقارن فازی را ارضا کند:

$$\forall Q_۱, Q_۲ \in \bar{Q}_۱, \quad \alpha_A(Q_۱,Q_۲) \leftrightarrow \alpha_A(Q_۲,Q_۱) = ۱.$$

در این تعریف، عمل $\otimes$ ضرب فازی و $\leftrightarrow$ هم‌ارزی فازی در مشبکه‌ی کامل کراندار L تعریف شده‌اند. نگاشت‌های α_A در مجموعه $\mathcal{E}_A$ ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی اتوماتای $E_۲(A)$ را از طریق ترکیب فازی با ساختارهای متناظر در $E_۱(A)$ تقریب می‌زنند، و در صورت تساوی دامنه‌ها، تقارن فازی بین حالت‌ها را نیز حفظ می‌کنند.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید $E_۱, E_۲ : NA^\circ_m \to \zeta_G$ دو تابعگون باشند، و برای هر شیء $A \in NA^\circ_m$، بین اتوماتاهای فازی عمومی $E_۱(A)$ و $E_۲(A)$ یک نگاشت فازی*

$$\alpha_A : \bar{Q}_۱ \times \bar{Q}_۲ \to L,$$

وجود داشته باشد که شرایط تعریف ۷.۳ را ارضا کند. همچنین فرض شود که برای هر رشته ورودی $x \in X^*$، نگاشت α_A حالت‌های رانشی نهایی را به‌طور فازی و متقارن مرتبط می‌سازد:

$$\alpha_A(\rho_{E_1(A)}(x), \rho_{E_2(A)}(x)) > 0 \quad \text{و} \quad \alpha_A(\rho_{E_2(A)}(x), \rho_{E_1(A)}(x)) > 0.$$

فرض کنید برای هر نماد خروجی $z \in Z$، تابع $\nu : Z \to L$ مقدار عضویت آن را در مشبکه‌ی L تعیین کند. در این صورت، برای هر $x \in X^*$، خروجی نهایی فازی دو اتوماتا از نظر فازی کاملاً هم‌ارز هستند:

$$\mathsf{F}_2(\nu_{E_1(A)}(x)) \leftrightarrow \mathsf{F}_2(\nu_{E_2(A)}(x)) = 1.$$

اثبات. برای $x \in X^*$، بنویسید $Q_1 := \rho_{E_1(A)}(x)$ و $Q_2 := \rho_{E_2(A)}(x)$. طبق شرط سوم تعریف ۷.۳، داریم:

$$\omega_{E_2(A)}(Q_2) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_1 \\ \alpha_A(P,Q_2)>0}} \omega_{E_1(A)}(P),$$

$$\omega_{E_1(A)}(Q_1) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_2 \\ \alpha_A(P,Q_1)>0}} \omega_{E_2(A)}(P).$$

از فرض $\alpha_A(Q_1, Q_2) > 0$ نتیجه می‌شود

$$\omega_{E_1(A)}(Q_1) \subseteq \omega_{E_2(A)}(Q_2),$$

و از $\alpha_A(Q_2, Q_1) > 0$ نتیجه می‌شود $\omega_{E_2(A)}(Q_2) \subseteq \omega_{E_1(A)}(Q_1)$، و در نتیجه:

$$\omega_{E_1(A)}(Q_1) = \omega_{E_2(A)}(Q_2).$$

اکنون برای هر نماد خروجی $z \in Z$، تابع $\nu : Z \to L$ مقدار عضویت آن را در مشبکه‌ی L تعیین می‌کند. بنابراین،

$$\nu_{E_1(A)}(x) := \{\nu(z) \mid z \in \omega_{E_1(A)}(Q_1)\},$$

$$\nu_{E_2(A)}(x) := \{\nu(z) \mid z \in \omega_{E_2(A)}(Q_2)\}.$$

و چون $\omega_{E_1(A)}(Q_1) = \omega_{E_2(A)}(Q_2)$، نتیجه می‌گیریم:

$$\nu_{E_1(A)}(x) = \nu_{E_2(A)}(x).$$

با اعمال تابع رفع چندعضویتی $\mathsf{F}_2 : L^* \to L$ که نسبت به تساوی مجموعه‌ها پایدار است، داریم:

$$\mathsf{F}_2(\nu_{E_1(A)}(x)) = \mathsf{F}_2(\nu_{E_2(A)}(x)) \Rightarrow \mathsf{F}_2(\nu_{E_1(A)}(x)) \leftrightarrow \mathsf{F}_2(\nu_{E_2(A)}(x)) = 1.$$

□

قضیه ۹.۳. *فرض کنید L یک مشبکه‌ی کامل کراندار و $\otimes$ یک ضرب فازی یکنوا و توزیع‌پذیر نسبت به $\bigvee$ باشد. اگر مجموعه‌ی نگاشت‌های فازی هم‌ارز $\mathcal{E}_A$ (مطابق تعریف ۷.۳) ناتهی باشد، آنگاه در آن یک نگاشت بیشینه وجود دارد؛ یعنی نگاشتی $\alpha_A^{\max} \in \mathcal{E}_A$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\alpha_A \in \mathcal{E}_A$ و هر $Q_1 \in \bar{Q}_1$، $Q_2 \in \bar{Q}_2$ داریم:*

$$\alpha_A(Q_1, Q_2) \leq \alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2).$$

اثبات. از آنجا که L یک مشبکه‌ی کامل است، مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های فازی $\bar{Q}_۱ \times \bar{Q}_۲ \to L$ با ترتیب نقطه‌ای خود یک مشبکه‌ی کامل تشکیل می‌دهد. بنابراین، اگر $\mathcal{E}_A$ ناتهی باشد، می‌توان نگاشت $\alpha_A^{\max}$ را به‌صورت نقطه‌ای تعریف کرد:

$$\alpha_A^{\max}(Q_۱, Q_۲) := \bigvee_{\alpha \in \mathcal{E}_A} \alpha(Q_۱, Q_۲).$$

برای اثبات اینکه $\alpha_A^{\max} \in \mathcal{E}_A$، کافی است نشان دهیم که این نگاشت چهار شرط تعریف ۷.۳ را ارضا می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم که $\alpha_A^{\max}$ خاصیت تقارن فازی را دارد. چون برای هر $\alpha \in \mathcal{E}_A$ و هر $Q_۱, Q_۲$ داریم $\alpha(Q_۱, Q_۲) \leftrightarrow ۱ = \alpha(Q_۲, Q_۱)$، و چون $\leftrightarrow$ نسبت به $\bigvee$ توزیع‌پذیر است، نتیجه می‌شود:

$$\alpha_A^{\max}(Q_۱, Q_۲) \leftrightarrow \alpha_A^{\max}(Q_۲, Q_۱) = ۱.$$

اکنون به بررسی شرط بازسازی نگاشت آغازین می‌پردازیم. برای هر $Q_۲ \in \bar{Q}_۲$، چون هر $\alpha \in \mathcal{E}_A$ شرط زیر را ارضا می‌کند:

$$\mu_{E_۲}^{t_۰}(Q_۲) = \bigvee_{Q_۱ \in \bar{Q}_۱} \mu_{E_۱}^{t_۰}(Q_۱) \otimes \alpha(Q_۱, Q_۲),$$

و چون $\otimes$ نسبت به $\bigvee$ توزیع‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned}\mu_{E_۲}^{t_۰}(Q_۲) &= \bigvee_{Q_۱ \in \bar{Q}_۱} \mu_{E_۱}^{t_۰}(Q_۱) \otimes \left(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{E}_A} \alpha(Q_۱, Q_۲) \right) \\ &= \bigvee_{Q_۱ \in \bar{Q}_۱} \mu_{E_۱}^{t_۰}(Q_۱) \otimes \alpha_A^{\max}(Q_۱, Q_۲).\end{aligned}$$

برای نگاشت انتقالی نیز، برای هر $Q_۲, P_۲ \in \bar{Q}_۲$ و هر $x \in X$، چون هر $\alpha \in \mathcal{E}_A$ رابطه‌ی زیر را ارضا می‌کند:

$$\delta_{E_۲}(Q_۲, x, P_۲) = \bigvee_{Q_۱, P_۱ \in \bar{Q}_۱} \delta_{E_۱}(Q_۱, x, P_۱) \otimes \alpha(Q_۱, Q_۲) \otimes \alpha(P_۱, P_۲),$$

و با توجه به توزیع‌پذیری $\otimes$ نسبت به $\bigvee$، نتیجه می‌شود:

$$\delta_{E_۲}(Q_۲, x, P_۲) = \bigvee_{Q_۱, P_۱} \delta_{E_۱}(Q_۱, x, P_۱) \otimes \alpha_A^{\max}(Q_۱, Q_۲) \otimes \alpha_A^{\max}(P_۱, P_۲).$$

در نهایت، برای نگاشت خروجی، برای هر $Q_۲ \in \bar{Q}_۲$ داریم:

$$\omega_{E_۲}(Q_۲) = \bigcup_{\substack{Q_۱ \in \bar{Q}_۱ \\ \alpha_A^{\max}(Q_۱, Q_۲) > ۰}} \omega_{E_۱}(Q_۱).$$

پس، نگاشت $\alpha_A^{\max}$ شرط خروجی را نیز ارضا می‌کند. بنابراین، $\alpha_A^{\max} \in \mathcal{E}_A$ و بیشینه است. □

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید $E_۱, E_۲ : NA_m^{\circ} \to \zeta_G$ دو تابعگون باشند. گوییم $E_۱$ و $E_۲$ در سطح رفتار هم‌ارز هستند، اگر برای هر شیء $M \in NA_m^{\circ}$ و هر رشته ورودی $x \in X^*$، خروجی‌های حاصل از ارزیابی فازی و رفع چندعضویتی در اتوماتاهای $E_۱(M)$ و $E_۲(M)$ در مشبکه‌ی L دوماندهای باشند؛ یعنی

$$F_۲(\nu_{E_۱(M)}(x)) \leftrightarrow F_۲(\nu_{E_۲(M)}(x)) = ۱,$$

که در آن،

- $\nu : \bar{Z} \to L$ تابعی است که مقدار عضویت فازی هر خروجی را تعیین می‌کند،

- $L \subseteq \{\nu(z) \mid z \in \beta_{E_i(M)}(x)\}$، $\nu_{E_i(M)}(x) = \{\nu(z) \mid z \in \beta_{E_i(M)}(x)\}$ مجموعه‌ی مقادیر عضویت خروجی‌ها است.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید $M_1 = (Q_1, \delta_1, I_1, T_1)$ و $M_2 = (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$ دو اتوماتای غیرقطعی باشند، و $\approx \subseteq Q_1 \times Q_2$ یک رابطه‌ی دو ـ شبیه‌سازی بین آن‌ها باشد. همچنین فرض کنید $F : NA^{\circ}_m \to \zeta_G$ یک تابعگون رفتاری باشد که رابطه‌ی $\approx$ را به یک نگاشت فازی $F(\approx) : \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2 \to L$ منتقل می‌کند، به‌طوری‌که، $F(\approx)$ یک دو ـ شبیه‌سازی فازی بین اتوماتاهای فازی $F(M_1)$ و $F(M_2)$ است؛ برای هر $Q_1 \in \bar{Q}_1$، $Q_2 \in \bar{Q}_2$ داریم*

$$F(\approx)(Q_1, Q_2) \leftrightarrow F(\approx)(Q_2, Q_1) = 1$$

تابع رفع چندعضویتی $F_2 : L^* \to L$ نسبت به هم‌ارزی فازی $\leftrightarrow$ هم‌ساز و یکنواست. در این صورت، اتوماتاهای فازی $F(M_1)$ و $F(M_2)$ از نظر رفتاری هم‌ارز هستند؛ یعنی برای هر رشته ورودی $x \in X^*$ داریم:

$$F_2(\nu_{F(M_1)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{F(M_2)}(x)) = 1,$$

که در آن $L \subseteq \{\nu(z) \mid z \in \omega_{F(M_i)}(\rho_{F(M_i)}(x))\}$، و $\nu_{F(M_i)}(x) := \{\nu(z) \mid z \in \omega_{F(M_i)}(\rho_{F(M_i)}(x))\}$ تابع عضویت خروجی‌ها در مشبکه‌ی L است.

اثبات. برای $x \in X^*$ دلخواه، نگاشت رانشی $\rho_{F(M_i)} : X^* \to \bar{Q}_i$ حالت فعال نهایی $Q_x^{(i)} := \rho_{F(M_i)}(x)$ را در اتوماتای فازی $F(M_i)$ تولید می‌کند. چون $F(\approx)$ یک دو ـ شبیه‌سازی فازی است، طبق فرض داریم:

$$F(\approx)(Q_x^{(1)}, Q_x^{(2)}) > 0 \quad \text{و} \quad F(\approx)(Q_x^{(2)}, Q_x^{(1)}) > 0.$$

طبق شرط خروجی در تعریف دو ـ شبیه‌سازی فازی، برای هر $z \in \omega_{F(M_1)}(Q_x^{(1)})$، وجود دارد $z' \in \omega_{F(M_2)}(Q_x^{(2)})$ به‌طوری‌که $\nu(z) \leftrightarrow \nu(z') = 1$، و بالعکس. بنابراین، مجموعه‌های $\nu_{F(M_1)}(x)$ و $\nu_{F(M_2)}(x)$ از نظر نقطه‌ای در مشبکه‌ی L هم‌ارز هستند؛ یعنی:

$$\forall \nu_1 \in \nu_{F(M_1)}(x), \exists \nu_2 \in \nu_{F(M_2)}(x) \text{ با } \nu_1 \leftrightarrow \nu_2 = 1, \quad \text{و بالعکس}.$$

از هم‌ساز بودن تابع F_2 نسبت به $\leftrightarrow$ و یکنوایی آن، نتیجه می‌گیریم:

$$F_2(\nu_{F(M_1)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{F(M_2)}(x)) = 1.$$

در نتیجه، اتوماتاهای فازی $F(M_1)$ و $F(M_2)$ در سطح رفتار هم‌ارز هستند. □

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، چارچوبی رسته‌ای برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار اتوماتاهای فازی عمومی مبتنی بر BL ـ جبرها توسعه داده شد. با تعریف دقیق رسته‌ای از اتوماتاهای فازی BL و معرفی تابعگون‌های رفتاری از رسته‌ی اتوماتاهای غیرقطعی به این رسته، امکان مدل‌سازی ساختارهای فازی و مقایسه‌ی رفتار آن‌ها فراهم گردید.

برای سنجش هم‌ارزی بین تابعگون‌ها، مجموعه‌ای از نگاشت‌های فازی هم‌ارز معرفی شد که ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی را به‌صورت ترکیبی بازسازی می‌کنند. اثبات شد که این مجموعه، در صورت ناتهی بودن، دارای عضو بیشینه است که تمام شروط بازسازی و تقارن فازی را ارضا می‌کند.

در ادامه، با توجه به مفهوم دو ـ شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، نشان داده شد که این رابطه تحت تابعگون رفتاری به یک دو ـ شبیه‌سازی فازی بین اتوماتاهای فازی عمومی BL منتقل می‌شود. بر پایه‌ی این انتقال، اثبات گردید که وجود دو ـ شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی حاصل از آن‌ها را تضمین می‌کند.

لازم به ذکر است که چارچوب رسته‌ای ارائه‌شده در این مقاله با هدف تبیین ساختار نظری هم‌ارزی رفتاری میان اتوماتاهای فازی عمومی توسعه یافته است و ادعایی مبنی بر کاهش پیچیدگی محاسباتی مسئله تشخیص هم‌ارزی ارائه نمی‌کند. با این حال، صورت‌بندی رسته‌ای معرفی‌شده می‌تواند مبنایی مناسب برای طراحی روش‌های ساختاریافته و الگوریتم‌های کارآمدتر در بررسی هم‌ارزی رفتاری و دو ـ شبیه‌سازی در پژوهش‌های آینده فراهم آورد. بررسی جنبه‌های الگوریتمی، تحلیل پیچیدگی و امکان کاهش هزینه محاسباتی در این چارچوب، از موضوعات قابل مطالعه در ادامه این پژوهش خواهد بود.

مراجع

[1] K. Abolpour, M . M. Zahedi, Isomorphism between two BL-general fuzzy automata, Soft Computing, 16(2012), 729-736.

[2] P. Buchholz, Bisimulation relations for weighted automata, Theoretical Computer Science, 393 (2008), 109-123.

[3] M. Ćirić, J. Ignjatović, M. Bašić, I. Jančić, Nondeterministic automata: equivalence, bisimulations, and uniform relations, Information Sciences, 261 (2013), 185-218.

[4] M. Ćirić, J. Ignjatović, N. Damljanović, M. Bašić, Bisimulations for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems, 186 (2012), 100-139.

[5] M. Doostfatemeh, S. C. Kremer, New directions in fuzzy automata, International Journal of Approximate Reasoning, 38.2 (2005), 175-214.

[6] M. Eder, Monoids, automata and related constructions in monoidal categories, PhD diss, 2015.

[7] M. R. Gary, D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, (1979).

[8] P. Hájek, Metamathematics of Fuzzy Logic, Trends in Logic, vol. 4, Kluwer, Dordercht, 1998.

[9] Z. Jančić, I. Micić, M. Ćirić, J. R. G. de Mendívil, S. Stanimirović, Approximate determinization of fuzzy automata over the product structure by means of approximate weak simulations, Fuzzy Sets and Systems, (2025), 109625.

[10] R. Kaur, A. Tripathi, Hybrid model of general fuzzy automata and semantic computing: an application to transportation e-service, Soft Computing, 28 (2024), 10519-10530.

[11] F. R. Lima-Junior, Advances in Fuzzy Logic and Artificial Neural Networks, Mathematics 12 (2024), 3949.

[12] I. Micić, M. Ćirić, J. Matejić, S. Stanimirović, L. A. Nguyen, Approximate weak simulations and bisimulations for fuzzy automata over the product structure, Fuzzy Sets and Systems, 485 (2024), 108959.

[13] R. Milner, Acalculus of communicating systems, in: G. Goos, J. Hartmanis (Eds.), Lecture Notes in Computer Science, Springer, 92 (1980).

[14] D. Park, Concurrency and automata on infinite sequences, in: P.Deussen(Ed.), Proceedings of the 5th GI Conference, Karlsruhe, Germany, Lecture Notesin Computer Science, Springer-Verlag, 104, (1981), 167-183.

[15] J. Pavelka, On fuzzy logic i, ii, iii, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 25 (1979), 447-464.

[16] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Kh. Abolpour, Admissible Partition for BL- general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 15 (2018), 79-90.

[17] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Bisimulation of type 2 for BL- general fuzzy automata, Soft Computing, 23 (2019), 9843-9852.

[18] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Kh. Abolpour, Bisimulation for BL-general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems (2016).

[19] S. S. Skiena, The algorithm design manual: Text. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 1998.

[20] S. Stanimirović, L. A. Nguyen, M. Ćirić, M. Stanković. Breadth-first fuzzy bisimulations for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems, 503 (2025), 109246.

[21] S. Yu, Regular languages, in: G. Rozenberg, A. Salomaa(Eds.), Hand book of Formal Languages, vol.1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997, 41–105.

[22] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, 8 (1965), 338-353.