

Behavioral Equivalence between General Fuzzy Automata: A Functorial and BL-Algebraic Approach

Marzieh Shamsizadeh⁽¹⁾ ¹ and Khadijeh Abolpour⁽²⁾

⁽¹⁾ Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Energy and Data Sciences, Behbahan Khatam
Alania University of Technology, Behbahan, Iran

⁽²⁾ Department of Mathematics, Shi.C., Islamic Azad University, Shiraz, Iran

Received: 8 November 2025 Accepted: 1 September 2026 Published online: 23 September 2026

Abstract: This paper presents a categorical framework for modeling and analyzing the behavior of general fuzzy automata based on BL-algebras. First, a category of BL-general fuzzy automata is defined in which morphisms act as fuzzy mappings between fuzzy state sets and reconstruct the initial, transition, and output structures compositionally. Functors from the category of nondeterministic automata to this category are then introduced to model fuzzy system behavior through transition and fuzzy-output mappings. To compare the behavior of these functors, behavioral equivalence is defined using the biresiduum operator, and a family of equivalent fuzzy mappings between functors is introduced. It is proved that, whenever this family is nonempty, it has a greatest member that reconstructs the behavioral structures in a fuzzy manner. Moreover, using the notion of bisimulation between nondeterministic automata, it is shown that this relation is transferred under the behavioral functor to a fuzzy bisimulation between BL-general fuzzy automata. Consequently, the existence of a bisimulation between nondeterministic automata guarantees behavioral equivalence between their corresponding BL-general fuzzy automata.

Keywords: Behavioral equivalence, General fuzzy automata, Nondeterministic automata, Bisimulation, Categories, BL-algebras.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (Marzieh Shamsizadeh) shamsizadeh.m@bkatu.ac.ir, (Khadijeh Abolpour) kh.abolpour@iau.ac.ir

هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی عمومی: رویکردی مبتنی بر تابعگون‌ها و BL-جبرها

مرضیه شمس‌زاده^(۱) و خدیجه ابول‌پور^(۲)

^(۱) گروه ریاضی و آمار، دانشکده انرژی و علوم داده، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء (ص) بهبهان، ایران
^(۲) گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۱۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۸/۱۷

چکیده: در این مقاله، چارچوبی رسته‌ای برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار اتوماتاهای فازی عمومی مبتنی بر BL-جبرها ارائه می‌شود. ابتدا رسته‌ای از اتوماتاهای فازی عمومی BL تعریف می‌گردد که در آن ریخت‌ها به صورت نگاشت‌های فازی بین مجموعه‌های حالت فازی عمل کرده و ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی را به صورت ترکیبی بازسازی می‌کنند. سپس تابعگون‌هایی از رسته‌ی اتوماتاهای غیرقطعی به این رسته معرفی می‌شوند که رفتار فازی سیستم را در قالب نگاشت رانشی و خروجی فازی مدل‌سازی می‌کنند. برای مقایسه‌ی رفتار این تابعگون‌ها، مفهوم هم‌ارزی رفتاری بر پایه‌ی عملگر دومانده‌ای تعریف شده و مجموعه‌ای از نگاشت‌های فازی هم‌ارز بین تابعگون‌ها معرفی می‌شود. اثبات می‌شود که این مجموعه، در صورت ناتهی بودن، دارای عضو بیشینه است که ساختارهای رفتاری را به صورت فازی بازسازی می‌کند. همچنین، با توجه به مفهوم دو-شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، نشان داده می‌شود که این رابطه تحت تابعگون رفتاری به یک دو-شبیه‌سازی فازی بین اتوماتاهای فازی عمومی BL منتقل می‌شود. بر پایه‌ی این انتقال، اثبات می‌گردد که وجود دو-شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی عمومی BL حاصل از آن‌ها را تضمین می‌کند.

واژه‌های کلیدی: هم‌ارزی رفتاری، اتوماتای فازی عمومی، اتوماتا غیرقطعی، دو-شبیه‌سازی، رسته‌ها، BL-جبرها.

۱ مقدمه

مفهوم مجموعه‌های فازی نخستین بار توسط پروفیسور لطفی عسکرزاده در سال ۱۹۶۵ معرفی شد [۲۲] و به سرعت در حوزه‌های مختلف علمی از جمله هوش مصنوعی، تصمیم‌گیری، و پردازش زبان طبیعی گسترش یافت. در نظریه‌ی

^۲ نویسنده مسئول مقاله

اتوماتا، یکی از مسائل بنیادی، بررسی هم‌ارزی بین دو اتوماتای داده‌شده است؛ به عبارتی، آیا این دو سامانه رفتار مشابهی نسبت به ورودی‌ها دارند یا خیر؟ رفتار یک اتوماتا معمولاً از طریق زبانی که آن را شناسایی می‌کند توصیف می‌شود.

در مورد اتوماتاهای فازی متناهی قطعی، مسأله‌ی هم‌ارزی قابل حل است؛ اما در مورد اتوماتاهای فازی غیرقطعی، پیچیدگی محاسباتی به‌گونه‌ای است که این مسأله در دسته‌ی مسائل سخت قرار می‌گیرد [۷، ۱۹، ۲۱]. یکی از رویکردهای مؤثر برای تحلیل هم‌ارزی در این زمینه، استفاده از مفهوم شبیه‌سازی است که نخستین بار توسط میلنر^۳ [۱۳] و پارک^۴ [۱۴] معرفی شد. شبیه‌سازی نه تنها برای مقایسه‌ی رفتار اتوماتاها، بلکه برای کاهش تعداد حالت‌ها نیز کاربرد دارد. با این حال، فرآیند مینیمال‌سازی اتوماتاهای فازی غیرقطعی معمولاً نیازمند قطعی‌سازی اولیه است که خود منجر به افزایش تعداد حالت‌ها می‌شود. در سال‌های اخیر، مفهوم شبیه‌سازی در زمینه‌های مختلف اتوماتاهای فازی مورد توجه قرار گرفته است [۹، ۱۲، ۲۰] و در حوزه‌های متنوعی از علوم کامپیوتر^۵ و آنالیز برنامه‌ها^۶ به کار گرفته شده است [۲-۴، ۱۰، ۱۱].

در سال ۲۰۰۵، دوست فاطمه و کرمر^۷ [۵] مفهوم اتوماتای فازی را گسترش داده و چارچوبی عمومی برای آن ارائه کردند. این توسعه با تکیه بر منطق پایه‌ای^۸ که توسط هاجک^۹ [۸] معرفی شده بود، صورت گرفت. منطق پایه‌ای یک ساختار جبری مناسب برای مدل‌سازی استنتاج‌های فازی فراهم می‌آورد.

در ادامه، ابولپور^{۱۰} و زاهدی^{۱۱} در سال ۲۰۱۲ مفهوم اتوماتای فازی عمومی را با استفاده از BL-جبرها تعمیم داده و اتوماتاهای فازی عمومی BL را معرفی کردند. شمسی‌زاده و زاهدی [۱۷، ۱۸] مفهوم دو-شبیه‌سازی را برای این نوع اتوماتاها تعریف نمودند که امکان مقایسه‌ی دقیق‌تر رفتار سامانه‌های فازی را فراهم می‌سازد. در این مقاله، با هدف توسعه‌ی چارچوبی رسته‌ای برای تحلیل رفتار اتوماتاهای فازی عمومی مبتنی بر BL-جبرها ابتدا رسته‌ای از این اتوماتاها تعریف می‌شود و تابع‌گون‌هایی از رسته‌ی اتوماتاهای غیرقطعی به این رسته معرفی می‌گردد. سپس، برای مقایسه‌ی رفتار تابع‌گون‌ها، مجموعه‌ای از نگاشت‌های فازی هم‌ارز تعریف می‌شود که ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی را به صورت ترکیبی بازسازی می‌کنند. در ادامه، اثبات می‌شود که این مجموعه، در صورت ناتهی بودن، دارای عضو بیشینه است که تمام شروط بازسازی و تقارن فازی را ارضا می‌کند. نهایتاً، با بهره‌گیری از مفهوم دو-شبیه‌سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، نشان داده می‌شود که این رابطه تحت تابع‌گون رفتاری به یک دو-شبیه‌سازی فازی منتقل می‌شود، و بر این اساس، هم‌ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فازی عمومی BL حاصل تضمین می‌گردد.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش، مفاهیم و تعاریفی که در ادامه‌ی مقاله به آن‌ها نیاز داریم و ارایه می‌گردد. یک شبکه کامل مانده ای یک جبر [۱۵] $(L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$ است، به طوری که،

۱. $(L, \wedge, \vee, \circ, 1)$ یک شبکه کامل است که کوچکترین عضو آن $\circ$ و بزرگترین عضو آن ۱ می‌باشد،

۲. $(L, \otimes, 1)$ یک تک‌واره جابجایی است که ۱ عضو همانی آن است،

۳. $\otimes$ و $\rightarrow$ دو عمل دوتایی با خاصیت الحاقی است که برای هر $x, y, z \in L$ ، به شکل زیر می‌باشد:

$$x \otimes y \leq z \iff x \leq y \rightarrow z.$$

³Milner

⁴Park

⁵Computer science

⁶Program analysis

⁷Doostfateme and Kremer

⁸Basic logic

⁹Hajek

¹⁰Abolpour

¹¹Zahedi

اعمال $\otimes$ و $\rightarrow$ به ترتیب ضرب و مانده نامیده می‌شوند. دوتایی $(\otimes, \rightarrow)$ دوتایی الحاقی نامیده می‌شوند. همچنین برای هر $x, y \in L$ منظور از $x \otimes y$ مانده x توسط y است. یک دومانده ای در L عمل دوتایی $\leftrightarrow$ روی L است که برای هر $x, y \in L$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x).$$

اگر L یک شبکه کامل مانده‌ای باشد، پس برای هر $x, y, z \in L$ و هر $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq L$ شرایط زیر برقرار است:

$$1. \quad x \leq y \text{ نتیجه می‌دهد که } x \otimes z \leq y \otimes z,$$

$$2. \quad x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1,$$

$$3. \quad x \otimes \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \otimes y_i),$$

$$4. \quad x \otimes \bigwedge_{i \in I} y_i \leq \bigwedge_{i \in I} (x \otimes y_i),$$

$$5. \quad x \otimes y = y \otimes x,$$

$$6. \quad 1 \otimes x = x.$$

فرض کنید A و B مجموعه‌های غیرتهی باشند. یک رابطه‌ی L - فازی بین مجموعه‌های A و B (یا یک رابطه L - فازی از A به B) یک تابع از $A \times B$ به L است، یا بعبارت دیگر به آن، زیرمجموعه‌های L - فازی $A \times B$ گفته می‌شود. مجموعه همه‌ی رابطه‌های L - فازی از A به B با نماد $\mathcal{R}(A, B)$ نشان داده می‌شود. برای مجموعه‌های غیرتهی A, B, C و رابطه‌های L - فازی $\varphi \in \mathcal{R}(A, B)$ و $\psi \in \mathcal{R}(B, C)$ ، ترکیب آنها، $\varphi \circ \psi$ ، یک رابطه فازی $\mathcal{R}(A, C)$ است که برای هر $a \in A$ و $c \in C$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\varphi \circ \psi)(a, c) = \bigvee_{b \in B} \varphi(a, b) \otimes \psi(b, c).$$

تعریف ۱.۲ [۶] برای هر $L = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, 1)$ ، یک رسته ζ شامل مجموعه‌ای از اشیاء است که اشیاء ζ نامیده می‌شود و با نماد $object(\zeta)$ نشان داده می‌شود. برای هر جفت $A, B \in object(\zeta)$ ، مجموعه‌ی همه‌ی ریخت‌های A از B منوط به اینکه در شرایط (i) و (ii) صدق کند با نماد $Mor(\zeta)$ در رسته ζ نشان داده می‌شود. یک ریخت مانند α که $\alpha \in Mor_L(A, B) \subseteq Mor(\zeta)$ عبارت است از یک ریخت مانند $\alpha : A \times B \rightarrow L$ که برای سادگی با نماد $\alpha : A \rightarrow B$ نشان داده می‌شود.

(i) برای هر سه شی $A, B, C \in object(\zeta)$ ، یک نگاشت وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C), \\ (A \longrightarrow B, B \longrightarrow C) \longmapsto A \longrightarrow C.$$

برای هر $A, B, C, D \in object(\zeta)$ ، و هر ریخت $\alpha \in Mor(A, B)$ ، $\beta \in Mor(B, C)$ و $\gamma \in Mor(C, D)$ ، ترکیب آنها را به صورت زیر داریم:

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma : A \rightarrow D.$$

برای دو ریخت $\alpha \in Mor(A, B)$ ، $\beta \in Mor(B, C)$ ، برای هر $a \in A$ ، $c \in C$ ، ترکیب $\alpha \circ \beta$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \circ \beta(a, c) = \bigvee_{b \in B} \alpha(a, b) \otimes \beta(b, c).$$

(ii) برای هر شیء A از ζ ، مجموعه $Mor(A, A)$ شامل یک ریخت id_A است که همانی A نامیده می‌شود که در ویژگی زیر صدق می‌کند:
برای هر شیء $B \in object(\zeta)$ و برای هر $\alpha \in Mor(A, B)$ و $\beta \in Mor(B, A)$ ، داریم: $id_A \circ \alpha = \alpha$ ، $\beta \circ id_B = \beta$.

تعریف ۲.۲. [۶] یک سیستم (Q, δ) یک اتوماتای غیرقطعی (NDA) روی یک تک‌واره $(X, *)$ نامیده می‌شود، اگر Q یک مجموعه از حالت‌ها باشد و $\delta : Q \times X \rightarrow 2^Q$ یک انتقال غیرقطعی است، که در آن:

$$1. \delta(q, 1_X) = \{q\}, q \in Q$$

$$2. \delta(q, x * y) = \bigcup_{p \in \delta(q, x)} \delta(p, y), q \in Q, x, y \in X$$

یک NDA روی یک تک‌واره $(X, *)$ با حالت‌های آغازین و پایانی یک سیستم به صورت (Q, δ, I, T) است به طوری که (Q, δ) یک NDA روی X و $I, T \subseteq Q$ است. رسته NDA ها را با نماد NA_m نمایش می‌دهیم. یک ریخت در NA_m به صورت

$$\alpha : (Q_1, \delta_1) \rightarrow (Q_2, \delta_2),$$

تعریف می‌شود، یعنی $\alpha : Q_1 \rightarrow Q_2$ یک نگاشت است که برای هر $q \in Q_1$ و $x \in X$ داریم:

$$\alpha(\bigcup_{q' \in Q_1, \alpha(q') = \alpha(q)} \delta_1(q', x)) = \delta_2(\alpha(q), x) \cap \alpha(Q_1).$$

رسته NDA ها با حالت‌های آغازین و پایانی را با نماد NA_m^* نمایش می‌دهیم. یک ریخت $\alpha : (Q_1, \delta_1, I_1, T_1) \rightarrow (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$1. \alpha \in Mor((Q_1, \delta_1), (Q_2, \delta_2))$$

$$2. \alpha(I_1) = I_2 \cap \alpha(Q_1), \alpha(T_1) = T_2 \cap \alpha(Q_1)$$

تعریف ۳.۲. [۶] یک تابع‌گون $F : A \rightarrow B$ یک نگاشت حافظ ساختار بین رسته‌ها می‌باشد. تابع‌گون به وسیله دو تابع $C \rightarrow F(C)$ روی اشیاء و

$$(f : C \rightarrow D) \rightarrow (F(f) : F(C) \rightarrow F(D)),$$

روی نگاشت‌ها که در اصول زیر صدق می‌کند، تعریف می‌شود:

$$1. \text{ برای هر } f, g \in Mor(A), F(fg) = F(f)F(g)$$

$$2. \text{ و برای هر } C \text{ متعلق به شیء } (A), F(I_C) = I_{F(C)}$$

تعریف ۴.۲. [۸] یک BL-جبر^{۱۲}، یک جبر $(L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \circ, 1)$ با چهار عمل $\wedge, \vee, *, \rightarrow$ و دو ثابت $1, \circ$ می‌باشد به قسمی که

$$1. (L, \wedge, \vee, \circ, 1) \text{ یک شبکه‌ی کراندار،}$$

$$2. (L, *, 1) \text{ یک تک‌واره جابجایی،}$$

$$3. * \text{ و } \rightarrow \text{ یک جفت الحاقی است، یعنی } x \leq y \rightarrow z \text{ اگر و فقط اگر } x * y \leq z \text{ که در آن، } x, y, z \in L$$

$$4. x \wedge y = x * (x \rightarrow y) \text{ و}$$

$$5. (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$$

تعریف ۵.۲. [۱] فرض کنید $L = (L, \vee, \wedge, \circ, 1)$ یک شبکه‌ی کامل کراندار،

$$\tilde{F} = (Q, X, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2),$$

یک اتوماتای فازی عمومی و $(P(Q), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, Q)$ ، یک BL-جبر^{۱۳} باشد. اتوماتای فازی عمومی BL^{۱۳} یک ماشین ده‌تایی به صورت

$$\tilde{F}_l = (\bar{Q}, X, \tilde{R} = (\{q_\circ\}, \mu^{t_\circ}(\{q_\circ\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_1, F_2),$$

است که

¹²BL-algebra

¹³BL-general fuzzy automata

(i) $Q, \bar{Q} = P(Q)$ یک مجموعه متناهی و $\bar{Q}$ مجموعه توانی Q است،

(ii) X مجموعه متناهی از الفبای ورودی،

(iii) $\tilde{R}$ مجموعه ای از حالت های آغازین فازی، که به صورت $\tilde{R} = (\{q_0\}, \mu^{t_0}(\{q_0\}))$ تعریف می شود، که در آن $\mu^{t_0}(\{q_0\})$ درجه ی عضویت حالت آغازین را در زمان شروع نشان می دهد،

(iv) $\bar{Z}$ مجموعه متناهی از الفبای خروجی، $\bar{Z}$ مجموعه توانی Z است،

(v) $\omega_l: \bar{Q} \rightarrow \bar{Z}$ تابع خروجی تعریف شده به صورت $\omega_l(Q_i) = \{\omega(q) | q \in Q_i\}$

(vi) $\delta_l: \bar{Q} \times X \times \bar{Q} \rightarrow L$ تابع انتقال فازی است که برای هر $Q_i, Q_j \in P(Q)$ و $a \in X$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_l(\{p\}, a, \{q\}) = \delta(p, a, q),$$

و

$$\delta_l(Q_i, a, Q_j) = \bigvee_{q_i \in Q_i, q_j \in Q_j} \delta(q_i, a, q_j),$$

(vii) $f_l: \bar{Q} \times X \rightarrow \bar{Q}$ تابع حالت بعدی است که به صورت:

$$f_l(Q_i, a) = \bigcup_{q_i \in Q_i} \{q_j | \delta(q_i, a, q_j) \in \Delta\},$$

(viii) $\tilde{\delta}_l: (\bar{Q} \times L) \times X \times \bar{Q} \rightarrow L$ تابع انتقال تکمیلی تعریف شده به صورت:

$$\tilde{\delta}_l((Q_i, \mu^t(Q_i)), a, Q_j) = F_1(\mu^t(Q_i), \delta_l(Q_i, a, Q_j)),$$

که در آن $\mu^t(Q)$ درجه ی عضویت حالت Q را در زمان t نشان می دهد.

(ix) $F_1: L \times L \rightarrow L$ تابع تخصیص عضویت که مقدار عضویت حالت مقصد را بر اساس درجه ی عضویت حالت مبدأ و وزن انتقال محاسبه می کند.

(x) $F_2: L^* \rightarrow L$ تابع رفع چندعضویتی که برای تعیین یک مقدار عضویت واحد از مجموعه ی مقادیر عضویت چندگانه به کار می رود.

تعریف ۶.۲. [۱] اتوماتای فازی عمومی BL

$$\tilde{F}_l = (\bar{Q}, X, \tilde{R} = (\{q_0\}, \mu^{t_0}(\{q_0\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_1, F_2),$$

را در نظر بگیرید. $\rho: X^* \rightarrow \bar{Q}$ نگاشت رانشی اتوماتای فازی عمومی BL، $\tilde{F}_l$ است که به صورت بازگشتی زیر تعریف می شود: $\rho(\Lambda) = \{q_0\}$ و برای هر $a_1, \dots, a_n \in X$

$$\rho(a_1 a_2 \dots a_n) = Q_{i_n}, \rho(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) = f_l(Q_{i_n}, a_{n+1}),$$

که $(Q_{i_n}, \mu^{t_0+n}(Q_{i_n})) \in \bar{Q}_{act}(a_1 a_2 \dots a_n)$. نگاشت $\beta = \omega_l \circ \rho: X^* \rightarrow \bar{Z}$ رفتار $\tilde{F}_l$ می باشد.

در ادامه این مقاله، همواره L برای نمایش شبکه کامل کراندار به کار می رود.

تعریف ۷.۲. [۱۶] فرض کنید $\tilde{F}_l = (\bar{Q}, X, (\{q_0\}, \mu^{t_0}(\{q_0\})), \bar{Z}, \omega_l, \delta_l, f_l, \tilde{\delta}_l, F_1, F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی BL باشد. رفتار $\tilde{F}_l$ یک نگاشت $\beta = \omega_l \circ \rho: \mathcal{L}(\tilde{F}_l) \rightarrow \bar{Z}$ است به طوری که:

$$\mathcal{L}(\tilde{F}_l) = \{x \in X^* | \tilde{\delta}_l^*((\{q_0\}, \mu^{t_0}(\{q_0\})), x, P) > 0, P \in \bar{Q}\}.$$

تعریف ۸.۲. [۱۷] فرض کنید $\tilde{F}_{li}, i = 1, 2$ دو اتوماتای فازی عمومی BL باشد. رابطه‌ی $\approx$ بین $\bar{Q}_1$ و $\bar{Q}_2$ را یک دو-شبه‌سازی بین $\tilde{F}_{l1}$ و $\tilde{F}_{l2}$ می‌نامیم اگر برای $Q' \in \bar{Q}_1$ و $Q'' \in \bar{Q}_2$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$1. \{q_{\circ 1}\} \approx \{q_{\circ 2}\}$$

$$2. Q' \approx Q'' \text{ نتیجه دهد:}$$

$$(\forall \alpha \in L)(Q'_1 \in \bar{Q}_1)(a \in X)(\delta_{l1}(Q'_1, a, Q'_1) = \alpha$$

$$\implies (\exists Q'_2 \in \bar{Q}_2)\delta_{l2}(Q'', a, Q'_2) \geq \alpha, Q'_1 \approx Q'_2 \text{ و برعکس},$$

$$3. Q' \approx Q'' \text{ نتیجه دهد } \omega_{l1}(Q') = \omega_{l2}(Q'').$$

۳ رسته‌ای از اتوماتای فازی عمومی BL

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید ζ_G یک رسته از اتوماتای فازی عمومی BL باشد. یک ریخت بین

$$\tilde{F}_{rl1} = (\bar{Q}_1, X, \tilde{R}_1 = (\{q_{\circ 1}\}, \mu^{t^*}(\{q_{\circ 1}\})), \bar{Z}, \omega_{l1}, \delta_{rl1}, f_{l1}, \tilde{\delta}_{rl1}, F_1, F_2),$$

و

$$\tilde{F}_{rl2} = (\bar{Q}_2, X, \tilde{R}_2 = (\{q_{\circ 2}\}, \mu^{t^*}(\{q_{\circ 2}\})), \bar{Z}, \omega_{l2}, \delta_{rl2}, f_{l2}, \tilde{\delta}_{rl2}, F_1, F_2),$$

یک نگاشت به صورت $\alpha: \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2 \rightarrow L$ است به طوری که در نمودارهای زیر صدق کند:

$$\begin{array}{ccc} \bar{Q}_1 \times X^* \times \bar{Q}_1 & \xrightarrow{\alpha \times \text{id}_{X^*} \times \alpha} & \bar{Q}_2 \times X^* \times \bar{Q}_2 \\ & \searrow \delta_{rl1} & \swarrow \delta_{rl2} \\ & L & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\bar{Q}_1 \times L) \times X^* \times \bar{Q}_1 & \xrightarrow{(\alpha \times \text{id}_L) \times \text{id}_{X^*} \times \alpha} & (\bar{Q}_2 \times L) \times X^* \times \bar{Q}_2 \\ & \searrow \tilde{\delta}_{rl1} & \swarrow \tilde{\delta}_{rl2} \\ & L & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{Q}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \bar{Q}_2 \\ & \searrow \omega_{l1} & \swarrow \omega_{l2} \\ & Z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{q_{\circ 1}\} & \xrightarrow{\alpha} & \{q_{\circ 2}\} \\ & \searrow \tilde{R}_1 & \swarrow \tilde{R}_2 \\ & L & \end{array}$$

پس، برای هر $Q_2, P_2 \in \bar{Q}_2$ و $x \in X^*$ داریم:

(i) مقدار عضویت اولیه در اتوماتای دوم از طریق α قابل بازسازی باشد:

$$\mu^{t^*}(\{q_{\circ 2}\}) = \mu^{t^*}(\{q_{\circ 1}\}) \otimes \alpha(\{q_{\circ 1}\}, \{q_{\circ 2}\}),$$

(ii) انتقال تکمیلی در اتوماتای دوم از طریق انتقال‌های اتوماتای اول و نگاشت α قابل تقریب باشد:

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}_{rl_2}((Q_2, \mu^{t^*}(Q_2)), x, P_2) \\ &= \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \{ \tilde{\delta}_{rl_1}((Q_1, \mu^{t^*}(Q_1)), x, P_1) \otimes \alpha(Q_1, Q_2) \otimes \alpha(P_1, P_2) \}, \end{aligned}$$

(iii) تابع خروجی در اتوماتای دوم از طریق خروجی‌های اتوماتای اول و نگاشت α قابل تقریب باشد:

$$\omega_{l_2}(Q_2) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_1 \\ \alpha(P, Q_2) \neq \circ}} \omega_{l_1}(P).$$

مثال ۲.۳. دو اتوماتای فازی عمومی BL زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{F}_{l_1} = (\bar{Q}_1, X, \tilde{R}_1, \bar{Z}, \omega_{l_1}, \delta_{l_1}, f_{l_1}, \tilde{\delta}_{l_1}, F_1, F_2),$$

و

$$\tilde{F}_{l_2} = (\bar{Q}_2, X, \tilde{R}_2, \bar{Z}, \omega_{l_2}, \delta_{l_2}, f_{l_2}, \tilde{\delta}_{l_2}, F_1, F_2),$$

که در آن $L = \{\circ, \frac{1}{2}, 1\}$ ، $\otimes = \min$ ، $F_1(\mu, \delta) = \min(\mu, \delta)$ و $F_2 = \max$. همچنین، $Q_1 = \{q_\circ, q_1\}$ ، $Q_2 = \{p_\circ, p_1\}$ ،

$$\bar{Q}_1 = P(Q_1) = \{\emptyset, \{q_\circ\}, \{q_1\}, \{q_\circ, q_1\}\},$$

$$\bar{Q}_2 = P(Q_2) = \{\emptyset, \{p_\circ\}, \{p_1\}, \{p_\circ, p_1\}\},$$

بنابراین، $\tilde{R}_2 = (\{p_\circ\}, 1)$ ، $\tilde{R}_1 = (\{q_\circ\}, 1)$ ، $\bar{Z} = P(Z) = \{\emptyset, \{z\}\}$ ، $Z = \{z\}$ ، $X = \{a\}$

$$\mu^{t^*}(\{q_\circ\}) = 1, \quad \mu^{t^*}(\{p_\circ\}) = 1,$$

و برای سایر حالت‌ها، $\mu^{t^*} = \circ$ در نظر گرفته می‌شود. توابع انتقال در سطح حالت‌های منفرد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_1(q_\circ, a, q_1) = 1, \quad \delta_2(p_\circ, a, p_1) = 1,$$

و سایر انتقال‌ها در هر دو اتوماتا دارای وزن صفر هستند. همچنین،

$$\omega_1(q_\circ) = \omega_2(p_\circ) = \emptyset, \quad \omega_1(q_1) = \omega_2(p_1) = \{z\}.$$

از تعریف ۵.۲، برای زیرمجموعه‌ها داریم:

$$\delta_{l_1}(\{q_\circ\}, a, \{q_1\}) = 1, \quad \delta_{l_2}(\{p_\circ\}, a, \{p_1\}) = 1,$$

$$f_{l_1}(\{q_\circ\}, a) = \{q_1\}, \quad f_{l_2}(\{p_\circ\}, a) = \{p_1\},$$

و

$$\tilde{\delta}_{l_1}((\{q_\circ\}, 1), a, \{q_1\}) = F_1(1, \delta_{l_1}(\{q_\circ\}, a, \{q_1\})) = F_1(1, 1) = 1,$$

$$\tilde{\delta}_{l_2}((\{p_\circ\}, 1), a, \{p_1\}) = F_1(1, \delta_{l_2}(\{p_\circ\}, a, \{p_1\})) = F_1(1, 1) = 1.$$

اکنون نگاشت فازی

$$\alpha : \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2 \longrightarrow L$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\{q_\circ\}, \{p_\circ\}) = 1, \quad \alpha(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1,$$

و برای سایر زوج‌های مرتب، $\alpha(A, B) = 0$. این تعریف به‌وضوح متقارن است، زیرا اگر $\alpha(A, B) = 1$ ، آنگاه $\alpha(B, A) = 1$ نیز هست، و اگر $\alpha(A, B) = 0$ ، آنگاه $\alpha(B, A) = 0$ نیز می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که α شرایط تعریف ریخت را ارضا می‌کند.

شرط (i): برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ باید داشته باشیم:

$$\mu^{t^*}(Q_2) = \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu^{t^*}(Q_1) \otimes \alpha(Q_1, Q_2).$$

برای $Q_2 = \{p_0\}$ داریم:

$$\mu^{t^*}(\{p_0\}) = 1,$$

و

$$\bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu^{t^*}(Q_1) \otimes \alpha(Q_1, \{p_0\}) = \mu^{t^*}(\{q_0\}) \otimes \alpha(\{q_0\}, \{p_0\}) = 1 \otimes 1 = 1.$$

برای $Q_2 = \{p_1\}$ ، از آنجا که $\mu^{t^*}(\{p_1\}) = 0$ و برای هر Q_1 ، یا $\mu^{t^*}(Q_1) = 0$ یا $\alpha(Q_1, \{p_1\}) = 0$ داریم:

$$\bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu^{t^*}(Q_1) \otimes \alpha(Q_1, \{p_1\}) = 0.$$

برای $Q_2 = \emptyset$ و $Q_2 = \{p_0, p_1\}$ نیز به‌طور مشابه، چون $\mu^{t^*}(Q_2) = 0$ ، شرط به‌صورت بدیهی برقرار است. بنابراین شرط (i) برای همه $Q_2 \in \bar{Q}_2$ برقرار است.

شرط (ii): برای هر $Q_2, P_2 \in \bar{Q}_2$ و هر $x \in X$ باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{l^2}((Q_2, \mu^{t^*}(Q_2)), x, P_2) &= \bigvee_{Q_1, P_1 \in \bar{Q}_1} \tilde{\delta}_{l^1}((Q_1, \mu^{t^*}(Q_1)), x, P_1) \\ &\quad \otimes \alpha(Q_1, Q_2) \otimes \alpha(P_1, P_2). \end{aligned}$$

برای $Q_2 = \{p_0\}$ ، $P_2 = \{p_1\}$ و $x = a$ داریم:

$$\tilde{\delta}_{l^2}((\{p_0\}, 1), a, \{p_1\}) = 1.$$

سمت راست:

$$\tilde{\delta}_{l^1}((\{q_0\}, 1), a, \{q_1\}) \otimes \alpha(\{q_0\}, \{p_0\}) \otimes \alpha(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1.$$

برای سایر Q_2, P_2 ، یا $\tilde{\delta}_{l^2} = 0$ ، یا $\alpha = 0$ ، بنابراین شرط به‌صورت بدیهی برقرار است. پس شرط (ii) برای همه حالات برقرار است.

شرط (iii): برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ باید داشته باشیم:

$$\omega_{l^2}(Q_2) = \bigcup_{\substack{Q_1 \in \bar{Q}_1 \\ \alpha(Q_1, Q_2) > 0}} \omega_{l^1}(Q_1).$$

برای $Q_2 = \{p_1\}$ داریم $\omega_{l^1}(\{q_1\}) = \{z\}$ و $\alpha(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1 > 0$ ، بنابراین:

$$\omega_{l^2}(\{p_1\}) = \{z\}.$$

برای $Q_2 = \{p_0\}$ داریم $\omega_{l^1}(\{q_0\}) = \emptyset$ و $\alpha(\{q_0\}, \{p_0\}) = 1 > 0$ ، بنابراین:

$$\omega_{l^2}(\{p_0\}) = \emptyset.$$

برای $Q_2 = \emptyset$ و $Q_2 = \{p_0, p_1\}$ ، از آنجا که $\omega_{l_2}(Q_2) = \emptyset$ و هیچ Q_1 با $\alpha(Q_1, Q_2) > 0$ وجود ندارد، شرط به صورت بدیهی برقرار است.

$Q_1, Q_2 \in \bar{Q}_1$ ، از تعریف α داریم:

$$\alpha(Q_1, Q_2) = \alpha(Q_2, Q_1),$$

زیرا تنها مقادیر غیر صفر $\alpha(\{q_0\}, \{p_0\}) = 1$ و $\alpha(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1$ هستند که متقارن اند، و سایر مقادیر صفر هستند که خود متقارن اند. بنابراین:

$$\alpha(Q_1, Q_2) \leftrightarrow \alpha(Q_2, Q_1) = 1.$$

بنابراین، نگاشت فازی α تمام شرایط تعریف ریخت را ارضا می کند و در نتیجه یک ریخت بین دو اتوماتای فازی عمومی BL است.

قضیه ۳.۳. تابعگون $F : NA_m^\circ \rightarrow \zeta_G$ وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $A = (Q_1, \delta_1, I_1, T_1)$ و $B = (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$ دوشیء از NA_m° باشند و $\alpha \in Mor(A, B) \subseteq Mor(NA_m)$ یک ریخت (تابع) باشد. بنابراین:

$$\alpha(I_1) = I_2 \cap \alpha(Q_1), \quad \alpha(T_1) = T_2 \cap \alpha(Q_1),$$

و

$$\alpha\left(\bigcup_{\alpha(r)=\alpha(p)} \delta_1(r, x)\right) = \delta_2(\alpha(p), x) \cap \alpha(Q_1).$$

تعریف می کنیم:

$$F(A) = (\bar{Q}_1, X, \tilde{R}_1 = (\{q_{01}\}, \mu^{t_0}(\{q_{01}\})), \bar{Z}, \omega_{l_1}, \delta_{rl_1}, f_{l_1}, \tilde{\delta}_{rl_1}, F_1, F_2),$$

$$F(B) = (\bar{Q}_2, X, \tilde{R}_2 = (\{q_{02}\}, \mu^{t_0}(\{q_{02}\})), \bar{Z}, \omega_{l_2}, \delta_{rl_2}, f_{l_2}, \tilde{\delta}_{rl_2}, F_1, F_2),$$

که در آن $x \in X^*$ ، $Q' \in \bar{Q}_1$ هر برای هر $\mu^{t_0}(\{q_{01}\}) = \mu^{t_0}(\{q_{02}\}) = 1$ ، $\{q_{02}\} \cap I_2 \neq \emptyset$ ، $\{q_{01}\} \cap I_1 \neq \emptyset$ و $z \in \bar{Z}$:

$$\tilde{\delta}_{l_1}((\{q_{01}\}, \mu^{t_0}(\{q_{01}\})), x, Q') = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Q' \cap \delta_1(q_{01}, x) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{در غیر این صورت,} \end{cases}$$

$$\omega_{l_1}(Q') = \begin{cases} \{z\} & \text{اگر } Q' \cap T_1 \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

به طور مشابه برای $F(B)$:

$$\tilde{\delta}_{l_2}((\{q_{02}\}, \mu^{t_0}(\{q_{02}\})), x, Q') = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Q' \cap \delta_2(q_{02}, x) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{در غیر این صورت,} \end{cases}$$

$$\omega_{l_2}(Q') = \begin{cases} \{z\} & \text{اگر } Q' \cap T_2 \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

اکنون، برای هر $Q \in \bar{Q}_2$ و $P \in \bar{Q}_1$ ، تعریف می کنیم:

$$F(\alpha)(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \alpha(P) = Q, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که $F(\alpha) \in Mor_L(F(A), F(B))$ ؛ یعنی سه شرط زیر برقرارند:

شرط (۱):

$$\mu^{t*}(\{q_{\circ 2}\}) = \mu^{t*}(\{q_{\circ 1}\}) \otimes F(\alpha)(\{q_{\circ 1}\}, \{q_{\circ 2}\}).$$

از آنجا که $\mu^{t*}(\{q_{\circ 1}\}) = \mu^{t*}(\{q_{\circ 2}\}) = 1$ (چون α یک ریخت است و حالت آغازین را به حالت آغازین نگاشت می‌کند)، داریم $F(\alpha)(\{q_{\circ 1}\}, \{q_{\circ 2}\}) = 1$. بنابراین:

$$1 \otimes 1 = 1 = \mu^{t*}(\{q_{\circ 2}\}).$$

شرط (۲):

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{l2}((\{q_{\circ 2}\}, \mu^{t*}(\{q_{\circ 2}\})), x, Q') &= \bigvee_{P' \in \bar{Q}_1} \tilde{\delta}_{l1}((\{q_{\circ 1}\}, \mu^{t*}(\{q_{\circ 1}\})), x, P') \\ &\otimes F(\alpha)(\{q_{\circ 1}\}, \{q_{\circ 2}\}) \otimes F(\alpha)(P', Q'). \end{aligned}$$

از آنجا که $F(\alpha)(\{q_{\circ 1}\}, \{q_{\circ 2}\}) = 1$ ، سمت راست به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\bigvee_{P' \in \bar{Q}_1} \tilde{\delta}_{l1}((\{q_{\circ 1}\}, \mu^{t*}(\{q_{\circ 1}\})), x, P') \otimes F(\alpha)(P', Q').$$

حال، اگر $\tilde{\delta}_{l2}((\{q_{\circ 2}\}, \mu^{t*}(\{q_{\circ 2}\})), x, Q') = 1$ ، آنگاه $Q' \cap \delta_2(q_{\circ 2}, x) \neq \emptyset$. از آنجا که α یک ریخت است، داریم:

$$\alpha(\delta_1(q_{\circ 1}, x)) = \delta_2(\alpha(q_{\circ 1}), x) \cap \alpha(Q_1) = \delta_2(q_{\circ 2}, x) \cap \alpha(Q_1).$$

بنابراین، اگر $q' \in Q' \cap \delta_2(q_{\circ 2}, x)$ ، آنگاه یک $p' \in \delta_1(q_{\circ 1}, x)$ وجود دارد به طوری که $\alpha(p') = q'$ و در نتیجه $\alpha(P') = Q'$ برای $P' = \delta_1(q_{\circ 1}, x)$. پس $F(\alpha)(P', Q') = 1$ و $\tilde{\delta}_{l1}((\{q_{\circ 1}\}, \mu^{t*}(\{q_{\circ 1}\})), x, P') = 1$ ، که نشان می‌دهد سمت راست برابر ۱ است. عکس این استدلال نیز به طور مشابه برقرار است.

شرط (۳):

$$\omega_{l2}(Q) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_1 \\ F(\alpha)(P, Q) = 1}} \omega_{l1}(P).$$

اگر $\omega_{l2}(Q) = \{z\}$ ، آنگاه $Q \cap T_2 \neq \emptyset$ ، و چون $\alpha(T_1) = T_2 \cap \alpha(Q_1)$ ، یک $P \in \bar{Q}_1$ با $\alpha(P) = Q$ و $P \cap T_1 \neq \emptyset$ وجود دارد، که نتیجه می‌دهد $\omega_{l1}(P) = \{z\}$. بنابراین $\omega_{l1}(P) = \{z\} \subseteq \bigcup_{F(\alpha)(P, Q) = 1} \omega_{l1}(P)$. عکس این مطلب نیز به طور مشابه برقرار است.

برای هر $A \in NA_m^\circ$ ، داریم $F(id_A) = id_{F(A)}$ ، زیرا $id_A(P) = P$ و لذا $F(id_A)(P, Q) = 1$ اگر و فقط اگر $P = Q$ ، که دقیقاً تعریف $id_{F(A)}$ است. همچنین برای هر $\alpha \in Mor(A, B)$ و $\beta \in Mor(B, C)$ ، از تعریف $F(\alpha)$ و $F(\beta)$ و ترکیب ریخت‌ها در ζ_G ، به سادگی نشان داده می‌شود که $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$. بنابراین F یک تابع‌گون است. $\square$

مثال ۴.۳. فرض کنید $L = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ، $\otimes = \min$ ، $F_1(\mu, \delta) = \min(\mu, \delta)$ و $F_2 = \max$. فرض کنید $A = (Q_1, \delta_1, I_1, T_1)$ و $B = (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$ دو اتوماتای غیرقطعی با یک حالت آغازین باشند، که در آن:

$$Q_1 = \{q_{\circ}, q_1\}, \quad Q_2 = \{p_{\circ}, p_1\},$$

$$I_1 = \{q_{\circ}\}, \quad I_2 = \{p_{\circ}\},$$

$$T_1 = \{q_1\}, \quad T_2 = \{p_1\},$$

$$X = \{a\}, \quad Z = \{z\}.$$

مجموعه های توانی به صورت زیر هستند:

$$\bar{Q}_1 = P(Q_1) = \{\emptyset, \{q_\circ\}, \{q_1\}, \{q_\circ, q_1\}\},$$

$$\bar{Q}_2 = P(Q_2) = \{\emptyset, \{p_\circ\}, \{p_1\}, \{p_\circ, p_1\}\},$$

$$\bar{Z} = P(Z) = \{\emptyset, \{z\}\}.$$

توابع انتقال در سطح حالت های منفرد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\delta_1(q_\circ, a) = \{q_1\}, \quad \delta_2(p_\circ, a) = \{p_1\},$$

و برای سایر حالت ها، $\delta_1(q, a) = \emptyset$ و $\delta_2(p, a) = \emptyset$. توابع خروجی در سطح حالت های منفرد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\omega_1(q_\circ) = \emptyset, \quad \omega_1(q_1) = \{z\},$$

$$\omega_2(p_\circ) = \emptyset, \quad \omega_2(p_1) = \{z\}.$$

ریخت $\alpha \in Mor(A, B)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\alpha(q_\circ) = p_\circ, \quad \alpha(q_1) = p_1.$$

تعریف α را به صورت طبیعی به زیرمجموعه ها تعمیم می دهیم: برای هر $P \subseteq Q_1$,

$$\alpha(P) = \{\alpha(p) \mid p \in P\}.$$

به راحتی می توان بررسی کرد که α یک ریخت است، زیرا:

$$\alpha(I_1) = \alpha(\{q_\circ\}) = \{p_\circ\} = I_2 \cap \alpha(Q_1),$$

$$\alpha(T_1) = \alpha(\{q_1\}) = \{p_1\} = T_2 \cap \alpha(Q_1),$$

و

$$\alpha(\delta_1(q_\circ, a)) = \alpha(\{q_1\}) = \{p_1\} = \delta_2(\alpha(q_\circ), a) \cap \alpha(Q_1).$$

اکنون، تابع گون F را روی این اشیاء اعمال می کنیم. طبق تعریف، داریم:

$$F(A) = (\bar{Q}_1, X, \tilde{R}_1, \bar{Z}, \omega_{l1}, \delta_{rl1}, f_{l1}, \tilde{\delta}_{rl1}, F_1, F_2),$$

که در آن $\tilde{R}_1 = (\{q_\circ\}, 1)$ ، و برای هر $Q' \in \bar{Q}_1$ ، طبق تعریف ۵.۲:

$$\omega_{l1}(Q') = \{\omega_1(q) \mid q \in Q'\}.$$

بنابراین،

$$\omega_{l1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \omega_{l1}(\{q_\circ\}) = \emptyset, \quad \omega_{l1}(\{q_1\}) = \{z\}, \quad \omega_{l1}(\{q_\circ, q_1\}) = \{z\}.$$

همچنین، برای هر $Q' \in \bar{Q}_1$ و $x \in X^*$:

$$\tilde{\delta}_{l1}((\{q_\circ\}, 1), x, Q') = \begin{cases} 1 & \text{if } Q' \cap \delta_1(q_\circ, x) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

از آنجا که $\delta_1(q_\circ, a) = \{q_1\}$ داریم:

$$\tilde{\delta}_{l1}((\{q_\circ\}, 1), a, \{q_1\}) = F_1(1, \delta_{l1}(\{q_\circ\}, a, \{q_1\})) = F_1(1, 1) = 1,$$

و برای سایر Q' ، مقدار آن صفر است. به‌طور مشابه، $F(B)$ نیز تعریف می‌شود:

$$\omega_{l_2}(\emptyset) = \emptyset, \quad \omega_{l_2}(\{p_\circ\}) = \emptyset, \quad \omega_{l_2}(\{p_1\}) = \{z\}, \quad \omega_{l_2}(\{p_\circ, p_1\}) = \{z\},$$

و

$$\tilde{\delta}_{l_2}((\{p_\circ\}, 1), a, \{p_1\}) = F_1(1, \delta_{l_2}(\{p_\circ\}, a, \{p_1\})) = F_1(1, 1) = 1,$$

و برای سایر Q' ، مقدار آن صفر است. حال، ریخت $F(\alpha) : F(A) \rightarrow F(B)$ را مطابق تعریف داریم:

$$F(\alpha)(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha(P) = Q, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

بنابراین، مقادیر غیر صفر $F(\alpha)$ فقط برای زوج‌های زیر هستند:

$$\begin{aligned} F(\alpha)(\emptyset, \emptyset) &= 1, & F(\alpha)(\{q_\circ\}, \{p_\circ\}) &= 1, \\ F(\alpha)(\{q_1\}, \{p_1\}) &= 1, & F(\alpha)(\{q_\circ, q_1\}, \{p_\circ, p_1\}) &= 1. \end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم که $F(\alpha)$ یک ریخت در ζ_G است.

شرط (۱): برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ باید داشته باشیم:

$$\mu^{t_\circ}(Q_2) = \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu^{t_\circ}(Q_1) \otimes F(\alpha)(Q_1, Q_2).$$

از آنجا که تنها حالت آغازین $\{q_\circ\}$ دارای $\mu^{t_\circ} = 1$ است و $\mu^{t_\circ}(\{p_\circ\}) = 1$ برای $Q_2 = \{p_\circ\}$ داریم:

$$\mu^{t_\circ}(\{p_\circ\}) = 1,$$

و

$$\mu^{t_\circ}(\{q_\circ\}) \otimes F(\alpha)(\{q_\circ\}, \{p_\circ\}) = 1 \otimes 1 = 1.$$

برای سایر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ ، یا $\mu^{t_\circ}(Q_2) = 0$ یا $F(\alpha) = 0$ ، بنابراین شرط به‌صورت بدیهی برقرار است.

شرط (۲): برای هر $Q_2, P_2 \in \bar{Q}_2$ و هر $x \in X$ باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{l_2}((Q_2, \mu^{t_\circ}(Q_2)), x, P_2) &= \bigvee_{Q_1, P_1 \in \bar{Q}_1} \tilde{\delta}_{l_1}((Q_1, \mu^{t_\circ}(Q_1)), x, P_1) \\ &\quad \otimes F(\alpha)(Q_1, Q_2) \otimes F(\alpha)(P_1, P_2). \end{aligned}$$

برای $Q_2 = \{p_\circ\}$ ، $P_2 = \{p_1\}$ و $x = a$ داریم:

$$\tilde{\delta}_{l_2}((\{p_\circ\}, 1), a, \{p_1\}) = 1.$$

سمت راست:

$$\tilde{\delta}_{l_1}((\{q_\circ\}, 1), a, \{q_1\}) \otimes F(\alpha)(\{q_\circ\}, \{p_\circ\}) \otimes F(\alpha)(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1.$$

برای سایر $Q_2, P_2 \in \bar{Q}_2$ ، یا $\tilde{\delta}_{l_2} = 0$ ، یا $\mu^{t_\circ} = 0$ ، یا $F(\alpha) = 0$ ، بنابراین شرط به‌صورت بدیهی برقرار است.

شرط (۳): برای هر $Q \in \bar{Q}_2$ باید داشته باشیم:

$$\omega_{l_2}(Q) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_1 \\ F(\alpha)(P, Q) = 1}} \omega_{l_1}(P).$$

برای $Q = \{p_1\}$ ، داریم $F(\alpha)(\{q_1\}, \{p_1\}) = 1$ و $\omega_{l_1}(\{q_1\}) = \{z\}$ ، بنابراین:

$$\omega_{l_2}(\{p_1\}) = \{z\}.$$

برای $Q = \{p_0\}$ ، داریم $F(\alpha)(\{q_0\}, \{p_0\}) = 1$ و $\omega_{l_1}(\{q_0\}) = \emptyset$ ، بنابراین:

$$\omega_{l_2}(\{p_0\}) = \emptyset.$$

برای $Q = \emptyset$ ، داریم $F(\alpha)(\emptyset, \emptyset) = 1$ و $\omega_{l_1}(\emptyset) = \emptyset$ ، بنابراین:

$$\omega_{l_2}(\emptyset) = \emptyset.$$

برای $Q = \{p_0, p_1\}$ ، داریم $F(\alpha)(\{q_0, q_1\}, \{p_0, p_1\}) = 1$ و $\omega_{l_1}(\{q_0, q_1\}) = \{z\}$ ، بنابراین:

$$\omega_{l_2}(\{p_0, p_1\}) = \{z\}.$$

بنابراین شرط (۳) برای همه $Q \in \bar{Q}_2$ برقرار است. بنابراین، تمام شرایط ریخت برقرار است و $F(\alpha) \in Mor_L(F(A), F(B))$. همچنین به سادگی از تعریف F روی همانی‌ها و ترکیب‌ها، داریم $F(id_A) = id_{F(A)}$ و $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$ ، که نشان می‌دهد F یک تابعگونی است.

تعریف ۵.۳. فرض کنید $M_i = (Q_i, \delta_i, I_i, T_i)$ ، $i = 1, 2$ دو NDA باشد. پس رابطه $\approx$ روی Q_1 و Q_2 یک دو-شبیه سازی بین M_1 و M_2 است اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$1. \quad q_1 \approx q_2 \text{ نتیجه دهد } \delta_{l_1}(q_1, a) \approx \delta_{l_2}(q_2, a)$$

$$2. \quad q_1 \in I_1, q_2 \in I_2 \text{ نتیجه دهد } q_1 \approx q_2$$

$$3. \quad q_1 \approx q_2 \text{ نتیجه دهد } q_1 \in T_1, q_2 \in T_2 \text{ یا } q_1 \notin T_1, q_2 \notin T_2$$

به طوری که $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ و $a \in X$.

قضیه ۶.۳. فرض کنید $\approx$ یک دو-شبیه سازی بین دو اتوماتای غیرقطعی M_1 و M_2 باشد. پس $F(\approx)$ یک دو-شبیه سازی بین $F(M_1)$ و $F(M_2)$ است.

اثبات. فرض کنید $M_1 = (Q_1, \delta_1, I_1, T_1)$ و $M_2 = (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$. پس داریم:

$$F(M_1) = (\bar{Q}_1, X, (\{q_{0,1}\}, \mu^{t*}(\{q_{0,1}\})), \bar{Z}, \omega_{l_1}, \delta_{rl_1}, f_{l_1}, \tilde{\delta}_{rl_1}, F_1, F_2),$$

و

$$F(M_2) = (\bar{Q}_2, X, (\{q_{0,2}\}, \mu^{t*}(\{q_{0,2}\})), \bar{Z}, \omega_{l_2}, \delta_{rl_2}, f_{l_2}, \tilde{\delta}_{rl_2}, F_1, F_2),$$

به طوری که $\{q_{0,2}\} \cap I_2 \neq \emptyset, \{q_{0,1}\} \cap I_1 \neq \emptyset, \mu^{t*}(\{q_{0,2}\}) = 1, \mu^{t*}(\{q_{0,1}\}) = 1$ و

$$\delta_{rl_1}(Q', a, Q'') = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Q'' = \delta_1(Q', a) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

$$\omega_{l_1}(Q') = \begin{cases} z & \text{اگر } Q' \cap T_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

$$F(\approx)(P, Q) = \begin{cases} 1 & \text{و برعکس اگر } (\forall p_i \in P)(\exists q_i \in Q)(p_i \approx q_i) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

که در آن $Q \in \bar{Q}_2, Q', Q'', P \in \bar{Q}_1, z \in \bar{Z}$. فرض کنید $\approx$ یک دو-شبیه سازی بین M_1 و M_2 باشد. حال نشان می‌دهیم $F(\approx)$ یک دو-شبیه سازی بین $\tilde{F}_{l_1}$ و $\tilde{F}_{l_2}$ است:

۱. داریم: $q_{0,1} \in I_1$ و $q_{0,2} \in I_2$ ، پس $\{q_{0,1}\} \approx \{q_{0,2}\}$.

۲. فرض کنید $F(\approx)(Q, P) = 1$ و $\delta_{rI_1}(Q, a, Q') = 1$ پس برای هر $q_i \in Q$ وجود دارد $p_i \in P$ ، به قسمی که $q_i \approx p_i$ و برعکس. بنابراین،

$$\delta_1(q_i, a) \approx \delta_2(p_i, a),$$

که در آن $q_i \in Q$ و $p_i \in P$. بنابراین، $F(\approx)(Q', P') = 1$ که در آن $p' \in Q_2$ | $p' \in P'$ و $\delta_l(P, a, P') = 1$ و $\delta_l(p_i, a)$.

۳. $F(\approx)(Q, P) = 1$ پس برای هر $q_i \in Q$ وجود دارد $p_i \in P$ به قسمی که $q_i \approx p_i$ و برعکس. پس $\omega_{I_1}(Q) = \omega_{I_2}(P)$.

□

تعریف ۷.۳. فرض کنید $\zeta_G : NA_m^* \rightarrow \zeta_G$ دو تابع‌گون باشند، و برای هر شیء $A \in NA_m^*$ ، اتوماتاهای فازی عمومی $E_1(A)$ و $E_2(A)$ به ترتیب دارای مجموعه حالت‌های $\bar{Q}_1$ و $\bar{Q}_2$ باشند. مجموعه نگاشت‌های فازی هم‌ارز بین این دو اتوماتا، که با نماد $\mathcal{E}_A$ نمایش داده می‌شود، شامل تمام نگاشت‌های فازی $\alpha_A : \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2 \rightarrow L$ است که شرایط زیر را هم‌زمان ارضا کنند:

(i) برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ ، مقدار عضویت آغازین در $E_2(A)$ از طریق ترکیب فازی با $E_1(A)$ قابل تقریب باشد:

$$\mu_{E_2}^{t*}(Q_2) := \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu_{E_1}^{t*}(Q_1) \otimes \alpha_A(Q_1, Q_2).$$

(ii) برای هر $Q_2, P_2 \in \bar{Q}_2$ و هر $x \in X$ ، تابع انتقال فازی در $E_2(A)$ از طریق ترکیب انتقال‌های $E_1(A)$ و نگاشت α_A قابل تقریب باشد:

$$\delta_{E_2}(Q_2, x, P_2) := \bigvee_{Q_1, P_1 \in \bar{Q}_1} \delta_{E_1}(Q_1, x, P_1) \otimes \alpha_A(Q_1, Q_2) \otimes \alpha_A(P_1, P_2).$$

(iii) برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ ، خروجی اتوماتای $E_2(A)$ به صورت مجموعه‌ای از نمادها از طریق نگاشت α_A قابل تقریب باشد:

$$\omega_{E_2}(Q_2) := \bigcup_{\substack{Q_1 \in \bar{Q}_1 \\ \alpha_A(Q_1, Q_2) > 0}} \omega_{E_1}(Q_1).$$

(iv) اگر $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$ ، نگاشت α_A باید تقارن فازی را ارضا کند:

$$\forall Q_1, Q_2 \in \bar{Q}_1, \quad \alpha_A(Q_1, Q_2) \leftrightarrow \alpha_A(Q_2, Q_1) = 1.$$

در این تعریف، عمل $\otimes$ ضرب فازی و $\leftrightarrow$ هم‌ارزی فازی در شبکه‌ی کامل کراندار L تعریف شده‌اند. نگاشت‌های α_A در مجموعه $\mathcal{E}_A$ ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی اتوماتای $E_2(A)$ را از طریق ترکیب فازی با ساختارهای متناظر در $E_1(A)$ تقریب می‌زنند، و در صورت تساوی دامنه‌ها، تقارن فازی بین حالت‌ها را نیز حفظ می‌کنند.

قضیه ۸.۳. فرض کنید $\zeta_G : NA_m^* \rightarrow \zeta_G$ دو تابع‌گون باشند، و برای هر شیء $A \in NA_m^*$ ، بین اتوماتاهای فازی عمومی $E_1(A)$ و $E_2(A)$ یک نگاشت فازی

$$\alpha_A : \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2 \rightarrow L,$$

وجود داشته باشد که شرایط تعریف ۷.۳ را ارضا کند. همچنین فرض شود که برای هر رشته ورودی $x \in X^*$ ، نگاشت α_A حالت‌های رانشی نهایی را به‌طور فازی و متقارن مرتبط می‌سازد:

$$\alpha_A(\rho_{E_1(A)}(x), \rho_{E_2(A)}(x)) > \circ \quad \text{و} \quad \alpha_A(\rho_{E_2(A)}(x), \rho_{E_1(A)}(x)) > \circ.$$

فرض کنید برای هر نماد خروجی $z \in Z$ ، تابع $\nu: Z \rightarrow L$ مقدار عضویت آن را در شبکه‌ی L تعیین کند. در این صورت، برای هر $x \in X^*$ ، خروجی نهایی فازی دو اتوماتا از نظر فازی کاملاً هم‌ارز هستند:

$$F_2(\nu_{E_1(A)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{E_2(A)}(x)) = 1.$$

اثبات. برای $x \in X^*$ ، بنویسید $Q_1 := \rho_{E_1(A)}(x)$ و $Q_2 := \rho_{E_2(A)}(x)$. طبق شرط سوم تعریف ۷.۳، داریم:

$$\omega_{E_2(A)}(Q_2) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_1 \\ \alpha_A(P, Q_2) > \circ}} \omega_{E_1(A)}(P),$$

$$\omega_{E_1(A)}(Q_1) = \bigcup_{\substack{P \in \bar{Q}_2 \\ \alpha_A(P, Q_1) > \circ}} \omega_{E_2(A)}(P).$$

از فرض $\alpha_A(Q_1, Q_2) > \circ$ نتیجه می‌شود

$$\omega_{E_1(A)}(Q_1) \subseteq \omega_{E_2(A)}(Q_2),$$

و از $\alpha_A(Q_2, Q_1) > \circ$ نتیجه می‌شود $\omega_{E_2(A)}(Q_2) \subseteq \omega_{E_1(A)}(Q_1)$ ، و در نتیجه:

$$\omega_{E_1(A)}(Q_1) = \omega_{E_2(A)}(Q_2).$$

اکنون برای هر نماد خروجی $z \in Z$ ، تابع $\nu: Z \rightarrow L$ مقدار عضویت آن را در شبکه‌ی L تعیین می‌کند. بنابراین،

$$\nu_{E_1(A)}(x) := \{\nu(z) \mid z \in \omega_{E_1(A)}(Q_1)\},$$

$$\nu_{E_2(A)}(x) := \{\nu(z) \mid z \in \omega_{E_2(A)}(Q_2)\}.$$

و چون $\omega_{E_1(A)}(Q_1) = \omega_{E_2(A)}(Q_2)$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$\nu_{E_1(A)}(x) = \nu_{E_2(A)}(x).$$

با اعمال تابع رفع چندعضویت $F_2: L^* \rightarrow L$ که نسبت به تساوی مجموعه‌ها پایدار است، داریم:

$$F_2(\nu_{E_1(A)}(x)) = F_2(\nu_{E_2(A)}(x)) \Rightarrow F_2(\nu_{E_1(A)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{E_2(A)}(x)) = 1.$$

□

قضیه ۹.۳. فرض کنید L یک شبکه‌ی کامل کراندار و $\otimes$ یک ضرب فازی یکنوا و توزیع‌پذیر نسبت به $\vee$ باشد. اگر مجموعه‌ی نگاشت‌های فازی هم‌ارز $\mathcal{E}_A$ (مطابق تعریف ۷.۳) ناتهی باشد، آنگاه در آن یک نگاشت بیشینه وجود دارد؛ یعنی نگاشتی $\alpha_A^{\max} \in \mathcal{E}_A$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\alpha_A \in \mathcal{E}_A$ و هر $Q_1 \in \bar{Q}_1$ ، $Q_2 \in \bar{Q}_2$ داریم:

$$\alpha_A(Q_1, Q_2) \leq \alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2).$$

اثبات. از آنجا که L یک شبکه‌ی کامل است، مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های فازی $L \rightarrow \bar{Q}_1 \times \bar{Q}_2$ با ترتیب نقطه‌ای خود یک شبکه‌ی کامل تشکیل می‌دهد. بنابراین، اگر $\mathcal{E}_A$ ناتهی باشد، می‌توان نگاشت $\alpha_A^{\max}$ را به صورت نقطه‌ای تعریف کرد:

$$\alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2) := \bigvee_{\alpha \in \mathcal{E}_A} \alpha(Q_1, Q_2).$$

برای اثبات اینکه $\alpha_A^{\max} \in \mathcal{E}_A$ ، کافی است نشان دهیم که این نگاشت چهار شرط تعریف ۷.۳ را ارضا می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم که $\alpha_A^{\max}$ خاصیت تقارن فازی را دارد. چون برای هر $\alpha \in \mathcal{E}_A$ و هر Q_1, Q_2 داریم $\alpha(Q_1, Q_2) \leftrightarrow \alpha(Q_2, Q_1) = 1$ و چون $\leftrightarrow$ نسبت به $\vee$ توزیع‌پذیر است، نتیجه می‌شود:

$$\alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2) \leftrightarrow \alpha_A^{\max}(Q_2, Q_1) = 1.$$

اکنون به بررسی شرط بازسازی نگاشت آغازین می‌پردازیم. برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ ، چون هر $\alpha \in \mathcal{E}_A$ شرط زیر را ارضا می‌کند:

$$\mu_{E_2}^{t_o}(Q_2) = \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu_{E_1}^{t_o}(Q_1) \otimes \alpha(Q_1, Q_2),$$

و چون $\otimes$ نسبت به $\vee$ توزیع‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{E_2}^{t_o}(Q_2) &= \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu_{E_1}^{t_o}(Q_1) \otimes \left(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{E}_A} \alpha(Q_1, Q_2) \right) \\ &= \bigvee_{Q_1 \in \bar{Q}_1} \mu_{E_1}^{t_o}(Q_1) \otimes \alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2). \end{aligned}$$

برای نگاشت انتقالی نیز، برای هر $Q_2, P_2 \in \bar{Q}_2$ و هر $x \in X$ ، چون هر $\alpha \in \mathcal{E}_A$ رابطه‌ی زیر را ارضا می‌کند:

$$\delta_{E_2}(Q_2, x, P_2) = \bigvee_{Q_1, P_1 \in \bar{Q}_1} \delta_{E_1}(Q_1, x, P_1) \otimes \alpha(Q_1, Q_2) \otimes \alpha(P_1, P_2),$$

و با توجه به توزیع‌پذیری $\otimes$ نسبت به $\vee$ ، نتیجه می‌شود:

$$\delta_{E_2}(Q_2, x, P_2) = \bigvee_{Q_1, P_1} \delta_{E_1}(Q_1, x, P_1) \otimes \alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2) \otimes \alpha_A^{\max}(P_1, P_2).$$

در نهایت، برای نگاشت خروجی، برای هر $Q_2 \in \bar{Q}_2$ داریم:

$$\omega_{E_2}(Q_2) = \bigcup_{\substack{Q_1 \in \bar{Q}_1 \\ \alpha_A^{\max}(Q_1, Q_2) > 0}} \omega_{E_1}(Q_1).$$

□ پس، نگاشت $\alpha_A^{\max}$ شرط خروجی را نیز ارضا می‌کند. بنابراین، $\alpha_A^{\max} \in \mathcal{E}_A$ و بیشینه است.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید $\zeta_G : NA_m^* \rightarrow \zeta_G$ دو تابع‌گون باشند. گوئیم E_1 و E_2 در سطح رفتار هم‌ارز هستند، اگر برای هر شیء $M \in NA_m^*$ و هر رشته ورودی $x \in X^*$ ، خروجی‌های حاصل از ارزیابی فازی و رفع چندعضویت در اتوماتاهای $E_1(M)$ و $E_2(M)$ در شبکه‌ی L دومانده‌ای باشند؛ یعنی

$$F_2(\nu_{E_1(M)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{E_2(M)}(x)) = 1,$$

که در آن،

• $\bar{Z} \rightarrow L : \nu$ تابعی است که مقدار عضویت فازی هر خروجی را تعیین می‌کند،

• $\nu_{E_i(M)}(x) = \{\nu(z) \mid z \in \beta_{E_i(M)}(x)\} \subseteq L$ مجموعه ی مقادیر عضویت خروجی ها است.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $M_1 = (Q_1, \delta_1, I_1, T_1)$ و $M_2 = (Q_2, \delta_2, I_2, T_2)$ دو اتوماتای غیرقطعی باشند، و $\approx \subseteq Q_1 \times Q_2$ یک رابطه ی دو-شبه سازی بین آن ها باشد. همچنین فرض کنید $\zeta_G : NA_m^* \rightarrow \zeta$ یک تابعگون رفتاری باشد که رابطه ی $\approx$ را به یک نگاشت فاز $F(\approx) : Q_1 \times Q_2 \rightarrow L$ منتقل می کند، به طوری که، $F(\approx)$ یک دو-شبه سازی فاز بین اتوماتاهای فاز $F(M_1)$ و $F(M_2)$ است؛ برای هر $Q_1 \in \bar{Q}_1$ ، $Q_2 \in \bar{Q}_2$ داریم

$$F(\approx)(Q_1, Q_2) \leftrightarrow F(\approx)(Q_2, Q_1) = 1$$

تابع رفع چندعضویت $F_2 : L^* \rightarrow L$ نسبت به هم ارزی فاز $\leftrightarrow$ هم ساز و یکنواست. در این صورت، اتوماتاهای فاز $F(M_1)$ و $F(M_2)$ از نظر رفتاری هم ارز هستند؛ یعنی برای هر رشته ورودی $x \in X^*$ داریم:

$$F_2(\nu_{F(M_1)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{F(M_2)}(x)) = 1,$$

که در آن L شبکه ی L است. $\nu : Z \rightarrow L$ و $\nu_{F(M_i)}(x) := \{\nu(z) \mid z \in \omega_{F(M_i)}(\rho_{F(M_i)}(x))\} \subseteq L$

اثبات. برای $x \in X^*$ دلخواه، نگاشت رانشی $\rho_{F(M_i)} : X^* \rightarrow \bar{Q}_i$ حالت فعال نهایی $\rho_{F(M_i)}(x) := Q_x^{(i)}$ را در اتوماتای فاز $F(M_i)$ تولید می کند. چون $F(\approx)$ یک دو-شبه سازی فاز است، طبق فرض داریم:

$$F(\approx)(Q_x^{(1)}, Q_x^{(2)}) > 0 \quad \text{و} \quad F(\approx)(Q_x^{(2)}, Q_x^{(1)}) > 0.$$

طبق شرط خروجی در تعریف دو-شبه سازی فاز، برای هر $z \in \omega_{F(M_1)}(Q_x^{(1)})$ وجود دارد $z' \in \omega_{F(M_2)}(Q_x^{(2)})$ به طوری که $1 = \nu(z) \leftrightarrow \nu(z') = 1$ و بالعکس. بنابراین، مجموعه های $\nu_{F(M_1)}(x)$ و $\nu_{F(M_2)}(x)$ از نظر نقطه ای در شبکه ی L هم ارز هستند؛ یعنی:

$$\forall \nu_1 \in \nu_{F(M_1)}(x), \exists \nu_2 \in \nu_{F(M_2)}(x) \text{ با } \nu_1 \leftrightarrow \nu_2 = 1, \quad \text{و بالعکس.}$$

از هم ساز بودن تابع F_2 نسبت به $\leftrightarrow$ و یکنوایی آن، نتیجه می گیریم:

$$F_2(\nu_{F(M_1)}(x)) \leftrightarrow F_2(\nu_{F(M_2)}(x)) = 1.$$

□

در نتیجه، اتوماتاهای فاز $F(M_1)$ و $F(M_2)$ در سطح رفتار هم ارز هستند.

۴ نتیجه گیری

در این مقاله، چارچوبی رسته ای برای مدل سازی و تحلیل رفتار اتوماتاهای فاز عمومی مبتنی بر BL - جبرها توسعه داده شد. با تعریف دقیق رسته ای از اتوماتاهای فاز BL و معرفی تابعگون های رفتاری از رسته ای اتوماتاهای غیرقطعی به این رسته، امکان مدل سازی ساختارهای فاز و مقایسه ی رفتار آن ها فراهم گردید.

برای سنجش هم ارزی بین تابعگون ها، مجموعه ای از نگاشت های فاز هم ارز معرفی شد که ساختارهای آغازین، انتقالی و خروجی را به صورت ترکیبی بازسازی می کنند. اثبات شد که این مجموعه، در صورت ناتمی بودن، دارای عضو بیشینه است که تمام شروط بازسازی و تقارن فاز را ارضا می کند.

در ادامه، با توجه به مفهوم دو-شبه سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، نشان داده شد که این رابطه تحت تابعگون رفتاری به یک دو-شبه سازی فاز بین اتوماتاهای فاز عمومی BL منتقل می شود. بر پایه ی این انتقال، اثبات گردید که وجود دو-شبه سازی بین اتوماتاهای غیرقطعی، هم ارزی رفتاری بین اتوماتاهای فاز حاصل از آن ها را تضمین می کند.

لازم به ذکر است که چارچوب رسته ای ارائه شده در این مقاله با هدف تبیین ساختار نظری هم ارزی رفتاری میان اتوماتاهای فاز عمومی توسعه یافته است و ادعایی مبنی بر کاهش پیچیدگی محاسباتی مسئله تشخیص هم ارزی ارائه نمی کند. با این حال، صورت بندی رسته ای معرفی شده می تواند مبنایی مناسب برای طراحی روش های ساختاریافته و الگوریتم های کارآمدتر در بررسی هم ارزی رفتاری و دو-شبه سازی در پژوهش های آینده فراهم آورد. بررسی جنبه های الگوریتمی، تحلیل پیچیدگی و امکان کاهش هزینه محاسباتی در این چارچوب، از موضوعات قابل مطالعه در ادامه این پژوهش خواهد بود.

مراجع

- [1] K. Abolpour, M. M. Zahedi, Isomorphism between two BL-general fuzzy automata, *Soft Computing*, 16(2012), 729-736.
- [2] P. Buchholz, Bisimulation relations for weighted automata, *Theoretical Computer Science*, 393 (2008), 109-123.
- [3] M. Ćirić, J. Ignjatović, M. Bašić, I. Jančić, Nondeterministic automata: equivalence, bisimulations, and uniform relations, *Information Sciences*, 261 (2013), 185-218.
- [4] M. Ćirić, J. Ignjatović, N. Damjanović, M. Bašić, Bisimulations for fuzzy automata, *Fuzzy Sets and Systems*, 186 (2012), 100-139.
- [5] M. Doostfateme, S. C. Kremer, New directions in fuzzy automata, *International Journal of Approximate Reasoning*, 38.2 (2005), 175-214.
- [6] M. Eder, Monoids, automata and related constructions in monoidal categories, PhD diss, 2015.
- [7] M. R. Gary, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, (1979).
- [8] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Trends in Logic, vol. 4, Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [9] Z. Jančić, I. Micić, M. Ćirić, J. R. G. de Mendivil, S. Stanimirović, Approximate determinization of fuzzy automata over the product structure by means of approximate weak simulations, *Fuzzy Sets and Systems*, (2025), 109625.
- [10] R. Kaur, A. Tripathi, Hybrid model of general fuzzy automata and semantic computing: an application to transportation e-service, *Soft Computing*, 28 (2024), 10519-10530.
- [11] F. R. Lima-Junior, *Advances in Fuzzy Logic and Artificial Neural Networks*, Mathematics 12 (2024), 3949.
- [12] I. Micić, M. Ćirić, J. Matejić, S. Stanimirović, L. A. Nguyen, Approximate weak simulations and bisimulations for fuzzy automata over the product structure, *Fuzzy Sets and Systems*, 485 (2024), 108959.
- [13] R. Milner, *A calculus of communicating systems*, in: G. Goos, J. Hartmanis (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 92 (1980).
- [14] D. Park, Concurrency and automata on infinite sequences, in: P. Deussen (Ed.), *Proceedings of the 5th GI Conference, Karlsruhe, Germany*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 104, (1981), 167-183.
- [15] J. Pavelka, On fuzzy logic i, ii, iii, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 25 (1979), 447-464.
- [16] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Kh. Abolpour, Admissible Partition for BL-general fuzzy automata, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15 (2018), 79-90.
- [17] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Bisimulation of type 2 for BL-general fuzzy automata, *Soft Computing*, 23 (2019), 9843-9852.

- [18] M. Shamsizadeh, M. M. Zahedi, Kh. Abolpour, Bisimulation for BL-general fuzzy automata, Iranian Journal of Fuzzy Systems (2016).
- [19] S. S. Skiena, The algorithm design manual: Text. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 1998.
- [20] S. Stanimirović, L. A. Nguyen, M. Ćirić, M. Stanković. Breadth-first fuzzy bisimulations for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems, 503 (2025), 109246.
- [21] S. Yu, Regular languages, in: G. Rozenberg, A. Salomaa(Eds.), Hand book of Formal Languages, vol.1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997, 41–105.
- [22] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, 8 (1965), 338-353.