Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 12, Issue 2, pp. 63–80

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: 10.22034/mmr.2026.137904.1009

Investigation and Solution of Eigenvalue Problems Involving Nonlinear Differential Equations Using Continuous Multiplicative Differential Equations and Method of Green Function

M. Jahanshahi[(1)] , N. Aliyev[(2)] and A. Eivazi[(3)] [1]

[(1)] Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz,Iran

[(2)] Department of Mathematics, Baku State University, Baku, Azarbaijan

[(3)] Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz,Iran

Received: 25 June 2025 Accepted: 13 September 2026 Published online: 23 September 2026

Abstract: Investigating and solving eigenvalue problems, which is the main goal of Sturm-Liouville theory, generally emphasizes linear differential equations. This theory presents the solutions of eigenvalue problems in the form of infinite series of eigenfunctions of the spectral problem. Investigating and solving eigenvalue problems includes nonlinear differential equations from the unsolved problems of this theory. In this article, at first we try to generalize the basic concepts and basic definitions of continuous multiplicative calculus, including the definitions of continuous multiplicative derivative and continuous multiplicative integral. Then we present the important properties of these two operations along with their basic formulas. After that, recalling the eigenvalue problems, especially the Sturm-Liouville theory, generalize it to analysis and non-Newtonian calculus including continuous multiplicative differential equations. How to calculate eigenvalues and eigenfunctions is presented in general for eigenvalue problems including multiplicative differential equations. It also discusses the generalization of some basic concepts of the Sturm-Liouville theory to multiplicative calculus, including determining the inner product space and how to obtain adjoint equation for multiplicative differential equation and its self-adjointness conditions. Finally, in a few examples, we present the solutions of eigenvalue problems involving nonlinear differential equations by finding their eigenvalues and eigenfunctions. It should be noted that the above method for solving boundary value problems involving nonlinear differential equations including parameters is devoted only for authors. In the third section, we present the solution of nonlinear heterogeneous differential equations using multiplicative differentials using the Green's function. The distribution table of eigenvalue and eigenfunction graphs is provided at the end of this article.

Keywords: Sturm-Liouville theory, nonlinear differential equation, Invariant function, continuous multiplicative calculus.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (M. Jahanshahi) mjahanshahi1554@gmail.com (N. Aliyev) aliyev.nihan@mail.ru (A. Eivazi) teach.eivazi42@gmail.com,

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸

شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

سال 1405، دوره 12، شماره 2، ص ۶۳–۸۰

DOI: 10.22034/mmr.2026.137904.1009

بررسی و حل مسایل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از معادلات دیفرانسیل ضربی پیوسته و روش تابع گرین

محمد جهانشاهی، [۱] نیهان علی‌اف [۲] و علی عیوضی قراغیلی [۳] [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان ،تبریز،ایران

[۲] گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه دولتی باکو، جمهوری آذربایجان

[۳] گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان ،تبریز،ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۲ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

چکیده: بررسی و حل مسایل مقدار ویژه که هدف اصلی نظریه اشتورم– لیوویل می‌باشد. عموما بر معادلات دیفرانسیل خطی تاکید دارد. این نظریه، جواب های مسایل مقدار ویژه را بصورت سری های نامتناهی از توابع ویژه مساله اسپکترال ارایه می‌دهد. بررسی و حل مسایل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی از مسایل حل نشده این نظریه می‌باشد. در این مقاله، سعی می‌کنیم ابتدا مفاهیم اساسی و تعاریف اولیه حساب‌های ضربی پیوسته، شامل تعاریف مشتق ضربی پیوسته و انتگرال ضربی پیوسته را با استفاده از تعریف های موجود مشتق وانتگرال معمولی تعمیم دهیم و خاصیت‌های مهم این دو عمل را به همراه فرمول‌های اساسی آنها ارایه دهیم. سپس با یادآوری مسایل مقدار ویژه، بخصوص نظریه اشتورم — لیوویل را بر آنالیز و حساب‌های غیر نیوتونی شامل معادلات دیفرانسیل ضربی پیوسته تعمیم دهیم. نحوه محاسبه مقادیر ویژه و توابع ویژه، درحالت کلی برای مسایل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل ضربی ارایه می‌شود. و همچنین تعمیم بعضی مفاهیم اساسی نظریه اشتورم - لیوویل به حساب ضربی ازجمله تعیین فضای ضرب داخلی و نحوه بدست آوردن یک معادله دیفرانسیل ضربی وخودالحاق بودن آن پرداخته می شود. در نهایت، در طی چند مثال جواب‌های مسایل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل غیر خطی را از طریق پیداکردن مقادیر ویژه و توابع ویژه آنها، ارایه می‌کنیم. لازم به ذکر است روش فوق برای حل مسایل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی شامل پارامتر مختص مولفین می‌باشد. ودربخش سوم حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن غیر خطی را با استفاده از دیفرانسیل ضربی بروش تابع گرین ارائه می کنیم. و جدول توزیع و نمودارهای مقادیر ویژه و توابع ویژه یکی از مثالها در آخر مقاله آمده است.

[۱] نویسنده مسئول (M. Jahanshahi) mjahanshahi1554@gmail.com, (N. aliyev) aliyev.nihan@mail.ru (A. Eivazi) teach.eivazi42@gmail.com

واژه‌هاي كليدي: نظریه اشتورم–لیوویل، معادله دیفرانسیل غیر خطی ، تابع پایا، حساب ضربی پیوسته.

رده‌بندی ریاضی: 45J05; 34A08

۱ مقدمه

کتاب های زیادی تاکنون در بسط و توسعه نظریه اشتورم – لیوویل نوشته شده است. منابع کلاسیک این نظریه بیشتر به حل مسایلی می پردازد که شامل معادلات دیفرانسیل خطی باشد [۱–۴]. در این‌گونه مسایل سعی می شود با محاسبه توابع ویژه مسأله، جواب این مسایل بر حسب سری نامتناهی از توابع ویژه داده شود . پیشرفت‌های اخیر در حساب ضربی پیوسته، باعث شده است که مسایل مقدار ویژه و نظریه اشتورم –لیوویل برای معادلات دیفرانسیل کسری و غیرخطی شامل پارامتر نیز مورد بررسی قرار گیرد [۵، ۶]. باتوجه به اینکه بسیاری از رویدادهای طبیعی مانند سیگنال های صوتی، اسیدیته مواد شیمیایی، بزرگی زمین لرزه ها و موارد دیگرکه بطور تصاعدی تغییر می کنند می توان از حساب ضربی استفاده کرد. بنابراین مشکلات مدلسازی پدیده های طبیعی، با استفاده از حساب ضربی و باتوجه به سهولت آن، مزید بر استفاده از آن جهت پاسخگویی به مسایل فیزیکی است. حساب ضربی پیوسته که به عنوان حساب غیر نیوتونی شناخته شده است در سال ۱۹۷۲ بوسیله ر. کاتز و م. گراسمن معرفی شد [۷، ۸]. بعدها کاربردهای این حساب در زمینه های مختلف توسعه یافت [۹]. در سال های اخیر ریاضیدانان زیادی مثل آ. بشیروف، ر.اوز یاپچی و م. کورپینار، این حساب را به حالت ضربی پیوسته توسعه دادند م .رضا و . ه . آکتور به توسعه روش های عددی [۱۵]. و همچنین د. بین باشی اوغلو و س. دنیز و د. ترک اوغلو به توسعه آنالیز ضربی و نظریه نقطه ثابت در فضاهای متریک غیر نیوتونی پرداختند [۱۶، ۱۷]. از طرفی ن .علی اف و م. جهانشاهی در [۱۷] و [۱۸] به گسترش روش های حل معادلات دیفرانسیل ضربی پیوسته و گسسته از طریق تابع های پایای مناسب برای مشتق های ضربی پیوسته وگسسته پرداختند. بطوری که حساب ضربی و معادلات ضربی کمک کرد تا معادلات دیفرانسیل معرفی غیرخطی و معادلات تفاضلی غیرخطی با روش های حساب ضربی حل شوند. قابل ذکر است بررسی و حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی شامل معادلات غیرخطی و معادلات تفاضلی غیرخطی بروش های تحلیلی از مسائل حل نشده می باشد. زیرا روش های بکار رفته در اینگونه موارد تاکنون در مقالات وکتاب‌ها بصورت عددی وتقریباتی بوده وروش‌های تحلیلی برای محاسبه مقادیر ویژه وتوابع ویژه دیده نمی شود. در این مقاله، همچنین از حساب ضربی و معادلات دیفرانسیل ضربی پیوسته شامل پارامتر کمک می گیریم تا بتوانیم مسایل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی ناهمگن را بصورت تحلیلی حل کنیم. این مقاله درسه بخش ارایه میشود، دربخش اول مفاهیم اساسی و مقدماتی حساب ضربی پیوسته و بدنبال آن معادلات ضربی پیوسته مرتبه دوم شامل پارامتر ارایه می شود. در بخش دوم، نظریه اشتورم– لیوویل و مفاهیم مربوط به آن مثل تعریف ضرب داخلی و خواص آن و فضای ضرب داخلی ضربی $L^*(a,b)$ و همچنین الحاقی یگ معادله ضربی و تعیین خودالحاقی یک معادله ارائه و در بخش سوم، مثال هایی از نحوه محاسبه توابع ویژه و مقادیر ویژه مسأله اشتورم –لیوویل شامل معادلات غیرخطی و ناهمگن آورده می شود.

۲ مفاهیم مقدماتی و تعاریف اولیه

در این قسمت به بیان مفاهیم و قضایای تحلیلی ضربی می پردازیم که در حل مسأله و بررسی ویژگی های آن اهمیت فوق العاده ای دارد. با این حال بیان ویژگی های مشتق و انتگرال، برای مطالعه وادامه بحث مهم است. قواعد مشتق

و انتگرال ضربی با قواعد مشتق و انتگرال جمعی کلاسیک متفاوت است. در واقع تفاوت زیادی در منطق محاسبه ایجاد می کند. روش های این حساب، در حل مسایل فیزیک، زیست شناسی، اقتصاد و مسایل طبیعی، زمین لرزه تفاوت زیادی ایجاد خواهد کرد [۷، ۱۳].

تعریف ۱.۲. مشتق ضربی پیوسته
فرض کنید $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. مشتق f بصورت زیر تعریف می شود [۱۴–۱۸]:

$$f^{[1]}(x) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}, \tag{۱.۲}$$

اگر حد بالا موجود و مثبت باشد. آن را مشتق ضربی تابع f می‌نامیم. اگرf در x مشتق پذیرضربی باشد آن را بصورت زیر می توان نوشت.

$$f^{[1]}(x) = e^{(\ln f)'(x)}, \tag{۲.۲}$$

که در آن نماد $[1]$ علامت مشتق ضربی پیوسته و $(')$ علامت مشتق معمولی است. می توان فرمول بالا را بصورت زیر اثبات کرد:

$$\begin{aligned} f^{[1]}(x) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)} + 1\right)^{\frac{1}{h}} = \\ \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{f(x+h)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x) \quad f(x+h)-f(x) \quad 1}{f(x+h)-f(x) \quad h \quad f(x)}} = e^{\frac{f'}{f}} = e^{(\ln f)'}, \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

قضیه ۲.۲. *اگر تابع های f و g مشتق ضربی و h مشتق جمعی درنقطه x داشته باشد آنگاه روابط زیر در مشتق ضربی این تابع ها برقرار است [۷، ۱۱، ۱۴، ۱۵].*

۱) $(Cf)^{[1]}(x) = f^{[1]}(x)$ ۲) $(fg)^{[1]}(x) = f^{[1]}(x)g^{[1]}(x)$

۳) $(\frac{f}{g})^{[1]}(x) = \frac{f^{[1]}(x)}{g^{[1]}(x)}$ ۴) $(f^h)^{[1]}(x) = \big(f^{[1]}(x)\big)^{h(x)} f(x)^{h'(x)}$

۵) $(fog)^{[1]}(x) = f^{[1]}\big(h(x)\big) f(x)^{h'(x)}$

۶) $(f+g)^{[1]}(x) = \Big(f^{[1]}(x)\Big)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} \Big(g^{[1]}(x)\Big)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}}$,

در اینجا C یک عدد ثابت مثبت است.

تعریف ۳.۲. انتگرال ضربی پیوسته
فرض کنید $f \in R^+$ روی بازه $[a,b]$ کراندار و $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$ افرازی از این بازه باشد.
$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ و $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ نقاطی از زیر بازه های این افراز باشد در این صورت f انتگرال پذیرضربی است هرگاه عددی مانند P وجود داشته باشد به‌طوریکه که برای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم P_ϵ ازبازه $[a,b]$ به‌طوریکه $|(P(f,) - p)| < \epsilon$ پس می توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
P(f,p) &= \lim_{n\to\infty}\left(\Pi_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right)^{(x_i-x_{i-1})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(f(\xi_1)\right)^{\triangle x_1}\left(f(\xi_2)\right)^{\triangle x_2}\cdots\left(f(\xi_n)\right)^{\triangle x_n} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left[f(\xi_1)\triangle x_1 f(\xi_2)\triangle x_2\cdots f(\xi_n)\triangle x_n\right]} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\left[\ln f(\xi_1)\triangle x_1+\ln f(\xi_2)\triangle x_2+\cdots+\ln f(\xi_n)\triangle x_n\right]} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\xi_i)\triangle x_i} = e^{\int_a^b \ln f\,\mathrm{d}x},
\end{aligned}
\tag{۴.۲}
$$

پس انتگرال ضربی بصورت زیر تعریف می شود:

$$
\int_a^b f(x)^{\,\mathrm{d}x} = e^{\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad \text{و یا} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\int_a^b \left(e^{f(x)}\right)^{\mathrm{d}x}, \tag{۵.۲}
$$

پس $\int_a^b \left(f(x)\right)^{\mathrm{d}x}$ نماد انتگرال ضربی روی بازه $[a,b]$ نامیده می شود به عبارت دیگر انتگرال ضربی بصورت روابط بالا قابل تبدیل به انتگرال کلاسیک وبالعکس می باشد [۶، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۵].

قضیه ۴.۲. *چند فرمول مهم را درمورد انتگرال ضربی پیوسته می توان بصورت زیر نوشت* [۱۴، ۱۵]:

۱) $\int_a^b \left[f(x)^c\right]^{\mathrm{d}x} = \left[\int_a^b f(x)^{\,\mathrm{d}x}\right]^c$ ۲) $\int_a^b \left[f(x)g(x)\right]^{\mathrm{d}x} = \int_a^b \left[f(x)\right]^{\mathrm{d}x}\int_a^b \left[g(x)\right]^{\mathrm{d}x}$

۳) $\int_a^b \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{\mathrm{d}x} = \frac{\int_a^b \left[f(x)\right]^{\mathrm{d}x}}{\int_a^b \left[g(x)\right]^{\mathrm{d}x}}$ ۴) $\int_a^b f(x)^{\,\mathrm{d}x} = \int_a^c f(x)^{\,\mathrm{d}x}\int_c^b f(x)^{\,\mathrm{d}x}.$

اثبات ۴:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)^{\,\mathrm{d}x} = \lim_{n\to\infty}\left(\Pi_{i=1}^{n} f(c_i)\right)^{\triangle x_i} = \\
&\lim_{n\to\infty}\left(\Pi_{i=1}^{k} f(c_i)\right)^{\triangle x_i}\searrow [a,c].\ \lim_{n\to\infty}\left(\Pi_{i=1}^{l} f(c_i)\right)^{\triangle x_i}\searrow [c,b] \\
&= \int_a^c f(x)^{\,\mathrm{d}x}\int_c^b f(x)^{\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
$$

۳ تعمیم نظریه اشتورم - لیوویل بر حساب ضربی

در این بخش سعی بر این است که مفاهیم اصلی نظریه اشتورم — لیوویل مثل تعریف ضرب داخلی و تعیین الحاقی یک معادله و شرط خود الحاق بودن یک معادله را برای معادلات دیفرانسیل ضربی شامل پارامتر ارائه شود سپس در بخش بعدی به محاسبه مقادیر ویژه توابع ویژه معادله ضربی شامل پارامتر خواهیم پرداخت.

۴ تعریف ضرب داخلی و فضای ضرب داخلی $L_2^*(a,b)$

با توجه به انتگرال ضربی و خواص آن که در بخش اول ارائه شد ضرب داخلی در این حساب به صورت زیر تعریف می شود: ابتدا برای دو تابع $f,g\in R^+$ اعمال زیر را تعریف می کنیم [۱۸، ۱۹].

$$f\oplus g=f.g,\qquad f\ominus g=\frac{f}{g},\qquad f\odot g=f^{\ln g}=g^{\ln g}$$

به آسانی می توان دید که ساختار $(\oplus,A)$ و عمل $\oplus:A\times A\to R^+$ که در آن $A\neq\phi, A\subset R^+$ یک گروه ضربی است. بطور مشابه ساختار $(A,\oplus,A,\odot)$ یک حلقه است. با این شرایط ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

تعریف ۱.۴. *فرض کنید $K\subset A$ یک زیر مجموعه غیر خالی باشد در این صورت $<,>$ عمل ضرب داخلی را از $K\times K\to R^+$ به عنوان یک تابع تعریف می کنیم و این تابع دارای خاصیت های زیر است :*

$$۱)<f,f>_*\geq ۱,\qquad ۲)<f,f>_*=۱\Leftrightarrow f\equiv I$$

همچنین برای سه تابع f,g و h خاصیت های زیر بر قرار است.

$$۳)<f\oplus g,h>_*=<f,h>_*\oplus<g,h>_*,\quad ۴)<e^\alpha\odot f,g>_*=e^\alpha\odot<f,g>_*,\quad \alpha\in R$$
$$۵)<f,g>_*=<g,f>_*.$$

دراین صورت تابع فوق یک ضرب داخلی ضربی تعریف می کند و $(K,<,>_*)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم [۱۷، ۱۸]. توجه شود علامت ستاره در روابط فوق اشاره به ضرب داخلی ضربی دارد و فضای هیلبرت ضرب داخلی بصورت زیر تعریف می شود:

$$<,>_*:L_2^*\to L_2^*$$
$$L_2^*[a,b]=\{f:\int_a^b\left[f(x)\odot f(x)\right]^{\mathrm{d}x}\}<\infty,$$
$$<,>_*:L_2^*[a,b]\times L_2^*[a,b]\longrightarrow R^+$$
$$<f,h>_*=\int_a^b\left[f(x)\odot h(x)\right]^{\mathrm{d}x}.$$

۵ الحاقی یک معادله دیفرانسیل ضربی مرتبه دوم شامل پارامتر

معادله دیفرانسیل ضربی با توان های شامل متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$y^{[۱۱]}(x).\Big(y^{[۱]}(x)\Big)^{p(x)}.\Big(y(x)\Big)^{q(x)} = y^{\lambda}(x), \qquad x \in (۰, e), \tag{۱.۵}$$

$$y(e) = \Big(y(۰)\Big)^{\alpha_۱}, \quad y(e) = \Big(y^{۱}(۰)\Big)^{\alpha_۲}, \qquad \text{همراه با شرایط مرزی} \tag{۲.۵}$$

ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $y(x) = e^{z(x)}$ روابط زیر را خواهیم داشت :

$$y^{[۱]}(x) = e^{z'(x)}, \qquad y^{[۱۱]}(x) = e^{z''(x)}$$

با جایگذاری در معادله (۱.۵) داریم:

$$e^{z''(x)}.(e^{z'(x)})^{p(x)}.(e^{z(x)})^{q(x)} = e^{\lambda^{۲}z(x)}$$

با ساده کردن، به معادله عادی (جمعی) زیر می‌رسیم:

$$z''(x) + p(x)z'(x) + q(x)z(x) = \lambda^{۲}z(x) \qquad x \in (۰, e) \tag{۳.۵}$$

و شرایط مرزی جدید نسبت به تابع مجهول z(x) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$z(e) = \alpha_۱ z(۰), \qquad z'(e) = \alpha_۱ z'(۰).$$

اکنون می توان معادله الحاقی (۳.۵) را بدست آورد این کار با ضرب تابع اختیاری $u(x)$ به طرفین معادله (۳.۵) و انتگرال گیری از طرفین در بازه $[۰, e]$ بدست می آید.

$$(lz, u) = \int_۰^e z''(x)u(x)\,\mathrm{d}x + \int_۰^e p(x)z'(x)u(x)\,\mathrm{d}x + \int_۰^e q(x)z(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \lambda^{۲}\int_۰^e z(x)u(x)\,\mathrm{d}x.$$

با کمی عملیات جبری و استفاده از روش انتگرل گیری جزءبه جزء و جمع بندی جملات داخل انتگرال‌ها، معادله الحاقی نسبت به مجهول $u(x)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + p'(x)u(x) + q(x)u(x) = \lambda^{۲}u(x). \tag{۴.۵}$$

اکنون می توان با مقایسه ضرایب معادله (۴.۵) و ضرایب معادله (۳.۵) شرط خود الحاق بودن معادله (۳.۵) را مشخص کرد.

۶ معرفی معادلات دیفرانسیل ضربی پیوسته شامل پارامتر

در نظریه معادلات دیفرانسیل عادی و کاربردهای آن، مسایل اشتورم–لیوویل از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند.
در این قسمت می خواهیم برای مسایل مقدار ویژه که شامل معادلات ضربی پیوسته هستند مقادیر ویژه و توابع ویژه آنها را محاسبه کنیم. قبل از حل مسایل ضربی پیوست، فرم کلی را بیان می کنیم.
فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ضربی پیوسته شامل پارامتر را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$y^{[۱۱]}(x).\left(y^{[۱]}(x)\right)^{a}.y^{\lambda^{۲}}(x)=f(x), \qquad x\in(۰,۱), \tag{۱.۶}$$

$$y(۰)=۱, \quad y(۱)=۱, \qquad \text{همراه با شرایط مرزی} \tag{۲.۶}$$

۱.۶ محاسبه مقادیر ویژه وتوابع ویژه

ابتدا تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$y(x)=e^{z(x)}, \tag{۳.۶}$$

با استفاده از مفهوم مشتق ضربی پیوسته داریم

$$y^{[۱]}(x)=\lim_{h\to ۰}\sqrt[h]{\frac{y(x+h)}{y(x)}}=\sqrt[h]{\frac{e^{z(x+h)}}{e^{z(x)}}}=e^{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{z(x+h)-z(x)}{h}} \Longrightarrow y^{[۱]}(x)=e^{z'(x)}. \tag{۴.۶}$$

که در آن علامت $[۱]$ مشتق ضربی پیوسته و علامت پریم علامت مشتق معمولی است. پس داریم:

$$y^{[۱۱]}(x)=\left(y^{[۱]}(x)\right)^{[۱]}=\left(e^{z'(x)}\right)^{[۱]}=\sqrt[h]{\frac{e^{z(x+h)}}{e^{z(x)}}}=e^{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{z(x+h)-z(x)}{h}}=e^{z''(x)}, \tag{۵.۶}$$

با جای گذاری مقادیر مشتق های ضربی در معادله (۱.۵)، خواهیم داشت:

$$e^{z''(x)}.e^{az'(x)}.e^{\lambda^{۲}z(x)}=۱,$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی از طرفین معادله بالا داریم:

$$z''(x)+az'(x)+\lambda^{۲}z(x)=\ln f(x), \qquad x\in(۰,۱). \tag{۶.۶}$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$۱=y(۰)=e^{z(۰)} \quad \Longrightarrow \quad z(۰)=۰. \tag{۷.۶}$$

$$۱=y(۱)=e^{z(۱)} \quad \Longrightarrow \quad z(۱)=۰. \tag{۸.۶}$$

روابط (۶.۶)-(۷.۶)-(۸.۶) یک مساله مقدار ویژه (مرزی) عادی است که جواب‌های قسمت همگن آن را به‌صورت

$$z(x) = e^{\rho x}. \tag{۹.۶}$$

در نظر بگیریم معادله مشخصه ان عبارت از:

$$\rho^۲ + a\rho + \lambda^۲ = ۰, \qquad \rho = \frac{-a \pm \sqrt{a^۲ - ۴\lambda^۲}}{۲}, \tag{۱۰.۶}$$

$$\rho_۱ = \frac{-a - \sqrt{a^۲ - ۴\lambda^۲}}{۲}, \qquad \rho_۲ = \frac{-a + \sqrt{a^۲ - ۴\lambda^۲}}{۲}. \tag{۱۱.۶}$$

و جواب عمومی آن بصورت زیر است:

$$z(x) = C_۱ e^{\rho_۱ x} + C_۲ e^{\rho_۲ x} \tag{۱۲.۶}$$

با اعمال شرایط مرزی (۷.۶)- (۸.۶) داریم:

$$\begin{cases} z(۰) = C_۱ + C_۲ = ۰, \\ z_۱ = C_۱ e^{\rho_۱} + C_۲ e^{\rho_۲} = ۰. \end{cases} \tag{۱۳.۶}$$

دترمینان دستگاه جبری فوق عبارتست:

$$\begin{aligned} \triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ e^{\rho_۱} & e^{\rho_۲} \end{vmatrix} = e^{\rho_۲} - e^{\rho_۱} = ۰ \Rightarrow e^{\rho_۲} = e^{\rho_۱} = e^{\rho_۲ - \rho_۱} \Longrightarrow \\ e^{\frac{-a + \sqrt{a^۲ + ۴\lambda^۲}}{۲} + \frac{a + \sqrt{a^۲ + ۴\lambda^۲}}{۲}} = ۱ \Longrightarrow e^{\sqrt{a^۲ + ۴\lambda^۲}} = ۱. \end{aligned} \tag{۱۴.۶}$$

و بالاخره داریم:

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^۲ - ۴\lambda^۲} = ۲k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ &a^۲ - ۴\lambda^۲ = -۴k^۲\pi^۲ \\ &۴\lambda_{k^۲} = a^۲ + ۴k^۲\pi^۲ \Longrightarrow \lambda_{k^۲} = \frac{a^۲ + ۴k^۲\pi^۲}{۴} \\ &\lambda_k = \frac{\sqrt{a^۲ + ۴k^۲\pi^۲}}{۲}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم :

$$C_۱ + C_۲ = ۰ \Longrightarrow -C_۱ = C_۲.$$

جواب عمومی معادله همگن نظیر (۶.۶)

$$z(x) = C_۱ e^{\rho_۱ x} + C_۱ e^{\rho_۲ x} = C_۱ (e^{\rho_۱ x} - e^{\rho_۲ x})$$

$$= C_1\left(e^{\frac{-ax - x\sqrt{a^2 - 4\lambda_{k^2}}}{2}} - e^{\frac{-ax + x\sqrt{a^2 - 4\lambda_{k^2}}}{2}}\right)$$
$$- C_1 e^{\frac{-ax}{2}}\left(e^{\frac{+x\sqrt{a^2 - 4\lambda_{k^2}}}{2}} - e^{\frac{-x\sqrt{a^2 - 4\lambda_{k^2}}}{2}}\right)$$

توابع ویژه مسئله (۶.۶)- (۸.۶) عبارتست از:

$$\begin{aligned} z_k(x) &= C_1 e^{\frac{-ax}{2}}(e^{2k\pi xi} - e^{-2k\pi xi}) \\ &= -C_1 e^{\frac{-ax}{2}}(\cos k\pi x + i\sin k\pi x - \cos k\pi x + i\sin k\pi x) \\ &= -2C_1 e^{\frac{-ax}{2}} i\sin k\pi x, \qquad k \in Z. \end{aligned} \tag{۱۵.۶}$$

با محاسبات ساده می توانیم داشته باشیم:

$$k = 0,\ \ z_0(x) = 0, \qquad k < 0,\ \ z_k(x)$$

برای حالت $k < 0$ تابع های وابسته خطی خواهد بود. بنابراین توابع ویژه مسئله (۶.۶)- (۸.۶) عبارتند از :

$$z_k(x) = Ce^{\frac{-ax}{2}}\sin k\pi x, \qquad k \in N.$$

و توابع ویژه مساله اصلی (۳.۶)- (۴.۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$y_k(x) = e^{z_k(x)} = e^{c\frac{-ax}{2}\sin k\pi x}, \qquad k \in N.$$

به این ترتیب قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۱.۶. *مقادیر ویژه وتوابع ویژه مساله مقدار ویژه (۶.۶)- (۷.۶) با روابط زیر داده می شود:*

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{a^2 + 4k^2\pi^2}}{2}, \qquad y_k(x) = e^{Ce^{\frac{-ax}{2}}\sin k\pi x} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{۱۶.۶}$$

۷ کاربردها ی قضیه قبل در حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی شامل پارامتر

این بخش را با چند مثال از معادلات غیر خطی ادامه می دهیم.

مثال ۱.۷. *درمعادله غیر خطی زیر برای یک مساله مقدارویژه، مقادیر ویژه و توابع ویژه آن را محاسبه می کنیم.*

$$\begin{aligned} &y^{[1]}(x).y^{\lambda} = 1, \\ &y(1) = e, \qquad y(e) = e. \end{aligned} \tag{۱.۷}$$

حل: در واقع این مسأله مقدار ویژه، شامل معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر است.

$$y' + y\lambda\ln y = 0. \tag{۲.۷}$$

زیرا معادله فوق را می توان با استفاده از قوانین ضربی به صورت زیر نوشت.

$$e^{\frac{y'}{y}}.y^{\lambda}=۱\Rightarrow \ln e^{\frac{y'}{y}}+\lambda\ln y=۰\Rightarrow \frac{y'}{y}+\lambda\ln y=۰\Rightarrow y'+\lambda y\ln y=۰. \qquad (۳.۷)$$

بوضوح معادله (۳.۷) نشان می دهد یک معادله غیرخطی شامل پارامتر است که از روش های کلاسیک نمی‌توان به آسانی مقادیر ویژه و توابع ویژه آن را محاسبه کرد. ولی با تبدیل معادله بالا به حالت ضربی می توان آن را به صورت زیر حل کرد.
با انتخاب تغییر متغیر زیر داریم:

$$\begin{aligned} &\text{داریم:}\quad y^{[۱]}(x)=e^{\dot z(x)}\overset{(۱.۷)}{\Longrightarrow}e^{\dot z(x)}e^{\lambda z(x)}=۱\\ &\Longrightarrow e^{\dot z(x)}e^{\lambda z(x)}=۱\Rightarrow \dot z(x)+\lambda z(x)=۰, \qquad (۴.۷)\\ &\Longrightarrow \rho e^{\rho x}+\lambda e^{\rho x}=۰\Rightarrow \rho=-\lambda\Rightarrow z(x)=Ce^{-\rho x}. \end{aligned}$$

اگر شرایط مرزی را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &y(x)=e^{z(x)}\Longrightarrow y(۱)=e^{z(۱)}=e\Longrightarrow z(۱)=۱,\\ &y(e)=e^{z(e)}=e\Longrightarrow z(e)=۱, \end{aligned}$$

$$z(۱)=۱\Longrightarrow z(۱)=Ce^{-\lambda(۱)}=۱,\Longrightarrow e^{-\lambda}=۱ \qquad (۵.۷)$$

$$z(e)=۱\Longrightarrow e^{-e\lambda}=۱, \qquad (۶.۷)$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$e^{e\lambda-\lambda}=۱\Longrightarrow e^{\lambda(e-۱)}=۱\Longrightarrow \lambda(e-۱)=۲k\pi i$$

مقادیر ویژه
$$\lambda_k=\frac{۲k\pi i}{e-۱}$$

توابع ویژه
$$y_k(x)=e^{Z(x)}=e^{e^{-\lambda x}}\Longrightarrow y_k(x)=e^{e^{\left(-\frac{۲k\pi i}{e-۱}\right)x}}$$

مثال ۲.۷. درمسأله مقدار ویژه شامل معادله دیفرانسیل ضربی مرتبه دوم زیر، مقادیر ویژه و توابع ویژه آن را محاسبه می کنیم.

$$y^{[۱۱]}.y^{\lambda^{۲}}(x)=۱,\qquad x\in(\alpha,\beta) \qquad (۷.۷)$$

$$y(\alpha)=۰,\quad y(\beta)=۱. \qquad (۸.۷)$$

حل: ملاحظه می کنیم چون در معادله (۶.۶) ضریب $a=۰$ می باشد لذا با توجه به روابط (۱۶.۶) مقادیر ویژه

وتوابع ویژه بصورت زیر خواهد بود:

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{۴k^۲\pi^۲}}{۲}, \tag{۹.۷}$$

$$y_k(x) = e^{c\sin k\pi x}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{۱۰.۷}$$

قابل ذکر است در [۶] نحوه محاسبه مقادیر ویژه وتوابع ویژه داده نشده است. اما مطلب مهم در اینجا این است اگر بخواهیم معادله فوق را به صورت معادله عادی بنویسیم خواهیم داشت:

$$y^{[۱]}(x) = e^{(\ln y)'} = e^{\frac{y'}{y}},$$

$$y^{[۱۱]}(x) = e^{\left(\ln\left(e^{\frac{y'}{y}}\right)\right)'} = e^{\frac{(e^{\frac{y'}{y}})'}{e^{\frac{y'}{y}}}} \Rightarrow$$

$$y^{[۱۱]}(x) = e^{(\ln y)'} = e^{\frac{(e^{\frac{y'}{y}})'}{e^{\frac{y'}{y}}}} = e^{\frac{y''y - y'^۲}{y^۲}}.$$

با جاگذاری مقادیر فوق در معادله اصلی مثال (۲.۷)، داریم:

$$e^{\frac{y''y - y'^۲}{y^۲}}.y(x)^{\lambda^۲} = ۱,$$

از طرفین لگاریتم بگیریم:

$$\frac{y''y - y'^۲}{y^۲} + \lambda^۲\ln y(x) = ۰. \quad \text{یا} \qquad y''y - (y')^۲ + y^۲\lambda^۲(\ln y) = ۰, \tag{۱۱.۷}$$

بنابرین مساله مقدار ویژه شامل معادله دیفرانسیل غیر خطی مثال (۲.۷) با شرایط مرزی (۸.۷) دارای مقادیر ویژه با رابطه (۹.۷) و توابع ویژه با رابطه (۱۰.۷) خواهد بود.

بخش سوم

در این بخش، مسئله مقدار مرزی شامل یک معادله دیفرانسیل ضربی مرتبه دوم غیرهمگن با استفاده از روش تابع گرین حل می شود. برای این منظور، مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y^{[۱۱]}(x).\left(y^{[۱]}(x)\right)^{\alpha}.y(x)^{b} = f(x), \qquad x \in (x_۰, x_۱) \tag{۱۲.۷}$$

$$y(x_۰) = \alpha, \quad y(x_۱) = \beta. \tag{۱۳.۷}$$

که در آن $f(x)$ قسمت ناهمگن و β, α ثابت‌های حقیقی و b, a ثابت‌های مثبت هستند. مشابه بخش اول با فرض تغییر متغیر $y(x) = e^{(z(x))}$ و با استفاده از مفهوم مشتق ضربی پیوسته، داریم:

$$y^{[۱]}(x) = e^{z'(x)}, \qquad y^{[۱۱]}(x) = e^{z''(x)}.$$

با قرار دادن مقادیر مشتقات ضربی در معادله (۱۲.۷)، خواهیم داشت

$$e^{(z''(x))}.e^{(az'(x))}.e^{(bz(x))} = f(x), \tag{۱۴.۷}$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی $\ln x$ از دو طرف معادله فوق، خواهیم داشت

$$z''(x) + az'(x) + bz(x) = \ln f(x), \qquad x \in (x_۰, x_۱), \tag{۱۵.۷}$$

$$\alpha = y(x_۰) = e^{z(x_۰)}, \quad \beta = y(x_۱) = e^{z(x_۱)}. \tag{۱۶.۷}$$

با توجه به شرایط مرزی، خواهیم داشت

$$z(x_۰) = \ln \alpha, \qquad z(x_۱) = \ln \beta. \tag{۱۷.۷}$$

معادله همگن، مانند معادله (۶.۶) را در نظر می‌گیریم و معادله مشخصه آن را می‌نویسیم

$$z''(x) + az'(x) + bz(x) = ۰. \tag{۱۸.۷}$$

با در نظر گرفتن تابع پایای زیر

$$z(x) = e^{\lambda x}$$

داریم:

$$\lambda^۲ + a\lambda + b = ۰. \tag{۱۹.۷}$$

ریشه‌های معادله مشخصه (۱۹.۷) عبارتند از

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^۲ - ۴b}}{۲} \Longrightarrow \lambda_۱ = \frac{-a + \sqrt{a^۲ - ۴b}}{۲}, \qquad \lambda_۲ = \frac{-a - \sqrt{a^۲ - ۴b}}{۲}. \tag{۲۰.۷}$$

با فرض شرط زیر،

$$a^۲ - ۴b > ۰, \tag{۲۱.۷}$$

و:

$$\lambda_۱ \neq \lambda_۲ \tag{۲۲.۷}$$

برای محاسبه جواب معادله ناهمگن (۱۵.۷) با استفاده از روش تغییر متغیر (روش لاگرانژ) و انجام برخی عملیات ساده، دستگاه جبری زیر را نسبت به $C_۱$ و $C_۲$ خواهیم داشت.

$$z(x) = C_۱ e^{\lambda_۱ x} + C_۲ e^{\lambda_۲ x},$$

$$\begin{cases} C'(x)_{۱}e^{\lambda_{۱}x} + C'(x)_{۲}e^{\lambda_{۲}x} = ۰, \\ C''(x)_{۱}\lambda_{۱}e^{\lambda_{۱}x} + C'(x)_{۲}\lambda_{۲}e^{\lambda_{۲}x} = \ln f(x), \end{cases} \tag{۲۳.۷}$$

و دترمینان آن عبارت است از

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_{۱}x} & e^{\lambda_{۲}x} \\ \lambda_{۱}e^{\lambda_{۱}x} & \lambda_{۲}e^{\lambda_{۲}x} \end{vmatrix} = (\lambda_{۲} - \lambda_{۱})e^{(\lambda_{۱}+\lambda_{۲})x} \neq ۰. \tag{۲۴.۷}$$

جواب‌های $C_{۱}(x)$ و $C_{۲}(x)$ با انتگرال‌های زیر داده می‌شوند:

$$C_{۱}(x) = C_{۱} - \int_{x_{۱}}^{x} \frac{e^{-\lambda_{۱}}\xi \ln f(\xi)}{\lambda_{۲} - \lambda_{۱}} \mathrm{d}\xi, \qquad C_{۲}(x) = C_{۲} - \int_{x_{۱}}^{x} \frac{e^{-\lambda_{۲}}\xi \ln f(\xi)}{\lambda_{۲} - \lambda_{۱}} \mathrm{d}\xi.$$

و جواب نهایی معادله (۱۵.۷) به صورت زیر خواهد بود:

$$z(x) = C_{۱}e^{\lambda_{۱}x} + C_{۲}e^{\lambda_{۲}x} + \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} \frac{e^{-\lambda_{۱}}\xi \ln f(\xi)}{\lambda_{۲} - \lambda_{۱}} \mathrm{d}\xi - \mathrm{d}\xi \frac{e^{-\lambda_{۲}}\xi \ln f(\xi)}{\lambda_{۲} - \lambda_{۱}} \mathrm{d}\xi, \qquad \text{یا}$$

$$z(x) = C_{۱}e^{\lambda_{۱}x} + C_{۲}e^{\lambda_{۲}x} + \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} g(x - \xi) \ln f(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{۲۵.۷}$$

و تابع گرین مسئله مقدار مرزی (۱۷.۷)-(۱۸.۷) به صورت زیر است:

$$g(x - \xi) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda_{۲}(x-\xi)} - e^{\lambda_{۱}(x-\xi)}}{۲(\lambda_{۲} - \lambda_{۱})}, & x_{۰} < \xi < x, \\ -\dfrac{e^{\lambda_{۲}(x-\xi)} - e^{\lambda_{۱}(x-\xi)}}{۲(\lambda_{۲} - \lambda_{۱})}, & x_{۰} < \xi < x, \end{cases} \tag{۲۶.۷}$$

بنابراین، جواب مسئله (۱۵.۷)-(۱۷.۷) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{e^{\lambda_{۱}x}}{\triangle} \times \\ &\left[e^{\lambda_{۲}x_{۱}} \left(\ln \alpha - \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} g(x_{۱} - \xi) \ln f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) - e^{\lambda_{۲}x_{۰}} \left(\ln \beta - \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} g(x_{۰} - \xi) \ln f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) \right], \\ &+ \frac{e^{\lambda_{۲}x}}{\triangle} \times \\ &\left[e^{\lambda_{۱}x_{۰}} \left(\ln \beta - \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} g(x_{۱} - \xi) \ln f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) - e^{\lambda_{۱}x_{۱}} \left(\ln \alpha - \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} g(x_{۰} - \xi) \ln f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) \right], \\ &+ \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} g(x_{۰} - \xi) \ln f(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{۲۷.۷}$$

در نهایت، تابع گرین مسئله اصلی (۱۲.۷)-(۱۳.۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$G(x-\xi)=g(x-\xi)+\frac{e^{\lambda_1 x}}{\triangle}\Big[e^{\lambda_2 x_0}g(x_1-\xi)-e^{\lambda_1 x_1}g(x_0-\xi)\Big] \\ \frac{e^{\lambda_2 x}}{\triangle}\Big[e^{\lambda_1 x_1}g(x_0-\xi)-e^{\lambda_1 x_0}g(x_1-\xi)\Big]. \tag{۲۸.۷}$$

$$y(x)=\frac{e^{\lambda_1 x}}{\triangle}\big(e^{\lambda_2 x_1}\ln\alpha-e^{\lambda_2 x_0}\ln\beta\big)+\frac{e^{\lambda_2 x}}{\triangle}\big(e^{\lambda_1 x_0}\ln\beta-e^{\lambda_1 x_1}\ln\alpha\big) \\ +\int_{x_0}^{x_1}G(x-\xi)\ln f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{۲۹.۷}$$

در پایان، با جمع‌بندی، می‌توانیم قضیه زیر را نتیجه بگیریم:

قضیه ۳.۷. *با فرض اینکه مسئله مقدار مرزی شامل معادله ضربی مرتبه دوم (۱۲.۷)- (۱۳.۷) باشد و شرایط (۲۱.۷) و (۲۴.۷)، برقرار باشد، آنگاه جواب مسئله مقدار مرزی فوق با استفاده از روش تابع گرین توسط رابطه (۲۹.۷) ارائه می‌شود.*

در نهایت، در مثال زیر، یک مسئله مقدار مرزی با عبارت غیرهمگن به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

مثال ۴.۷. *با در نظر گرفتن روش تابع گرین ارائه شده، جواب این مسئله را با روابط زیر محاسبه می‌کنیم:*

$$y''-y'^2+y^2\ln y=x^2, \\ y(x_0)=\alpha,\qquad y(x_1)=\beta.$$

معادله همگن وابسته را در نظر می‌گیریم

$$y''-y'^2+y^2\ln y=0,$$

$$\frac{y''y-y'^2}{y^2}+\ln y(x)=0\Longrightarrow y^{[11]}(x).y(x)=1,\quad x\in(\alpha,\beta)\Longrightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=1,\end{cases}$$

$$y(\alpha)=0,\qquad y(\beta)=1,$$

$$\lambda^2+1=0\Longrightarrow\lambda=\pm i\Longrightarrow\begin{vmatrix}e^{ix} & e^{-ix}\\ ie^{ix} & ie^{-ix}\end{vmatrix}=-ie^{ix-ix}-ie^{ix-ix}=-i-i=-2i\neq 0,$$

بنابراین

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{e^{-i(x-\xi)}-e^{i(x-\xi)}}{-4i}, & \alpha<\xi<x,\\[2ex] -\dfrac{e^{e^{-i(x-\xi)}-e^{i(x-\xi)}}}{-4i}, & x<\xi<\beta,\end{cases}$$

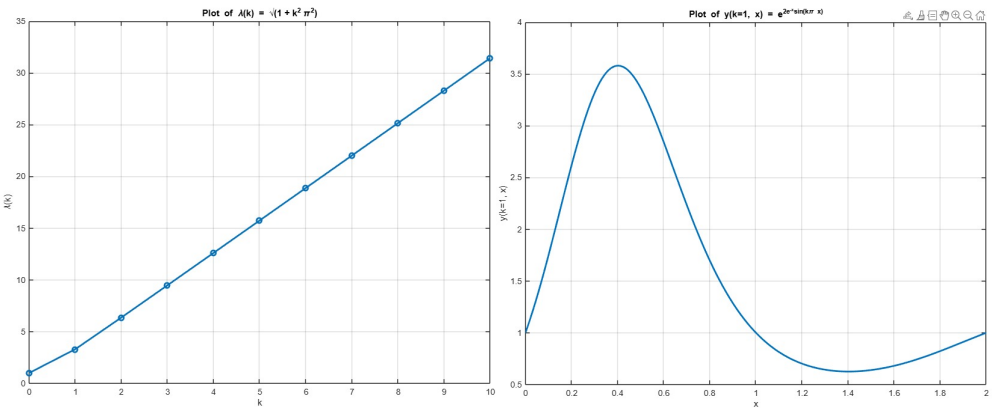
$$G(x,\xi)=g(x-\xi)+\frac{e^{ix}}{-4i}\Big(e^{-i\alpha}g(\beta-\xi)-e^{-i\alpha}g(\alpha-\xi)\Big) \\ +\frac{e^{-ix}}{-4i}\Big(e^{i\beta}g(\alpha-\xi)-e^{i\alpha}g(\beta-\xi)\Big),$$

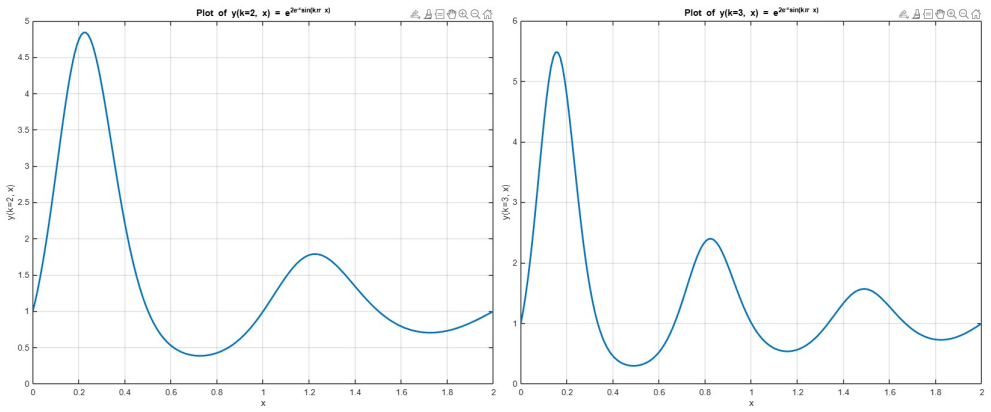
$$y(x) = \frac{e^{ix}}{\Delta}\left(e^{-ix_1}\ln\alpha - e^{-ix_0}\ln\beta\right) + \frac{e^{-ix}}{\Delta}\left(e^{ix_0}\ln\beta - e^{ix_1}\ln\alpha\right) + \int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi)\ln\xi^2\,d\xi.$$

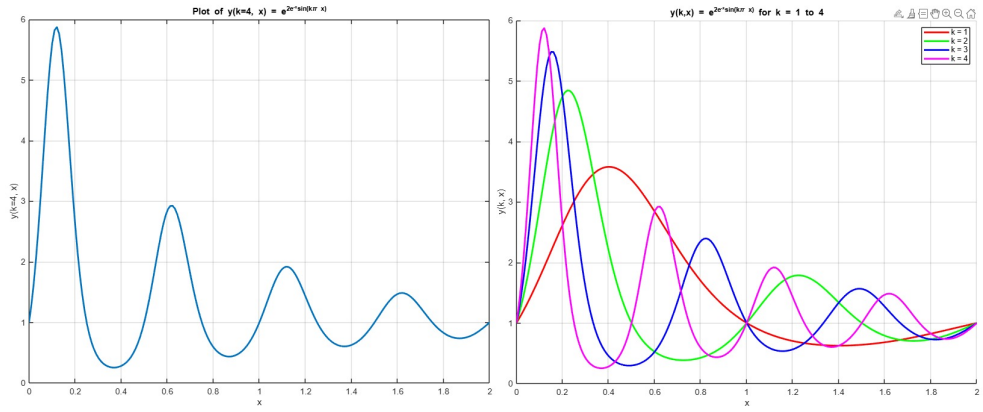
در پایان برای مثال ۲.۷، توزیع مقادیر ویژه و نمودار توابع ویژه کهبا روابط ۹.۷ و ۱۰.۷ محاسبه شده‌اند، در شکل‌های زیر ارایه می‌شود.

x	k1	k2	k3	k4
0	1	1	1	1
0.2222	2.7994	4.8411	4.0025	1.7293
0.4444	3.5356	1.5505	0.3294	0.4385
0.6667	2.4333	0.411	1	2.4333
0.8889	1.3247	0.5895	2.0382	0.445
1.1111	0.7984	1.5268	0.5654	1.9124
1.3333	0.6335	1.5786	1	0.6335
1.5556	0.6599	0.8656	1.4414	1.3117
1.7778	0.8047	0.7168	0.7462	0.8908
2	1	1	1	1

k	λ(k)
0	1
1	3.2969
2	6.3623
3	9.4777
4	12.6061
5	15.7398
6	18.8761
7	22.0139
8	25.1526
9	28.292
10	31.4318







۸ نتیجه‌گیری

در این مقاله مسایل مقدار ویژه، شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی شامل پارامتر را بررسی کردیم و نظریه اشتورم ـ لیوول را بر آنالیز و حساب های غیر نیوتونی شامل معادلات ضربی پیوسته تعمیم دادیم و از طریق معادلات ضربی پیوسته شامل پارامتر، مسایل مقدار ویژه شامل معادلات دیفرانسیل غیرخطی را بررسی و به کمک حساب ضربی پیوسته، مقادیر ویژه و توابع ویژه آن ها را بدست آوردیم.

مراجع

[1] Mynte, T.and Debnath, L., 2008. *partial Differential Equations and applications*, Birkhauser, publisher, Boston, Basel, Berlin.

[2] Guaiz. M.A.Al., 2008. *Sturm-Liouville theory and its applications*, Springer Publisher.

[3] ladistav, V. and Kravchenko, V., 2020. *Direct and inverse Sturm-Liouville problems*, Birkhauser, Publisher.

[4] Klimerk, M. and Agrawal, O.P., 2013. *Fractional Sturm-Liouville problems*, Computers, Mathematics with application, 66. pp. 795-812.

[5] Marganta, Rivero, Trujillo, and J. Pilarvelasco, M., 2013. *A fractional approach to the Sturm-Liouville problems*, Central European Journal of Physics.

[6] Sertac, Goktas., 2021. *A new Type of Sturm- Liouville Equation in the non- Newtonian Calculus*, Hindawi Journal of function space.

[7] Yalcin. N., 2021. *The solutions of multiplicative Hermite differential equation*, Rendicodidel Circolo mathematic of Palermo, 170(2).no 1.

[8] Grossman. M. and Katz. R., 1979. *Non-Newtonian Calculus*, Int. Journal of mathematical equations, 10(4).

[9] Grossman, M. and Katz. R., 1972. *Non-Newtonian Calculus*, Lee -Press, Pigeon Cove.

[10] Shahi, A. UL-Haq2, E. Noor1, M.A. and Waseem, M., 2023. *Some novel schemes by using multiplicative calculus for nonlinear equations*, TWMS J. App. and Eng. Math, 13(2), pp. 723-733.

[11] Stanley, D., 1999. *A multiplicative calculus*, Primus, (4).pp. 310-326.

[12] Bashirov. A.E. and Rıza. M., 2011. *On complex multiplicative differentiation*, TWMS J. App. Eng. Math, (1) pp. 75-85.

[13] Bashirov, A.E. Kurpinar, E.M. and Ozyapici, A., 2008. *Multiplicative calculus and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 337(1). pp. 36-48.

[14] Jahanshahi, M. Aliyev, N. and Jahanshahi, F., 2020. *Solving Two Initial-Boundary Value Problems Including Fractional Partial Differential Equations By Spectral and Contour Integral Methods*, Azerbaijan Journal of Mathematics, ,V. 10, No 2, July.

[15] Riza, M. Aktore, H., 2025. *The Runge-Kutta method in geometric multiplicative calculus*, LMS Jour. computational. Math, 2025, 18(1). pp. 539-554.

[16] Binbasioglu, D. Demiriz, S. and Turkoglu, D., 2025. *Fixed point of Non-Newtonian contraction mappings on Non-Newtonian metric space*, Journal of fix point theory and applications. Springher, , Basel.

[17] Hosseini, R. and Jahanshahi, M., 2017.*Invariant functions for solving discrete and countinous ODEs*, Computational Methods for Differential Equations. http://cmde.tabrizu.ac.ir, 5(4), pp. 271-279.

[18] Öznur, G. B., Özbey, G. G., Küçükevcilioğlu, Y. A. and Karaman, R. A., 2024. Turkish Journal of Mathematics, *A Study of the scattering analysis of the multiplicative Sturm-Liouville problem*, Vol. 48, No. 3, Article 17.

[19] jahanshahi, M. Aliyev, N. and Dehghani, H., 2024. COIA, *Solving Non-Homogenous Non-linear Difference Equations*, Stanbul. Turkey.