Kharazmi University

Mathematical Research
Year 2026, Volume 12, Issue 2, pp. 81–98

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: 10.22034/mmr.2026.131055.0

Irregularity Index of Graph Transformations

Meysam Taheri-Dehkordi [1]

University of Applied Science and Technology, Tehran, Iran

Received: 24 January 2026 Accepted: 20 September 2026 Published online: 23 September 2026

Abstract: Using graph transformations, a large number of graphs can be generated from smaller graphs. Graph products are considered among the fundamental concepts in graph theory. These products encompass a wide range of types, each of which produces new graphs with different properties and applications. Moreover, for an arbitrary graph G with n vertices and m edges, the structure $R_k(G)$ produces a graph consisting of k copies of G with kn vertices and k^2m edges. The irregularity index of a connected graph G is defined as $Irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |d_G(u) - d_G(v)|$. In this paper, we compute the irregularity index for several graph products, including the lexicographic product, the corona product, and the direct product of graphs, and we establish bounds for the irregularity of these products. Additionally, we determine the irregularity of the structure $R_k(G)$ for an arbitrary graph G.

Keywords: Graph products, Irregularity, Structure $R_k(G)$.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author
E-mail addresses: (Meysam Taheri-Dehkordi) m.taheri@uast.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره 12، شماره 2، ص ۸۱–۹۸
شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
DOI: 10.22034/mmr.2026.131055.0

شاخص بی‌نظمی تبدیلات گراف‌ها

میثم طاهری دهکردی [۱] [۲]

[۱] ایران– تهران– دانشگاه جامع علمی کاربردی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

چکیده: با استفاده از تبدیلات گراف می‌توان تعداد زیادی گراف بزرگ از گراف‌های کوچک‌تر به وجود آورد. ضرب‌های گراف‌ها جزء مفاهیم بسیار بنیادی در نظریه‌ی گراف به شمار می‌آیند. این ضرب‌ها شامل طیف بسیار گسترده‌ای هستند که هر کدام موجب تولید گراف‌های جدید با خواص و کاربردهای متفاوت می‌شوند. همچنین، برای گراف دلخواه G با n رأس و m یال، ساختار $R_k(G)$ گرافی شامل k کپی از گراف G با kn رأس و k^2m یال ایجاد می‌کند. شاخص بی‌نظمی برای گراف همبند G به صورت $Irr(G) = \sum_{uv\in E(G)} |d_G(u) - d_G(v)|$ تعریف می‌شود. در این مقاله، ما شاخص بی‌نظمی را برای چند ضرب شامل ضرب لکزیکوگرافی، ضرب کرونا و ضرب مستقیم گراف‌ها به دست می‌آوریم و کران‌هایی برای بی‌نظمی این ضرب‌ها تعیین می‌کنیم. علاوه بر آن، بی‌نظمی ساختار $R_k(G)$ را برای گراف دلخواه G به دست می‌آوریم.

واژه‌هاي كليدي: ضرب گراف‌ها، بی‌نظمی، ساختار $R_k(G)$.

رده‌بندی ریاضی: 05C69; 05C78

۱ مقدمه

در این مقاله، همه‌ی گراف‌ها ساده، متناهی و همبند هستند. برای گراف $G = (V, E)$ درجه‌ی رأس $u \in V$ را با $d_G(u)$ نشان می‌دهیم. تعداد اعضای V و E را به ترتیب مرتبه و اندازه‌ی G می‌گوییم. یک گراف را منظم می‌نامیم اگر همه‌ی رأس‌ها درجه‌ی یکسان داشته باشند. در گراف G، مجموعه‌ی رأس‌های مجاور به رأس u، یعنی رأس‌هایی که با یک یال به این رأس متصل هستند را با $N_G(u)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین و کوچکترین درجه‌ی رأس‌ها در گراف را به ترتیب با Δ و δ نشان می‌دهیم. در سال ۱۹۷۷، آلبرتسون[۳] شاخص بی‌نظمی گراف را به صورت زیر معرفی کرد [۶].

$$Irr(G) = \sum_{uv\in E(G)} |d_G(u) - d_G(v)|$$

[۲] نویسنده مسئول مقاله
(Meysam Taheri-Dehkordi) m.taheri@uast.ac.ir

[3] Albertson

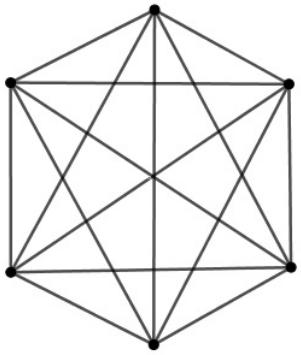
او همچنین کران‌هایی برای بی‌نظمی برخی گراف‌ها از جمله گراف‌های مثلث آزاد، دوبخشی و سایر گراف‌ها به دست آورد و نشان داد که این شاخص دارای مقدار صحیح و زوج است. از تعریف بی‌نظمی مستقیماً می‌توان نتیجه گرفت که گراف همبند G منظم است اگر و فقط اگر $Irr(G) = ۰$. بی‌نظمی گراف از شاخص‌های توپولوژیکی است که در نظریه‌ی گراف‌های شیمیایی[۴] بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است. در مرجع [۲۰] نیز نویسندگان نتایجی در خصوص بی‌نظمی گراف‌های دوبخشی به دست آورده‌اند. هانسن[۵] و ملوت[۶] [۱۸] گراف‌های با تعداد رأس و یال مشخص را که دارای بیشترین مقدار بی‌نظمی هستند طبقه بندی کرده‌اند. فتح تبار در مرجع [۱۰] این شاخص را به عنوان شاخص زاگرب[۷] سوم معرفی کرد. او همچنین روابط و کران‌هایی بر حسب سایر شاخص‌های توپولوژیک و پارامترهای گراف به دست آورد. همچنین بی‌نظمی درخت‌ها نیز توسط این نویسنده و همکاران بررسی شده است [۱۱].

عبدو[۸] و دیگران [۲] شاخص بی‌نظمی کلی[۹] گراف را که گسترشی از شاخص بی‌نظمی است در سال ۲۰۱۴ معرفی کردند. شاخص بی‌نظمی کلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Irr_t(G) = \frac{۱}{۲} \sum_{u,v \in V(G)} |d_G(u) - d_G(v)|$$

برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد بی‌نظمی و بی‌نظمی کلی گراف‌ها مراجع [۳، ۵، ۹، ۲۵، ۳۱]، و برای مطالعه در زمینه‌ی مفاهیم بنیادی نظریه‌ی گراف مراجع [۸، ۱۴، ۱۹]توصیه می‌شوند.

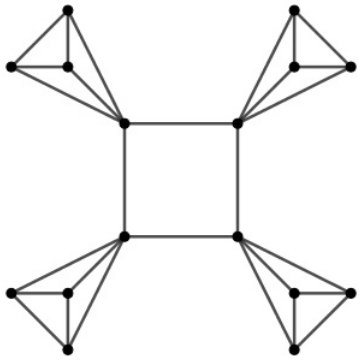
یکی از مفاهیم مهم در نظریه‌ی گراف، بررسی ساختارها و تبدیلات گراف است. از جمله تبدیلات مهم در این نظریه، ضرب گراف‌ها هستند. تا کنون تعداد زیادی از انواع ضرب در گراف‌ها معرفی و مطالعه شده است که هر کدام دارای اهداف و ساختار متفاوت هستند و در موضوعات مختلفی همچون شبکه‌ها، شیمی، ژنتیک، علوم کامپیوتر و ... کاربرد دارند [۱۵، ۱۶، ۲۱]. ضرب لکزیکوگرافی[۱۰] برای اولین بار توسط هاسدورف[۱۱] معرفی شد [۱۵]. برای دو گراف ساده و همبند $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ضرب لکزیکوگرافی را با علامت $G_۱[G_۲]$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی رأس‌های $G_۱[G_۲]$ عبارت است از $V_۱ \times V_۲$. دو رأس $(u_۱, v_۱)$ و $(u_۲, v_۲)$ در $G_۱[G_۲]$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $u_۱u_۲ \in E_۱$ یا $u_۱ = u_۲$ و $v_۱v_۲ \in E_۲$. اگر $G_۱$ گرافی با مرتبه حداقل دو باشد آنگاه $G_۱[G_۲]$ همبند است اگر و تنها اگر $G_۱$ همبند باشد. از تعریف ضرب لکزیکوگرافی مشخص است که این ضرب دارای خاصیت جابجایی نیست. شکل ۱ گراف $P_۲[K_۳]$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱: گراف $P_۲[K_۳]$.

[4] Chemical graph theory
[5] Hansen
[6] Melot
[7] Zagreb
[8] Abdo
[9] Total irregularity
[10] lexicographic product
[11] Hausdorff

ضرب کرونای دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ با علامت $G_1 \odot G_2$ نشان داده می‌شود. ضرب کرونا[12] در سال ۱۹۷۰ معرفی شد [۱۳]. این ضرب توسط یک کپی از G_1 و تعداد $|V_1|$ کپی از G_2 و اتصال iـامین رأس از G_1 به هر رأس از iـامین کپی از G_2 (برای $i = 1, 2, \cdots, |V_1|$) حاصل می‌شود. شکل ۲ ضرب کرونای $K_4 \odot C_3$ را نشان می‌دهد.



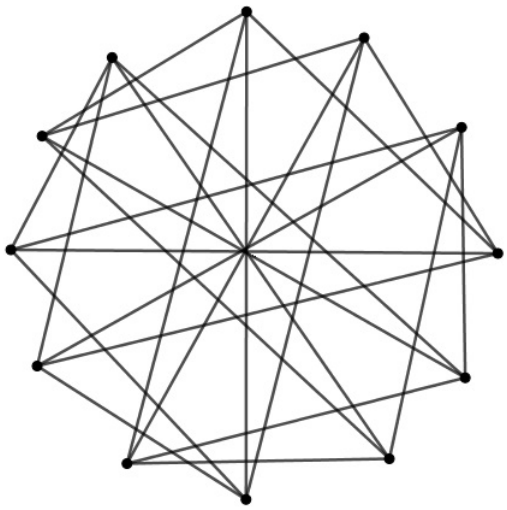
شکل ۲: گراف $K_4 \odot C_3$.

اگر G_1 و G_2 به ترتیب دارای n_1 و n_2 رأس و همچنین m_1 و m_2 یال باشند، آنگاه $G_1 \odot G_2$ دارای تعداد $n_1 n_2 + n_1$ رأس و $m_1 + n_1 m_2$ یال است. از تعریف ضرب کرونای دو گراف مشخص می‌شود که این ضرب خاصیت جابجایی ندارد. برای مثال $K_3 \odot C_4 \not\cong C_4 \odot K_3$. همچنین این ضرب خاصیت شرکت‌پذیری نیز ندارد. تا کنون پژوهش‌های زیادی در خصوص ضرب کرونا انجام شده است. این ضرب در علوم مختلف کاربرد دارد. به عنوان مثال در شیمی برای نمایش ترکیبات شیمیایی و ساختار آن‌ها به‌کار می‌رود [۲۳] و یا در ناوبری ربات‌ها در شبکه کاربرد دارد [۲۴]. ساختار این گراف ضربی حتی در علوم اجتماعی می‌تواند برای درک الگوی رفتاری گروهی از افراد جامعه مفید باشد. از این رو ضرب کرونا از اهمیت زیادی برخوردار است.

در نهایت ضرب مستقیم[13] دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ با علامت $G_1 \times G_2$ نشان داده می‌شود. این گراف دارای $V_1 \times V_2$ رأس است. دو رأس (x, y) و (u, v) در $G_1 \times G_2$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $xu \in E(G)$ و $yv \in E(H)$. ضرب مستقیم گراف‌ها دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری است. در مراجع مختلف ضرب مستقیم گراف‌ها با عناوینی همچون ضرب کرونکر[14]، ضرب تانسوری[15] نیز شناخته می‌شود. در یک مقاله قدیمی ثابت شده است که ضرب مستقیم دو گراف G و H همبند است اگر و تنها اگر هر دو G و H همبند باشند و هر دو با هم دوبخشی نباشند [۳۰]. در شکل ۳ ضرب مستقیم $K_3 \times C_4$ نشان داده شده است.

در بخش بعدی برخی ویژگی‌های دیگر این ضرب‌ها بیان می‌شود. همچنین برای دریافت مطالب بیشتر خوانندگان را به مطالعه‌ی مراجع [۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۶–۲۹] دعوت می‌کنیم. در مرجع [۱] برای گراف دلخواه G با n رأس و m یال، ساختار $R_k(G)$ تعریف شده است که گرافی شامل k کپی از گراف G با kn رأس و $k^2 m$ یال ایجاد می‌کند. بررسی شاخص بی‌نظمی تبدیلات گراف‌ها به طور خاص در مرجع [۴] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. نویسندگان این مقاله، برای شاخص بی‌نظمی انواع ضرب گراف‌ها کران بالا به دست آورده‌اند. در این مقاله ما ابتدا شاخص بی‌نظمی را برای سه ضرب لکزیکوگرافی، ضرب کرونا و ضرب مستقیم برحسب برخی پارامترهای گراف به دست می‌آوریم. سپس کران‌هایی برای شاخص بی‌نظمی این ضرب‌ها بیان می‌کنیم. در بخش آخر شاخص بی‌نظمی ساختار $R_k(G)$ را برای گراف ساده‌ی G تعیین می‌کنیم.

[12] Corona product
[13] Direct product
[14] Kronecker product
[15] Tensor product



شکل ۳: گراف $K_۳\times C_۴$.

۲ نتایج اصلی

در این بخش ابتدا ضمن واکاوی بیشتر سه نوع ضرب گراف‌ها، شاخص بی‌نظمی این ضرب‌ها را مورد بررسی قرار داده و همچنین کران‌هایی برای این آن‌ها تعیین می‌کنیم. در انتهای این بخش یک ساختار روی گراف را در نظر می‌گیریم و شاخص بی‌نظمی این ساختار را برای گراف‌های دلخواه به دست می‌آوریم.

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم $G_۱=(V_۱,E_۱)$ و $G_۲=(V_۲,E_۲)$ دو گراف ساده هستند و قرار می‌دهیم:

$$|V(G_۲)|=n_۲,\quad |V(G_۱)|=n_۱,\quad |E(G_۲)|=m_۲,\quad |E(G_۱)|=m_۱$$

همچنین، بزرگترین و کوچکترین درجه‌ی رأس‌ها در گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ را به ترتیب با $\Delta_۱$ و $\delta_۱$ و $\Delta_۲$ و $\delta_۲$ نشان می‌دهیم.

۱.۲ شاخص بی‌نظمی ضرب لکزیکوگرافی

قبل از بیان نتایج اصلی دو گزاره بیان و اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱.۲. *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف ساده، متناهی و همبند باشند. برای هر رأس (u,v) در $G_۱[G_۲]$ داریم*

$$d_{G_۱[G_۲]}(u,v)=d_{G_۱}(u).n_۲+d_{G_۲}(v).$$

اثبات. با توجه به تعریف، برای یال $uu'\in E_۱$، به تعداد رأس‌های $G_۲$، رأس (u,v) در $G_۱[G_۲]$ وجود دارد. بنابراین تعداد $d_{G_۱}(u).n_۲$ رأس به این صورت داریم. علاوه بر آن، در هر کپی از $G_۲$ یال‌هایی وجود دارند که مربوط به یال $vv'\in E_۲$ هستند و لذا نتیجه برقرار می‌باشد. □

گزاره ۲.۲. *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف ساده، متناهی و همبند باشند. آنگاه داریم*

$$|E\left(G_۱\left[G_۲\right]\right)|=m_۱n_۲^۲+n_۱m_۲$$

اثبات. یک یال دلخواه در $G_۱\left[G_۲\right]$ را در نظر می‌گیریم. این یال می‌تواند به یکی از دو شکل زیر باشد:

۱. یال‌های مرتبط با $G_۱$. برای هر یال $uu'\in E_۱$ و هر جفت از رأس‌های $v,v'\in V_۲$، یک یال $(u,v)\,(u',v')$ در $G_۱\left[G_۲\right]$ وجود دارد. بنابراین مجموع یال‌های به این شکل برابر است با $m_۱n_۲^۲$.

۲. یال‌های داخلی هر گراف. برای هر $u \in V_1$ و $vv' \in E_2$، یک یال در $G_1[G_2]$ وجود دارد. بنابراین مجموع یال‌های به این شکل برابر است با $n_1 m_1$.

لذا مجموع یال‌های $G_1[G_2]$ برابر است با $m_1 n_2^2 + n_1 m_2$. □

قضیه ۳.۲. *فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف ساده، متناهی و همبند باشند. آنگاه داریم*

$$Irr(G_1[G_2]) = n_1 Irr(G_2) + \sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} |n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y))|.$$

اثبات. طبق تعریف ضرب لکزیکوگرافی دو گراف G_1 و G_2، با توجه به توضیحات گزاره ۱.۲. یال‌های $G_1[G_2]$ را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد:

بخش اول شامل یال‌های درون کپی‌های G_2 هستند. در واقع به ازاء هر رأس در V_1 یک کپی از G_2 داریم. این یال‌ها به صورت $(u,x)(u,y)$ هستند به طوری که $xy \in E_2$. برای این بخش از یال‌ها داریم

$$\left|d_{G_1[G_2]}(u,x) - d_{G_1[G_2]}(u,y)\right| = |d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)| \qquad (۱.۲)$$

بخش دوم شامل یال‌های بین کپی‌ها هستند. این یال‌ها به صورت $(u,x)(v,y)$ می‌باشند به طوری که $x,y \in V_2$ و $uv \in E_1$. برای این بخش از یال‌ها داریم

$$\left|d_{G_1[G_2]}(u,x) - d_{G_1[G_2]}(v,y)\right| = |n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y))| \qquad (۲.۲)$$

با جمع روی همه‌ی یال‌ها در رابطه (۱.۲) خواهیم داشت:

$$\sum_{u \in V_1} \sum_{xy \in E_2} |d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)| = \sum_{u \in V_1} Irr(G_2) = n_1 Irr(G_2)$$

همچنین با جمع روی همه‌ی یال‌ها در رابطه (۲.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} \left|d_{G_1[G_2]}(u,x) - d_{G_1[G_2]}(v,y)\right| \\ &= \sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} |n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y))| \end{aligned}$$

با جمع دو رابطه بالا نتیجه حاصل می‌شود. □

در دو قضیه‌ی بعد احکام را در حالتی بررسی می‌کنیم که یکی از گراف‌های G_1 یا G_2 و یا هر دو آنها منظم هستند.

قضیه ۴.۲. *فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف ساده، متناهی و همبند باشند و G_2 یک گراف sـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr(G_1[G_2]) = n_2^3 Irr(G_1).$$

اثبات. طبق گزاره ۱.۲، برای هر رأس (u,x) در $G_1[G_2]$ داریم

$$d_{G_1[G_2]}(u,x) = d_{G_1}(u).n_2 + d_{G_2}(x)$$

چون G_2 sـ منظم است پس $d_{G_2}(x) = s$ و بنابراین

$$d_{G_1[G_2]}(u,x) = d_{G_1}(u).n_2 + s$$

حال اگر $(u,x)(u,y)$ یک یال در $G_1[G_2]$ از بخش اول در قضیه ۳.۲ باشد آنگاه

$$\left|d_{G_1[G_2]}(u,x) - d_{G_1[G_2]}(u,y)\right| = |(d_{G_1}(u).n_2 + s) - (d_{G_1}(u).n_2 + s)| = 0$$

پس یال‌های بخش اول سهمی در بی‌نظمی $G_۱[G_۲]$ ندارند. حال یک یال از بخش دوم به صورت $(u,x)(v,y)$ در نظر می‌گیریم به طوری که $uv \in E_۱$. داریم

$$\begin{aligned}\left|d_{G_۱[G_۲]}(u,x)-d_{G_۱[G_۲]}(v,y)\right| &= |(d_{G_۱}(u).n_۲+s)-(d_{G_۱}(v).n_۲+s)| \\ &= |n_۲(d_{G_۱}(u)-d_{G_۱}(v))| = n_۲\,|d_{G_۱}(u)-d_{G_۱}(v)|\end{aligned}$$

اما به ازاء هر یال $uv \in E_۱$ و هر دو رأس $x,y \in V_۲$، یک یال $(u,x)(v,y)$ در $G_۱[G_۲]$ وجود دارد. بنابراین تعداد این یال‌ها برابر است با $n_۲^۲$. پس سهم یال‌های بخش دوم در بی‌نظمی برابر است با

$$\sum_{uv\in E_۱} n_۲^۲.n_۲\,|d_{G_۱}(u)-d_{G_۱}(v)| = n_۲^۳ \sum_{uv\in E_۱} |d_{G_۱}(u)-d_{G_۱}(v)| = n_۲^۳ Irr\,(G_۱)\,.$$

□

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف ساده، متناهی و همبند باشند و $G_۱$ یک گراف rـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr\,(G_۱\,[G_۲]) = n_۱ Irr\,(G_۲) + ۲m_۱ Irr_t\,(G_۲)\,.$$

اثبات. چون $G_۱$ منظم است پس برای هر $u,v \in V_۱$، $d_{G_۱}(u) = d_{G_۱}(v) = r$. بنابراین داریم

$$\left|d_{G_۱[G_۲]}(u,x)-d_{G_۱[G_۲]}(u,y)\right| = |n_۲d_{G_۱}(u)+d_{G_۲}(x)-n_۲d_{G_۱}(u)-d_{G_۲}(y)| = |d_{G_۲}(x)-d_{G_۲}(y)|$$

پس سهم کل از یال‌های بخش اول برابر است با

$$\sum_{u\in V_۱}\sum_{xy\in E_۲} |d_{G_۲}(x)-d_{G_۲}(y)| = n_۱ Irr\,(G_۲)$$

در خصوص یال‌های بخش دوم داریم

$$\left|d_{G_۱[G_۲]}(u,x)-d_{G_۱[G_۲]}(v,y)\right| = \left|(n_۲r+d_{G_۲}(x))-(n_۲r+d_{G_۲}(y))\right| = |d_{G_۲}(x)-d_{G_۲}(y)|$$

پس سهم کل از یال‌های این بخش برابر است با

$$\sum_{xy\in E_۱}\sum_{x,y\in V_۲} |d_{G_۲}(x)-d_{G_۲}(y)| = \sum_{xy\in E_۱} ۲Irr_t\,(G_۲) = ۲m_۱ Irr_t\,(G_۲)$$

با جایگذاری دو عبارت به دست آمده حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۲. *فرض کنید $G_۱$ یک گراف rـ منظم و $G_۲$ یک گراف sـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr\,(G_۱\,[G_۲]) = ۰.$$

اثبات. چون $G_۱$ یک گراف rـ منظم و $G_۲$ یک گراف sـ منظم است، لذا $G_۱\,[G_۲]$ نیز گرافی منظم خواهد بود (درجه‌ی هر رأس در این گراف برابر است با $rn_۲ + s$) و لذا حکم برقرار است. □

در ادامه‌ی این بخش کران‌هایی برای بی‌نظمی ضرب لکزیکوگرافی دو گراف به دست می‌آوریم. ابتدا از یک کران ساده آغاز می‌کنیم.

گزاره ۷.۲. *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف ساده، متناهی و همبند باشند. آنگاه داریم*

$$Irr\,(G_۱\,[G_۲]) \geq n_۱ Irr(G_۲).$$

اثبات. از قضیه ۳.۲ می‌دانیم

$$Irr\left(G_1\left[G_2\right]\right) = n_1 Irr\left(G_2\right) + \sum_{uv\in E_1}\sum_{x,y\in V_2} \left|n_2(d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y))\right|$$

از طرف دیگر در جمله‌ی دوم عبارت سمت راست حداقل مقدار برابر صفر است بنابراین کران مورد نظر به دست می‌آید. □

در قضیه بعدی یک کران پایین بهبود یافته معرفی می‌کنیم.

قضیه ۸.۲. *برای هر دو گراف ساده، همبند و متناهی G_1 و G_2 داریم*

$$Irr\left(G_1\left[G_2\right]\right) \geq n_1 Irr\left(G_2\right) + {n_2}^3 Irr\left(G_1\right) - m_1 {n_2}^2 \Delta_{G_2}$$

که در آن $\Delta_{G_2} = \Delta_2 - \delta_2$.

اثبات. قرار می‌دهیم $a = n_2(d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v))$ و $b = d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)$. حال اگر با این جایگذاری، نامساوی مثلثی را برای هر جمله‌ی قدر مطلق در حکم قضیه ۳.۲ به کار ببریم خواهیم داشت

$$\left|n_2\left(d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v)\right) + \left(d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right)\right| \geq n_2\left|d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v)\right| - \left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right|$$

با جمع روی کل خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\sum_{uv\in E_1}\sum_{x,y\in V_2} \left|n_2\left(d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v)\right) + \left(d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right)\right| \\
\geq &\sum_{uv\in E_1}\sum_{x,y\in V_2} \left(n_2\left|d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v)\right| - \left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right|\right) \\
= &n_2\cdot {n_2}^2 \sum_{uv\in E_1} \left|d_{G_1}(u)-d_{G_1}(v)\right| - \sum_{uv\in E_1}\sum_{x,y\in V_2} \left(\left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right|\right) \\
= &{n_2}^3 Irr\left(G_1\right) - m_1 \sum_{x,y\in V_2} \left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right|
\end{aligned}$$

از طرف دیگر، برای هر دو جفت رأس $x, y \in V_2$ داریم $\left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right| \leq \Delta_{G_2}$ و لذا

$$\sum_{x,y\in V_2} \left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right| \leq {n_2}^2 \Delta_{G_2}$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$Irr\left(G_1\left[G_2\right]\right) \geq n_1 Irr\left(G_2\right) + {n_2}^3 Irr\left(G_1\right) - m_1 {n_2}^2 \Delta_{G_2}$$

□

نتیجه ۹.۲. *برای هر دو گراف ساده، همبند و متناهی G_1 و G_2 داریم*

$$Irr\left(G_1\left[G_2\right]\right) \geq n_1 Irr\left(G_2\right) + {n_2}^3 Irr\left(G_1\right) - 2m_1 Irr_t\left(G_2\right).$$

اثبات. با قرار دادن $\sum_{x,y\in V_2} \left|d_{G_2}(x)-d_{G_2}(y)\right| = 2Irr_t\left(G_2\right)$ در اثبات قضیه ۸.۲ نتیجه به دست می‌آید. □

در آخرین قضیه این قسمت یک کران بالا برای $Irr\left(G_1\left[G_2\right]\right)$ به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۰.۲. *برای هر دو گراف ساده، همبند و متناهی G_1 و G_2 داریم*

$$Irr(G_1[G_2]) \leq n_1 Irr(G_2) + n_2^3 Irr(G_1) + m_1 n_2^2 \Delta_{G_2}.$$

اثبات. طبق قضیه ۳.۲ داریم

$$Irr(G_1[G_2]) = n_1 Irr(G_2) + \sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} \left| n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)) \right|.$$

قرار می‌دهیم $a = n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v))$ و $b = d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)$. با استفاده از نامساوی مثلثی $|a+b| \leq |a| + |b|$ داریم

$$\left| n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)) \right| \leq n_2 \left| d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v) \right| + \left| d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y) \right|.$$

با جمع روی $uv \in E_1$ و $x, y \in V_2$ از هر دو طرف داریم

$$\sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} |a+b| \leq \underbrace{\sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} n_2 \left| d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v) \right|}_{\text{(I)}} + \underbrace{\sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} \left| d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y) \right|}_{\text{(II)}}.$$

محاسبه‌ی جمله‌ی (I). برای هر یال ثابت $uv \in E_1$، مقدار $n_2 |d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)|$ مستقل از x, y است. چون تعداد جفت‌های $(x, y) \in V_2 \times V_2$ برابر n_2^2 است، داریم

$$\sum_{x,y \in V_2} n_2 \left| d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v) \right| = n_2^3 \left| d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v) \right|.$$

با جمع روی $uv \in E_1$:

$$\text{(I)} = n_2^3 \sum_{uv \in E_1} \left| d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v) \right| = n_2^3 \, Irr(G_1).$$

محاسبه‌ی جمله‌ی (II). عبارت $\sum_{x,y \in V_2} |d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)|$ مستقل از یال uv است؛ آن را با S نشان می‌دهیم:

$$S := \sum_{x,y \in V_2} \left| d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y) \right|.$$

چون تعداد یال‌های E_1 برابر m_1 است،

$$\text{(II)} = m_1 \, S.$$

اکنون S را کران می‌زنیم. برای هر دو رأس $x, y \in V_2$ داریم $\delta_2 \leq d_{G_2}(x), d_{G_2}(y) \leq \Delta_2$، در نتیجه

$$\left| d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y) \right| \leq \Delta_2 - \delta_2 = \Delta_{G_2}.$$

چون تعداد جفت‌های (x, y) برابر n_2^2 است،

$$S \leq n_2^2 \, \Delta_{G_2}$$

بنابراین

$$\text{(II)} \leq m_1 n_2^2 \Delta_{G_2}.$$

با ترکیب دو کران به‌دست‌آمده برای (I) و (II):

$$\sum_{uv \in E_1} \sum_{x,y \in V_2} \left| n_2(d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)) + (d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)) \right| \leq n_2^3 Irr(G_1) + m_1 n_2^2 \Delta_{G_2}.$$

با جایگذاری در رابطه‌ی قضیه ۳.۲:

$$Irr(G_1[G_2]) \leq n_1 Irr(G_2) + n_2^3 Irr(G_1) + m_1 n_2^2 \Delta_{G_2}. \qquad \square$$

نتیجه ۱۱.۲. *برای هر دو گراف ساده، همبند و متناهی G_1 و G_2 داریم*

$$Irr(G_1[G_2]) \leq n_1 Irr(G_2) + n_2^3 Irr(G_1) + 2m_1\, Irr_t(G_2).$$

اثبات. طبق تعریف بی‌نظمی کلی،

$$Irr_t(G_2) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_2} |d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)|,$$

بنابراین

$$S = \sum_{x,y \in V_2} |d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)| = 2\, Irr_t(G_2).$$

این یک تساوی دقیق است (نه یک کران)، چرا که S دقیقاً همان مجموعی است که در تعریف $Irr_t(G_2)$ ضرب‌شده در ۲ ظاهر می‌شود. با جایگذاری مستقیم این تساوی به‌جای کرانِ $S \leq n_2^2 \Delta_{G_2}$ در گام (II) از اثبات قضیه ۱۰.۲:

$$(\mathrm{II}) = m_1\, S = m_1 \cdot 2\, Irr_t(G_2) = 2m_1\, Irr_t(G_2).$$

با جایگذاری این مقدار در جمع‌بندیِ اثبات قضیه ۱۰.۲ به‌جای $m_1 n_2^2 \Delta_{G_2}$:

$$Irr(G_1[G_2]) \leq n_1 Irr(G_2) + n_2^3 Irr(G_1) + 2m_1\, Irr_t(G_2). \qquad \square$$

۲.۲ شاخص بی‌نظمی ضرب کرونا

اگر G_1 و G_2 دو گراف ساده باشند، ضرب کرونای آنها را با $G_1 \bigodot G_2$ نشان می‌دهیم و داریم

$$V\left(G_1 \bigodot G_2\right) = V(G_1) \bigcup_{u \in V(G_1)} V(G_{2u})$$

که در آن G_{2u} یک کپی از G_2 مربوط به رأس u است. استفاده‌ی مستقیم از تعریف ضرب کرونا نتیجه می‌دهد که برای هر $u \in V_1$ داریم

$$d_{G_1 \odot G_2}(u) = d_{G_1}(u) + n_2$$

همچنین برای هر $x \in G_{2u}$ داریم

$$d_{G_1 \odot G_2}(x) = d_{G_1}(x) + 1$$

سه نوع یال در $G_1 \bigodot G_2$ می‌توان در نظر گرفت:

۱. یال‌های اصلی G_1. این یال‌ها عبارتاند از همه‌ی یال‌های $uv \in E_1$. برای این نوع یال‌ها داریم

$$\left|d_{G_1 \odot G_2}(u) - d_{G_1 \odot G_2}(v)\right| = \left|(d_{G_1}(u) + n_2) - (d_{G_1}(v) + n_2)\right| = \left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right|.$$

۲. یال‌های هر کپی G_2. این یال‌ها در واقع همان یال‌های G_2 هستند و لذا در این نوع از یال‌ها داریم

$$\left|d_{G_1 \odot G_2}(x) - d_{G_1 \odot G_2}(y)\right| = \left|(d_{G_2}(x) + 1) - (d_{G_2}(y) + 1)\right| = \left|d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)\right|.$$

۳. یال‌های بین G_1 و کپی‌های G_2. این یال‌ها عبارتاند از همه‌ی یال‌هایی مانند ux. برای این نوع یال‌ها اختلاف درجات عبارت است از

$$\left|(d_{G_1}(u) + n_2) - (d_{G_2}(x) + 1)\right|.$$

بر اساس وجود این سه نوع یال و با جمع روی همه‌ی یال‌ها قضیه بعد را خواهیم داشت.

قضیه ۱۲.۲. *برای هر دو گراف ساده، همبند و متناهی $G_۱$ و $G_۲$ داریم*

$$Irr\left(G_۱ \bigodot G_۲\right) = Irr\left(G_۱\right) + n_۱ Irr\left(G_۲\right) + \sum_{u\in V_۱}\sum_{x\in V_۲} |(d_{G_۱}(u)+n_۲)-(d_{G_۲}(x)+۱)|.$$

اکنون حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که یکی از گراف‌های $G_۱$ یا $G_۲$ و یا هر دو آنها منظم هستند.

قضیه ۱۳.۲. *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف ساده، همبند و متناهی باشند به طوری که $G_۱$ یک گراف rـ منظم و $G_۲$ یک گراف دلخواه باشد. آنگاه*

$$Irr\left(G_۱ \bigodot G_۲\right) = n_۱ Irr\left(G_۲\right) + n_۱ \sum_{x\in V_۲} |r+n_۲-d_{G_۲}(x)-۱|.$$

اثبات. برای یال‌های اصلی $G_۱$ داریم

$$\left|d_{G_۱\odot G_۲}(u) - d_{G_۱\odot G_۲}(v)\right| = |(r+n_۲)-(r+n_۲)| = ۰$$

پس سهم این نوع یال‌ها برابر صفر است. در مورد یال‌های هر کپی $G_۲$ داریم

$$\left|d_{G_۱\odot G_۲}(x) - d_{G_۱\odot G_۲}(y)\right| = |d_{G_۲}(x) - d_{G_۲}(y)|$$

چون تعداد $n_۱$ کپی از $G_۲$ داریم، سهم کل برابر است با $n_۱ Irr\left(G_۲\right)$. در نهایت برای یال‌های اتصال دهنده u به $G_{۲u}$، به ازاء هر $u\in V_۱$ و هر $x\in V(G_{۲u})$ داریم

$$\left|d_{G_۱\odot G_۲}(u) - d_{G_۱\odot G_۲}(x)\right| = |r+n_۲-d_{G_۲}(x)-۱|$$

با جمع سه عبارت بالا نتیجه به دست می‌آید. □

قضیه ۱۴.۲. *فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف ساده، همبند و متناهی باشند به طوری که $G_۱$ یک گراف دلخواه و $G_۲$ یک گراف sـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr\left(G_۱ \bigodot G_۲\right) = Irr\left(G_۱\right) + n_۲ \sum_{u\in V_۱} |d_{G_۱}(u)+n_۲-(s+۱)|.$$

اثبات. در حالتی که $G_۲$ یک گراف sـ منظم است وضعیت یال‌های $G_۱ \bigodot G_۲$ را بررسی می‌کنیم.
برای یال‌های اصلی $G_۱$ داریم

$$\left|d_{G_۱\odot G_۲}(u) - d_{G_۱\odot G_۲}(v)\right| = |d_{G_۱}(u) - d_{G_۱}(v)|$$

پس سهم این نوع یال‌ها برابر $Irr\left(G_۱\right)$ است. در مورد یال‌های هر کپی $G_۲$، چون $G_۲$ یک گراف sـ منظم است داریم

$$\left|d_{G_۱\odot G_۲}(x) - d_{G_۱\odot G_۲}(y)\right| = ۰$$

پس این نوع یال‌ها سهمی در بی‌نظمی گراف ندارند. در نهایت برای یال‌های اتصال دهنده u به $G_{۲u}$، به ازاء هر $u\in V_۱$ و هر $x\in V(G_{۲u})$ داریم

$$\left|d_{G_۱\odot G_۲}(u) - d_{G_۱\odot G_۲}(x)\right| = |(d_{G_۱}(u)+n_۲)-(s+۱)|$$

و چون برای هر u دقیقاً $n_۲$ یال از این نوع داریم لذا مجموع برابر است با

$$n_۲ \sum_{u\in V_۱} |d_{G_۱}(u)+n_۲-(s+۱)|$$

نتیجه از جمع سه عبارت بالا به دست می‌آید. □

نتیجه ۱۵.۲. *فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف ساده، همبند و متناهی باشند به طوری که G_1 یک گراف rـ منظم و G_2 یک گراف sـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr\left(G_1 \bigodot G_2\right) = n_1 n_2 \left|r + n_2 - (s+1)\right|.$$

اثبات. در این حالت تنها یال‌های بین G_1 و کپی‌های G_2 در بی‌نظمی گراف نقش دارند. بنابراین برای هر یک از این یال‌ها داریم

$$\left|d_{G_1 \odot G_2}(u) - d_{G_1 \odot G_2}(x)\right| = \left|r + n_2 - (s+1)\right|$$

اما تعداد این یال‌ها برابر است با $n_1 n_2$ و بنابراین نتیجه برقرار است. □

در آخرین قضیه این قسمت یک کران بالا برای $Irr\left(G_1 \bigodot G_2\right)$ به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۶.۲. *برای هر دو گراف ساده، همبند و متناهی G_1 و G_2 داریم*

$$Irr\left(G_1 \bigodot G_2\right) \leq Irr\left(G_1\right) + n_1 Irr\left(G_2\right) + n_1 n_2 \left(\Delta_1 + \Delta_2 + n_2 - 1\right).$$

اثبات. طبق قضیه ۱۲.۲ داریم

$$Irr\left(G_1 \bigodot G_2\right) = Irr\left(G_1\right) + n_1 Irr\left(G_2\right) + \sum_{u \in V_1} \sum_{x \in V_2} \left|\left(d_{G_1}(u) + n_2\right) - \left(d_{G_2}(x) + 1\right)\right|$$

با استفاده از نامساوی مثلثی خواهیم داشت

$$\left|d_{G_1}(u) + n_2 - d_{G_2}(x) - 1\right| \leq \left|d_{G_1}(u) + n_2 - 1\right| + \left|d_{G_2}(x)\right|$$

از طرفی می‌دانیم $\delta_1 \leq d_{G_1}(u) \leq \Delta_1$ و $d_{G_2}(x) \leq \Delta_2$. بنابراین

$$d_{G_1}(u) + n_2 - 1 \leq \Delta_1 + n_2 - 1$$

و در نتیجه

$$\left|d_{G_1}(u) + n_2 - 1\right| + \left|d_{G_2}(x)\right| \leq \Delta_1 + n_2 - 1 + \Delta_2$$

در نهایت با جمع روی کل داریم

$$Irr\left(G_1 \bigodot G_2\right) \leq Irr\left(G_1\right) + n_1 Irr\left(G_2\right) + n_1 n_2 \left(\Delta_1 + \Delta_2 + n_2 - 1\right).$$

□

۳.۲ شاخص بی‌نظمی ضرب مستقیم

اگر G_1 و G_2 دو گراف ساده باشند، ضرب مستقیم آنها با علامت $G_1 \times G_2$ نشان داده می‌شود. رأس‌های $G_1 \times G_2$ جفت‌های (u,x) هستند به طوری که $u \in V_1$ و $x \in V_2$. درجه‌ی هر رأس (u,x) برابر است با $d_{G_1}(u) d_{G_2}(x)$ و هر یال در $G_1 \times G_2$ دقیقاً بین (u,x) و (v,y) وجود دارد به طوری که $v \in V_1$ و $y \in V_2$، $xy \in E_2$ و $uv \in E_1$. بنابراین اختلاف درجه روی این یال برابر است با

$$\left|d_{G_1}(u) d_{G_2}(x) - d_{G_1}(v) d_{G_2}(y)\right|.$$

با گرفتن مجموع روی همه‌ی یال‌های $G_1 \times G_2$ (با توجه به این‌که هر جفت یال $uv \in E_1$ و $xy \in E_2$ دقیقاً دو یال متناظر $(u,x)(v,y)$ و $(u,y)(v,x)$ در $G_1 \times G_2$ می‌سازد) داریم

$$Irr(G_1 \times G_2) = \sum_{uv \in E_1} \sum_{xy \in E_2} \Big(\left|d_{G_1}(u) d_{G_2}(x) - d_{G_1}(v) d_{G_2}(y)\right| + \left|d_{G_1}(u) d_{G_2}(y) - d_{G_1}(v) d_{G_2}(x)\right|\Big).$$

در ادامه حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که یکی از گراف‌های G_1 یا G_2 و یا هر دوی آن‌ها منظم هستند.

قضیه ۱۷.۲. *فرض کنید G_1 یک گراف دلخواه و G_2 یک گراف sـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr(G_1 \times G_2) = 2s\, m_2\, Irr(G_1).$$

اثبات. چون G_2 یک گراف sـ منظم است، برای هر $x, y \in V_2$ داریم $d_{G_2}(x) = d_{G_2}(y) = s$. لذا برای هر یال ثابت $uv \in E_1$ و هر یال ثابت $xy \in E_2$، سهم دو یال متناظر $(u,x)(v,y)$ و $(u,y)(v,x)$ در $G_1 \times G_2$ به‌ترتیب برابرند با

$$\left|d_{G_1}(u)d_{G_2}(x) - d_{G_1}(v)d_{G_2}(y)\right| = \left|d_{G_1}(u)\cdot s - d_{G_1}(v)\cdot s\right| = s\left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right|,$$

$$\left|d_{G_1}(u)d_{G_2}(y) - d_{G_1}(v)d_{G_2}(x)\right| = \left|d_{G_1}(u)\cdot s - d_{G_1}(v)\cdot s\right| = s\left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right|.$$

پس مجموع سهم این دو یال (متناظر با یک جفت (uv, xy)) برابر است با $2s\left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right|$.
با جمع روی $uv \in E_1$ و $xy \in E_2$:

$$Irr(G_1 \times G_2) = \sum_{uv\in E_1}\sum_{xy\in E_2} 2s\left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right| = 2s\sum_{uv\in E_1}\left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right| \cdot \sum_{xy\in E_2} 1.$$

چون تعداد یال‌های E_2 برابر m_2 است،

$$Irr(G_1 \times G_2) = 2s\, m_2 \sum_{uv\in E_1}\left|d_{G_1}(u) - d_{G_1}(v)\right| = 2s\, m_2\, Irr(G_1). \qquad \square$$

با به‌کار بردن استدلال مشابه قضیه ۱۷.۲ قضیه‌ی بعد به دست می‌آید.

قضیه ۱۸.۲. *فرض کنید G_2 یک گراف دلخواه و G_1 یک گراف rـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr(G_1 \times G_2) = 2r\, m_1\, Irr(G_2).$$

اثبات. چون G_1 یک گراف rـ منظم است، برای هر $u, v \in V_1$ داریم $d_{G_1}(u) = d_{G_1}(v) = r$. لذا برای هر یال ثابت $uv \in E_1$ و هر یال ثابت $xy \in E_2$، سهم دو یال متناظر $(u,x)(v,y)$ و $(u,y)(v,x)$ به‌ترتیب برابرند با

$$\left|d_{G_1}(u)d_{G_2}(x) - d_{G_1}(v)d_{G_2}(y)\right| = r\left|d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)\right|,$$

$$\left|d_{G_1}(u)d_{G_2}(y) - d_{G_1}(v)d_{G_2}(x)\right| = r\left|d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)\right|.$$

پس مجموع سهم این دو یال برابر است با $2r\left|d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)\right|$.
با جمع روی $uv \in E_1$ و $xy \in E_2$ و توجه به این‌که تعداد یال‌های E_1 برابر m_1 است، داریم

$$Irr(G_1 \times G_2) = 2r\, m_1 \sum_{xy\in E_2}\left|d_{G_2}(x) - d_{G_2}(y)\right| = 2r\, m_1\, Irr(G_2). \qquad \square$$

نتیجه ۱۹.۲. *فرض کنید G_1 یک گراف rـ منظم و G_2 یک گراف sـ منظم باشد. آنگاه*

$$Irr(G_1 \times G_2) = 0.$$

اثبات. چون G_1 یک گراف rـ منظم است، طبق قضیه ۱۸.۲ داریم

$$Irr(G_1 \times G_2) = 2r\, m_1\, Irr(G_2).$$

اما G_2 نیز منظم است، پس $Irr(G_2) = 0$؛ در نتیجه

$$Irr(G_1 \times G_2) = 2r\, m_1 \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

۴.۲ شاخص بی‌نظمی ساختار $R_k(G)$

فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال باشد. در مرجع [۱] برای عدد صحیح $k \geq ۲$، ساختاری با نام $R_k(G)$ به صورت زیر تعریف شده است:
فرض کنیم $V(G) = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$، تعداد k کپی از G با مجموعه رأس‌ها و یال‌های زیر در نظر می‌گیریم

$$V\left(G^i\right) = \left\{v_۱^i, v_۲^i, \cdots, v_n^i\right\}$$
$$E\left(G^i\right) = \left\{v_r^i v_s^i | v_r v_s \in E(G)\right\}$$

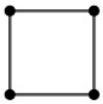
که در آن $i = \{۱, ۲, \cdots k\}$. در این صورت

$$V\left(R_k(G)\right) = \bigcup_{i=۱}^{k} V\left(G^i\right)$$

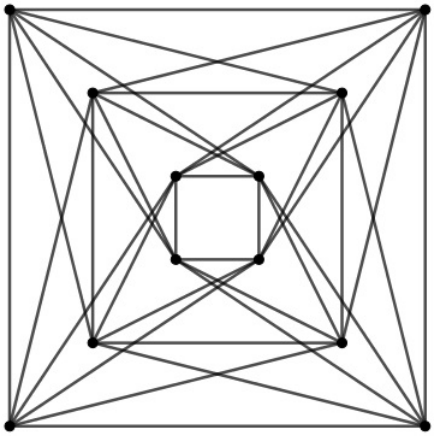
و

$$E\left(R_k(G)\right) = \bigcup_{i=۱}^{k} E\left(G^i\right) \bigcup \left\{v_r^i v_s^j | i \neq j, v_r v_s \in E(G)\right\}.$$

برای مثال اگر G گراف نشان داده شده در شکل ۴ باشد، $R_۳(G)$ در شکل ۵ نمایش داده شده است.



شکل ۴: گراف G.



شکل ۵: گراف $R_۳(G)$.

قضیه ۲۰.۲. *برای هر گراف همبند و ساده‌ی G و هر عدد صحیح $k \geq 1$ داریم*

$$Irr\left(R_k(G)\right) = k^3 Irr(G).$$

اثبات. یک یال دلخواه $xy \in E(R_k(G))$ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف بی‌نظمی گراف داریم

$$Irr\left(R_k(G)\right) = \sum_{xy \in E(R_k(G))} \left|d_{R_k(G)}(x) - d_{R_k(G)}(y)\right|.$$

علاوه بر این، طبق تعریف ساختار $R_k(G)$، متناظر با یال xy در این گراف، یک یال $uv \in E(G)$ وجود دارد به طوری که $x = u_i$ و $y = v_j$، به ازاء $1 \leq i, j \leq k$. همچنین داریم

$$\left|d_{R_k(G)}(x) - d_{R_k(G)}(y)\right| = \left|kd_G(u) - kd_G(v)\right| = k\left|d_G(u) - d_G(v)\right|.$$

از طرف دیگر، هر یال $uv \in E(G)$ دقیقاً k^2 یال متناظر در $R_k(G)$ ایجاد می‌کند. بنابراین سهم هر یال $uv \in E(G)$ از مجموع بی‌نظمی گراف برابر است با

$$k^2 \cdot k\left|d_G(u) - d_G(v)\right| = k^3\left|d_G(u) - d_G(v)\right|$$

با جمع روی همه یال‌ها نتیجه می‌گیریم

$$Irr\left(R_k(G)\right) = k^3 \sum_{uv \in E(G)} \left|d_G(u) - d_G(v)\right| = k^3 Irr(G).$$

□

نتیجه ۲۱.۲. *اگر G یک گراف همبند، ساده و منظم باشد، آنگاه $Irr\left(R_k(G)\right) = 0$.*

برای گراف G و عدد صحیح $l \geq 1$ تعریف می‌کنیم

$$R_k^l(G) = R_k\left(R_k^{l-1}(G)\right), R_k^1(G) = R_k(G).$$

قضیه ۲۲.۲. *برای هر گراف همبند و ساده‌ی G و اعداد صحیح $l \geq 1$ و $k \geq 1$ داریم*

$$Irr\left(R_k^l(G)\right) = k^{3l} Irr(G).$$

اثبات. برای هر رأس $v \in V(G)$، اگر v_j یک رأس متناظر با رأس v در کپی j ام در $R_k^l(G)$ باشد آنگاه با استقرا روی l می‌توان ثابت کرد

$$d_{R_k^l(G)}\left(v_j\right) = k^l d_G(v) \tag{۳.۲}$$

از طرف دیگر در هر مرحله، هر یال به k^2 یال تبدیل می‌شود. بنابراین

$$\left|E(R_k^l(G))\right| = k^{2l}\left|E\right|$$

طبق تعریف داریم

$$Irr\left(R_k^l(G)\right) = \sum_{xy \in E(R_k^l(G))} \left|d_{R_k^l(G)}(x) - d_{R_k^l(G)}(y)\right|$$

هر یال xy در $R_k^l(G)$ متناظر با یالی مانند uv در G است. همچنین، طبق رابطه‌ی (۳.۲) داریم

$$\left|d_{R_k^l(G)}(x) - d_{R_k^l(G)}(y)\right| = k^l\left|d_G(u) - d_G(v)\right|$$

با توجه به اینکه هر یال uv در G دقیقاً $k^{۲l}$ یال در $R_k^l(G)$ ایجاد می‌کند، پس سهم هر یال uv برابر است با

$$k^{۲l} \cdot k^l \left|d_G(u) - d_G(v)\right| = k^{۳l} \left|d_G(u) - d_G(v)\right|$$

با جمع روی تمام یال‌ها داریم

$$Irr\left(R_k^l(G)\right) = k^{۳l} \sum_{uv \in E(G)} \left|d_G(u) - d_G(v)\right| = k^{۳l} Irr(G).$$

□

نتیجه ۲۳.۲. *اگر G یک گراف همبند، ساده و منظم باشد، آنگاه*

$$Irr\left(R_k^l(G)\right) = ۰.$$

۳ نتیجه گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن تبدیلات گراف‌ها از جمله حاصل‌ضرب‌های گرافی و یک ساختار خاص روی گراف‌ها و تمرکز بر شاخص بی‌نظمی، روابط دقیق و کران‌هایی برای این شاخص روی تبدیلات گراف ارائه شده است. در هر مورد، حالت‌های خاص از جمله منظم بودن گراف‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان دادند که در ساختارهایی چون $R_k(G)$، منظم بودن گراف پایه منجر به بی‌نظمی صفر می‌شود، در حالی که در ضرب‌های گراف سهم بخش‌های مختلف یال‌ها، رفتار متفاوتی ایجاد می‌کند. این دست‌آوردها ضمن ارائه‌ی یک چارچوب برای مطالعه‌ی بی‌نظمی در ساختارهای مشتق شده از گراف‌ها، مسیر را برای توسعه‌ی نتایج در سایر حالات و همچنین تحلیل‌های اکسترمال هموار می‌سازد.

مراجع

[1] Abd Aziz, N. A., 2026. A note on graphs with integer Sombor index. *Commun. Comb. Optim., 11*, pp. 205–209.

[2] Abdo, H., Brandt, S. and Dimitrov, D., 2014. The total irregularity of a graph. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 16*, pp. 201–206.

[3] Abdo, H., Dimitrov, D. and Gao, W., 2017. On the irregularity of some molecular structures. *Canad. J. Chem., 95*, pp. 174–183.

[4] Abdo, H. and Dimitrov, D., The irregularity of graphs under graph operations, *Discuss. Math. Graph Theory* **34** (2014) 263–278.

[5] Abdo, H. and Dimitrov, D., 2014. The total irregularity of graphs under graph operations. *Miskolc Math. Notes., 15*, pp. 3–17.

[6] Albertson, M. O., 1997, The irregularity of a graph. *Ars Combin, 46*, pp. 219–225.

[7] Barriére, L., Comellas, F., Dalfó, C. and Fiol, M. A., 2009. The hierarchical product of graphs. *Discrete Appl. Math., 157*.

[8] Bondy, A., Murty, R., et al. 1976. Graph theory with applications, volume 290. *Macmillan London*.

[9] Dimitrov, D. and Réti, T., 2014. Graphs with equal irregularity indices. *Acta Polytechn. Hung., 11* (4), pp. 41–57.

[10] Fath–Tabar, G. H., 2011. Old and new Zagreb indices of graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 65*, pp. 79–84.

[11] Fath-tabar, G. H., Gutman, I. and Nasiri, R., 2013. Extremely irregular trees. *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts., 38*, pp. 1–8.

[12] Forcan, J. and Qi, J., 2024. Maker-Breaker domination number for Cartesian products of path graphs P2 and Pn, Discrete Math. *Theor. Comput. Sci., 25* (2).

[13] Frucht, R. and Harary, F., 1970. On the corona of two graphs. *Aequationes mathematicae, 4* (3), pp. 322-325.

[14] Godsil, C., and Royle, G. F., 2001. Algebraic Graph Theory. *Springer*.

[15] Gutman, I., 2016. Irregularity of molecular graphs. *Kragujevac Journal of Science, 38*, pp. 71-81.

[16] Hammack, R., Imrich, W. and Klavžar, S., 2011. HandBook of Product Graphs, *CRC Press*, 2ndedition.

[17] Hammack, R., Imrich, W. and Klavžar, S., 2011. Handbook of graph products. *Discrete Math. Appl.*

[18] Hansen, P. and Mélot, H., 2005. Variable neighborhood search for extremal graphs. 9. Bounding the irregularity of a graph. *Discr. Math. Theor. Comput. Sci., 69*, pp. 253–264.

[19] Harary, F., 1969. Graph Theory. *Addison-Wesley, Reading, MA*.

[20] Henning, M. A. and Rautenbach, D., 2007. On the irregularity of bipartite graph. *Discrete Math.,307*, pp. 1467–1472.

[21] Imrich, W. and Klavžar, S., 2000, Product Graphs, Structure and Recognition. *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley*.

[22] Imrich, W., Klavžar, S. and Rall, D. F., 2008. Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Product. *A.K Press*.

[23] Johnson, M. A., 1993. Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design. *J. Biopharm. Stat., 3*, pp. 203–236.

[24] Khuller, S., Raghavachari, B. and Rosenfeld, A., 1996. Landmarks in graphs. *Discret. Appl. Math., 70*, pp. 217–229.

[25] Réti, T. and Dimitrov, D., 2013. On irregularities of bidegreed graphs, *Acta Polytechn. Hung., 10* (7), pp. 117–134.

[26] Spacapan, S., 2008. Connectivity of Cartesian products of graphs. *Appl. Math. Lett., 21*, pp. 682-685.

[27] Stong, R., 1991. Hamilton decompositions of Cartesian products of graphs. *Discrete Math., 90*, pp. 169–190.

[28] Tardif, C., 1998. Graph products and the chromatic difference sequence of vertex-transitive graphs. *Discrete Math., 185*, pp. 193–200.

[29] Taylor, D. T., 2009. Perfect r-codes in lexicographic products of graphs. *Ars Combin, 93*, pp. 215–223.

[30] Weichsel, P. M., 1962. THE KRONECKER PRODUCT OF GRAPHS.

[31] Zhu, Y., You, L. and Yang, J., 2016. The minimal total irregularity of some classes of graphs. *Filomat, 30*, pp. 1203–1211.