

Certain functors for some p -groups of class two with derived subgroup of order p^2

Azam Kaheni ⁽¹⁾  and Farangis Johari ⁽²⁾

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran

⁽²⁾ Center of Mathematics, Computer Science and Cognition, Federal University of ABC, Av. dos Estados, 5001 – Bangú, Santo André, 09210-580, São Paulo, Brazil

Received: 28 January 2026

Accepted: 18 September 2026

Accepted: 25 September 2026

Abstract: Let G be a finite d -generator p -group of class two such that G/G' is elementary abelian and $G' \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. The aim of the present work is to characterize the exact structure of some functors including the Schur multiplier, the non-abelian tensor square, and the non-abelian exterior square of G . We also give the corank of G .

Keywords: Schur multiplier, Non-abelian tensor square, Non-abelian exterior square, p -groups.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author
(Azam Kaheni) azamkaheni@birjand.ac.ir



پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶

شاپا الکترونیکی: ۲۲۸۸-۲۵۵۴

DOI: 10.22034/mm.2026.131057.0

سال ۱۴۰۵، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۹۹-۱۰۸

تابعگونی‌های خاص برای برخی p -گروه‌ها از کلاس دو با زیرگروه مشتق از مرتبه p^2

اعظم کاهنی^(۱) و فرنکیس جوهری^(۲)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
(۲) مرکز ریاضیات، علوم کامپیوتر و شناخت، دانشگاه فدرال ABC، سائو پائولو، برزیل

تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۷/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۸

چکیده:

فرض کنید G یک p -گروه d مولدی متناهی از کلاس دو باشد به طوری که G/G' آبلی مقدماتی و $G' \cong G$. هدف از کار حاضر، توصیف ساختار دقیق برخی از تابعگونی‌ها از جمله ضربگرشور، مربع تانسور غیرآبلی و مربع خارجی غیرآبلی G است. همچنین هم‌رتبه G را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: ضربگرشور، مربع تانسوری غیرآبلی، مربع خارجی غیرآبلی، p -گروه‌ها

رده‌بندی ریاضی: 20D15; 20C25

۱ مقدمه و انگیزه

برای گروه G مرکز، زیرگروه مشتق و زیرگروه فراتینی به ترتیب با $Z(G)$ ، G' و $\Phi(G)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید p یک عدد اول باشد. زیرگروه $\langle x^p \mid x \in G \rangle$ از G با G^p نشان داده می‌شود. همچنین برای نشان دادن نمای G و $\mathbb{Z}_n^{(r)}$ نشان دهنده مجموع مستقیم r -نسخه $\mathbb{Z}_n$ باشد، که در آن گروه دوری متناهی از مرتبه n است. مفهوم مربع تانسوری غیرآبلی $G \otimes G$ برای گروه G ، حالت خاصی از حاصلضرب تانسوری غیرآبلی دو گروه دلخواه است که توسط براون و لودی در [۵] معرفی شد. به سادگی می‌توان نشان داد نگاشت

$$\begin{aligned} \kappa : G \otimes G &\rightarrow G' \\ g \otimes g' &\mapsto [g, g'] \end{aligned}$$

برای همه $g, g' \in G$ یک هم‌ریختی پوشا است. $J_2(G)$ را هسته κ و $\nabla(G)$ را زیرگروهی از $G \otimes G$ که توسط مجموعه $\{g \otimes g \mid g \in G\}$ تولید می‌شود، در نظر بگیرید. مشخص است (به [۵] مراجعه کنید) $J_2(G)$ و $\nabla(G)$

^۲نویسنده مسئول مقاله

(Azam Kaheni) azamkaheni@birjand.ac.ir

هر دو زیرگروه‌های مرکزی $G \otimes G$ هستند. گروه خارج قسمت

$$G \wedge G = \frac{G \otimes G}{\nabla(G)}$$

مربع خارجی غیرآبلی G نامیده می‌شود. عنصر $\nabla(G)$ در $G \wedge G$ برای همه $g, g' \in G$ با $g \wedge g'$ نشان داده می‌شود. نگاشت κ هم‌ریختی پوشا κ' را به صورت:

$$\begin{aligned} \kappa' : G \wedge G &\rightarrow G' \\ g \wedge g' &\mapsto [g, g'] \end{aligned}$$

به ازای تمام $g, g' \in G$ القا می‌کند. مفهوم ضربگرشور $\mathcal{M}(G)$ برای گروه G توسط شور وقتی که وی در حال مطالعه بر روی نمایش تصویری گروه‌ها بود، معرفی شد. هسته نگاشت κ' با ضربگرشور G یکریخت است (برای اطلاعات بیشتر، به [۵] مراجعه کنید). بسیاری از نویسندگان ساختار ضربگرشور، مربع تانسوری غیرآبلی و مربع خارجی غیرآبلی را برای برخی از گروه‌ها مانند گروه‌های آبلی متناهی و p - گروه‌های بسیار ویژه (به [۸، ۱۲] مراجعه کنید) یافتند. به یاد داشته باشید گروه G توانا نامیده می‌شود اگر گروه E موجود باشد به طوری که $G \cong E/Z(E)$. با توجه به [۳]، مرکز دقیق $Z^*(G)$ گروه G به عنوان کوچکترین زیرگروه مرکزی K از G تعریف می‌شود به طوری که G/K توانا باشد. به طور خاص، G توانا است اگر و تنها اگر $Z^*(G) = 1$. p - گروه متناهی G ویژه از رتبه k نامیده می‌شود اگر $G' = Z(G) = \Phi(G)$ یک p - گروه آبلی مقدماتی از رتبه k باشد. بدیهی است که $\exp(G) \leq p^2$. گروه‌های ویژه از رتبه یک، p - گروه‌های بسیار ویژه هستند. p - گروه‌های ویژه توانا توسط پیل و همکاران [۲] طبقه‌بندی شدند. سپس، هاینکین [۱۰، گزاره ۳] برای p - گروه ویژه توانای متناهی G از کلاس دو که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ نشان داد $p^5 \leq |G| \leq p^7$. همچنین، او تمام p - گروه‌های ویژه توانای متناهی از رتبه دو و نمای p را طبقه‌بندی کرد. در ادامه، این طبقه‌بندی ارائه شده است.

قضیه ۱.۱. (مراجعه کنید به [۱۰، بخش ۲، صفحات ۲۴۷-۲۴۶] و [۹، قضیه ۴.۱])
فرض کنید G یک p - گروه ویژه متناهی از رتبه دو و نمای p باشد. در این صورت G تواناست اگر و تنها اگر با یکی از p - گروه‌های زیر یکریخت باشد.

$$\begin{aligned} G_1 &= \Phi_4(1^5) = \langle a, a_1, a_2, b_1, b_2 \mid [a_i, a] = b_i, a^p = a_i^p = b_i^p = 1, 1 \leq i \leq 2 \rangle. \\ G_2 &= \Phi_{12}(1^6) = E_1 \times E_1 \text{ (که در آن } E_1 \text{ گروه بسیار ویژه از مرتبه } p^3 \text{ و نمای } p \text{ است)} \\ G_3 &= \Phi_{12}(1^6) = \langle a_j, b_i \mid [a_i, a_{i+1}] = b_i, [a_2, a_4] = b_2, a_j^p = b_i^p = 1, 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 2 \rangle. \\ G_4 &= \Phi_{15}(1^6) = \langle a_j, b_i \mid [a_i, a_{i+1}] = b_i, [a_3, a_4] = b_1, [a_2, a_4] = b_2^t, a_j^p = b_i^p = 1, \\ &\quad 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 2 \rangle \text{ (که در آن } t \text{ باقیمانده غیر درجه دوم به پیمانه } p \text{ است)} \\ G_5 &= T = \langle a_j, b_i \mid [a_2, a_1] = [a_5, a_3] = b_1, [a_3, a_1] = [a_5, a_4] = b_2, a_j^p = b_i^p = 1, \\ &\quad 1 \leq j \leq 5, 1 \leq i \leq 2 \rangle. \end{aligned}$$

کارهای متعددی برای تعیین ساختار ضربگرشور برای برخی از کلاس‌های p - گروه‌های متناهی مانند p - گروه‌های بسیار ویژه و p - گروه‌های ویژه از نمای p با رتبه حداکثر انجام شده است (به [۱۲، ۱۴] مراجعه کنید). علاوه بر این، هاتوی [۹] مرتبه ضربگرشور را برای p - گروه‌های ویژه متناهی از رتبه دو به دست آورد. علاوه بر این، برای یک p - گروه G از مرتبه p^n داریم $|\mathcal{M}(G)| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$ که $t(G)$ یک عدد صحیح غیر منفی است و هم‌رتبه G نامیده می‌شود. برخی از نویسندگان ساختار دقیق p - گروه متناهی G از هم‌رتبه کوچک را مشخص کرده‌اند، برای مثال به [۷، ۲] مراجعه کنید.

اکنون فرض کنید G یک p - گروه با تولید متناهی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ باشد. هدف مقاله حاضر ارائه توصیف کاملی از ساختار برخی از تابعگون‌ها از جمله ضربگرشور، مربع تانسور غیرآبلی و مربع خارجی غیرآبلی G است. علاوه بر این، هم‌رتبه G را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به ساختار مرکز دقیق G ، تابعگون‌های موردنظر را برای گروه G محاسبه می‌کنیم.

قضیه A. فرض کنید G یک p -گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$. در این صورت نتایج زیر برقرار است:

$$(i) \quad Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1))}, t(G) = 2d+1, G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+2)}, G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+2)} \text{ و } J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2)}.$$

$$(ii) \quad Z^*(G) = G' \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)-2)}, t(G) = 2d+3, G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1))}, G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2)} \text{ و } J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2-2)}.$$

حال فرض کنید G توانا باشد. بدیهی است که $G^p \subseteq \Phi(G) = G'$ و $p^2 \leq \exp(G)$. بنابراین $G^p = 1$ ، $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ یا $G^p = G'$. با توجه به قضیه ۱.۲ (vi) چنانچه $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ باشد، آنگاه G توانا نیست. بنابراین، تابع‌گون‌ها را در دو حالت به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

قضیه B. فرض کنید G یک p -گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ و $\exp(G) = p$. در این صورت یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

$$(i) \quad G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+5)}, t(G) = 2d-2, \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+3)}, G \cong \Phi_4(15) \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}, G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+5)} \text{ و } J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+3)}.$$

$$(ii) \quad G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+4)}, t(G) = 2d-1, \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+2)}, G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(d-4)}, G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+4)} \text{ و } J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+2)} \text{ که در آن } H \cong \Phi_{12}(1^6), H \cong \Phi_{13}(1^6) \text{ یا } H \cong \Phi_{15}(1^6).$$

$$(iii) \quad G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+1)}, t(G) = 2d, \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)-1)}, G \cong T \times \mathbb{Z}_p^{(d-5)}, G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+1)} \text{ و } J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2-1)}.$$

قضیه C. فرض کنید G یک p -گروه d مولدی توانا از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G^p = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$. در این صورت نتایج زیر برقرار است:

$$(i) \quad \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)-3)} \text{ و } t(G) = 2d+2$$

$$(ii) \quad \text{اگر } p \neq 2, \text{ آنگاه } \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)-1)}, G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(d^2-1)}, G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(d^2-3)} \text{ و } J_2(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(d^2-3)}$$

$$(iii) \quad \text{اگر } p = 2, \text{ و } N = \ker(\nabla(G) \rightarrow \nabla(G/G')), \text{ آنگاه } \mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{(\frac{1}{2}d(d-1)-1)}, G \wedge G \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{(d^2-3)} \text{ و } (G \otimes G)/N \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{(d^2-1)}.$$

۲ مقدمات

در بخش حاضر، نتایجی را ارائه می‌دهیم که در بخش بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. قضیه زیر نقش اساسی در اثبات قضایای اصلی ایفا می‌کند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید G یک p -گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

$$(i) \quad G \otimes G \text{ یک } p\text{-گروه آبلی است.}$$

(ii) فرض کنید $p \neq 2$. در این صورت $|G \wedge G| = |\mathcal{M}(G)||G'|$ ، $G \otimes G \cong (G \wedge G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$.

(iii) اگر $p = 2$ ، آنگاه $G' = G^2 = \Phi(G)$.

(iv) اگر $G^p = G'$ و G توانا نباشد، آنگاه $Z^*(G) = G'$ ، $G \otimes G \cong G/G' \otimes G/G'$ ،

$J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$ به طور خاص، $G \otimes G$ یک p - گروه آبلی مقدماتی است.

(v) اگر $\exp(G) = p$ ، آنگاه $\exp(G \otimes G) = p$.

(vi) اگر $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ ، آنگاه G توانا نیست و $G \otimes G$ یک p - گروه آبلی مقدماتی است. علاوه بر این، $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$.

(vii) اگر G توانا نباشد یا $\exp(G) = p$ باشد، آنگاه $\mathcal{M}(G)$ و $G \wedge G$ گروه‌های آبلی مقدماتی هستند.

(viii) اگر $\exp(G) = p^2$ و G توانا باشد، آنگاه $\exp(G \otimes G) = \exp(G \wedge G) = p^2$.

(ix) اگر G یک p - گروه ویژه توانا از رتبه دو و نمای p^2 باشد، آنگاه $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-3\right)}$ و $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)} \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{(2)}$.

اثبات. (i) به سادگی از [۱، گزاره ۱.۳ و لم ۴.۳] به دست می‌آید.

(ii) واضح است که $|G \wedge G| = |\mathcal{M}(G)||G'|$ از [۴، لم ۲.۱ (i)، قضیه ۳.۱ (iii) و نتیجه ۴.۱]، خواهیم داشت $\nabla(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ ، $G \otimes G \cong (G \wedge G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$.

(iii) برای همه $x, y \in G$ داریم $[y, x] = y^{-2}x^{-2}(xy)^2$. این نشان می‌دهد $G' \subseteq G^2$. از سوی دیگر، $G' = \Phi(G)$ و بنابراین $G' = G^2 = \Phi(G)$.

(iv) با استفاده از قسمت (iii)، اگر $p = 2$ باشد، آنگاه $G^2 = G'$ ، مشابه فرآیند اثبات [۹، قضیه ۱۰.۱] می‌توان نشان داد $Z^*(G) = G'$.

علاوه بر این با توجه به [۶، گزاره ۱۶] خواهیم داشت: $G \otimes G \cong G/G' \otimes G/G'$ ، $\nabla(G) \cong \nabla(G/G')$ و $G \wedge G \cong G/G' \wedge G/G'$.

واضح است که $G \otimes G$ و $G \wedge G$ هر دو گروه‌های آبلی مقدماتی هستند، بنابراین $\mathcal{M}(G)$ نیز یک گروه آبلی مقدماتی است. بنابراین، $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \nabla(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$.

(v) نتیجه به کمک [۱، لم ۴.۳] به دست می‌آید.

(vi) از قسمت (iii)، $p > 2$. مشابه فرآیند اثبات [۹، قضیه ۳.۱] می‌توان نشان داد G توانا نیست و علاوه بر این $Z^*(G) \subseteq G'$ با توجه به [۱۱، قضیه ۱.۳] یا $G/Z^*(G) = G/G'$ [۱۱، قضیه ۱.۳]. $G/Z^*(G) \cong E_1 \times \mathbb{Z}_p^{(d-2)}$ با روشی مشابه اثبات قسمت (iv)، [۶، گزاره ۱۶ (iv)] و [۸، نتیجه ۴.۲] می‌توان نشان داد $G \wedge G$ آبلی مقدماتی است و در نتیجه $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$.

(vii) به راحتی از قسمت‌های (iv)، (v) و (vi) به دست می‌آید.

(viii) با استفاده از قسمت (vi)، $G^p = G'$ ، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $G' = G^p = \langle x^p \rangle \oplus \langle y^p \rangle$ که در آن $x, y \in G$ و $x^p \neq y^p$. با استفاده از [۶، گزاره ۷] دنباله دقیق زیر را در نظر بگیرید.

$$G' \otimes (G/G') \rightarrow G \otimes G \xrightarrow{\tau} G/G' \otimes G/G' \rightarrow 1.$$

همچنین قرار دهید $S = \langle x^p \otimes g, y^p \otimes g_1 \mid g, g_1 \in G \rangle$. واضح است که $\ker \tau = S$. با استفاده از [۶، گزاره ۱۶]، $(G \otimes G)/S \cong G/G' \otimes G/G'$ و $S \neq 1_{G \otimes G}$. از اینرو برای $g \in G$ ، خواهیم داشت $x^p \otimes g \neq 1_{G \otimes G}$ و بنا به [۱، لم ۴.۳] $(x \otimes g)^p = (x^p \otimes g)(g \otimes [x, g])^{-1/p(p-1)} \neq 1_{G \otimes G}$. در نتیجه $\exp(G \otimes G) = p^2$. با روشی مشابه، می‌توان نشان داد $\exp(G \wedge G) = p^2$.

(ix) با استفاده از [۹، قضایای ۱.۱، ۳.۱ و ۵.۱]، $G^p = G'$ و $|\mathcal{M}(G)| = p^{\frac{1}{2}d(d-1)-1}$.

بنابراین $|G \wedge G| = p^{\frac{1}{2}d(d-1)+1}$. با توجه به [۶، گزاره ۷] دنباله زیر

$$G' \otimes (G/G') \rightarrow G \wedge G \xrightarrow{\eta} G/G' \wedge G/G' \cong \mathcal{M}(G/G') \rightarrow 1,$$

دقیق است. فرض کنید $K = \ker \eta$. بنا به [۱۲، نتیجه ۲.۲]، $\mathcal{M}(G/G') \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)\right)}$. از آنجایی که $|G \wedge G| = p^{\frac{1}{2}d(d-1)+1}$ ، داریم $K \cong \mathbb{Z}_p$ ، $1 \neq K \cong \mathbb{Z}_p$. با استفاده از قسمت (viii) نتیجه می‌شود $(G \wedge G)^p = K \cong \mathbb{Z}_p$. بنابراین $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)}$. ادعا می‌کنیم $\exp(\mathcal{M}(G)) = p^2$. به برهان خلف، فرض کنید $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)}$. آنگاه $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ ، بنابراین $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-3\right)}$ و $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)}$. بنابراین، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)} \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{(2)}$.

□

لم زیر در اثبات قضیه بعدی استفاده خواهد شد.

لم ۲.۲. فرض کنید G یک p -گروه متناهی از کلاس دو باشد به طوری که $G' \cong \mathbb{Z}_p^{(k)}$ و $|Z(G)| = p^m$ و $\Phi(G) = G'$. آنگاه

$$\exp(Z(G)) = p \quad (i) \text{ اگر و تنها اگر } \mathbb{Z}_p^{(m)} \cong G' \oplus \mathbb{Z}_p^{(m-k)}.$$

$$\exp(Z(G)) = p^2 \quad (ii) \text{ اگر و تنها اگر } G' \text{ جمعوند مستقیم } Z(G) \text{ نباشد اگر و تنها اگر برای مقدار } t \text{ به طوری که } Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-2t)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{(t)}, \quad 1 \leq t \leq k.$$

اثبات. G/G' و $Z(G)/G'$ آبله مقدماتی هستند، بنابراین، $\exp(Z(G)) \leq p^2$.

(i) می‌توان به راحتی بررسی کرد که $\exp(Z(G)) = p$ اگر و تنها اگر $\mathbb{Z}_p^{(m)} \cong G' \oplus \mathbb{Z}_p^{(m-k)}$ باشد. بنابراین درستی حکم به اثبات می‌رسد.

(ii) از آنجایی که $\exp(Z(G)) \leq p^2$ ، قسمت (i) نشان می‌دهد که $\exp(Z(G)) = p^2$ اگر و تنها اگر G' جمعوند مستقیم $Z(G)$ نباشد. اکنون، نشان می‌دهیم که G' جمعوند مستقیم $Z(G)$ نیست اگر و تنها اگر $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-2t)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{(t)}$ برای مقدار t که $1 \leq t \leq k$. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $G' = \bigoplus_{i=1}^k \langle x_i \rangle$ به طوری که $\langle x_j \rangle$ برای تمام j که $1 \leq j \leq t$ جمعوند مستقیم $Z(G)$ نباشند. به راحتی می‌توان دید که $\langle x_j \rangle \not\subseteq K_j$ ، که در آن K_j ها زیرگروه‌های دوری مرکزی دو به دو مجزا از مرتبه p^2 می‌باشند، یعنی $Z(G) \cong K_j \subseteq \mathbb{Z}_{p^2}$ و $K_j \cap K_r = 1$ برای همه r و j به طوری که $1 \leq r, j \leq t$ و $r \neq j$. از این رو نتیجه می‌شود $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-2t)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{(t)}$ برای مقدار t که $1 \leq t \leq k$. عکس این قضیه واضح است.

□

قضیه زیر نشان می‌دهد که ساختار p - گروه G از کلاس دو وقتی $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ ، به نحوی قرارگیری در G' بستگی دارد.

به یاد داشته باشید که گروه G حاصلضرب مرکزی H و K است، اگر $G = HK$ ، H و K زیرگروه‌هایی از G و $[H, K] = 1$. اگر G حاصلضرب مرکزی دو زیرگروه H و K باشد، G را به صورت $G = H \cdot K$ خواهیم نوشت.

قضیه ۳.۲. فرض کنید G یک p - گروه از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ و $|Z(G)| = p^m$. در این صورت یکی از حالت‌های زیر برقرار است:

$$(i) \quad G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)} \quad \text{که در آن } H \text{ یک } p \text{ - گروه ویژه از رتبه دو است.}$$

$$(ii) \quad G \cong (H \cdot K_1) \times \mathbb{Z}_p^{(m-3)} \quad \text{که در آن } K_1 \cong \mathbb{Z}_{p^2} \text{ و } K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p \text{ و } H \text{ یک } p \text{ - گروه ویژه از رتبه دو است.}$$

$$(iii) \quad G \cong (H \cdot (K_2 \times K_3)) \times \mathbb{Z}_p^{(m-4)} \quad \text{که در آن } K_2 \cong K_3 \cong \mathbb{Z}_{p^2} \text{ و } (K_2 \times K_3) \cap G' = G' \text{ و } K_2 \cap K_3 = 1 \text{ و } H \text{ یک } p \text{ - گروه ویژه از رتبه دو است.}$$

اثبات. لم ۲.۲ نشان می‌دهد که $Z(G) \cong G' \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ ، $Z(G) \cong K_1 \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ که در آن $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$ و $K_1 \cong \mathbb{Z}_p^2$ یا $K_1 \cong K_2 \times K_3 \times \mathbb{Z}_p^{(m-4)}$ که در آن $K_2 \cap K_3 = 1$ ، $(K_2 \times K_3) \cap G' = G'$ و $K_2 \cong K_3 \cong \mathbb{Z}_p^2$. برای به دست آوردن ساختار G اثبات را به سه حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

(i) فرض کنید $Z(G) = G' \times A$ ، که در آن $A \cong \mathbb{Z}_p^{(m-1)}$. اگر $A = 1$ ، G یک p - گروه ویژه از رتبه دو است و اثبات کامل می‌شود.

حال فرض کنید $A \neq 1$. از آنجا که $G/G' = A/G'$ آبدی مقدماتی است، داریم $G/G' = H/G' \times (AG')/G'$. بنابراین G از H و $G = HA$. در نتیجه $G' = H \cap AG' = (H \cap A)G'$ و $G = H \times A$. زیرا $H \cap A \subseteq G' \cap A = 1$. از آنجا که $Z(H) \times A = Z(G) = G' \times A$ و $Z(H) = H'$ ، خواهیم داشت $Z(H) = H' = G'$. بنابراین H یک p - گروه ویژه از رتبه دو است.

(ii) فرض کنید $Z(G) \cong K_1 \times A_1 \times A_2$ ، که در آن $K_1 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ ، $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$ و $A_2 \cong \mathbb{Z}_p^{(m-3)}$. دو حالت را به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

حالت ۱ فرض کنید $m = 3$. در این صورت $Z(G) = K_1 \times A_1$. با روشی مشابه اثبات بخش (i) می‌توان نشان داد $G = HK_1$ که در آن H یک p - گروه ویژه از رتبه دو است، $K_1 \not\subseteq H$ ، $[H, K_1] = 1$ و $H \cap K_1 = H' \cap K_1$. از این رو نتیجه می‌شود که $G = H \cdot K_1$ به طوری که $K_1 \cap H' \cong \mathbb{Z}_p$.

حالت ۲ فرض کنید $m \geq 4$. مشابه **حالت ۱** ، زیرگروه P از G موجود است به طوری که $G = P \times A_2$ ، $P' = G'$ و $Z(P) = K_1 \times A_1$. علاوه بر این، **حالت ۱** نشان می‌دهد که $P = H \cdot K_1$ و $K_1 \cap H = 1$. بنابراین $H' \cap K_1 \times A_2 = (H \cdot K_1) \times A_2 = G = (H \cdot K_1) \times A_2$ و $G' = H' = G'$ به طوری که $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$ ، $K_1 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ و $A_2 \cong \mathbb{Z}_p^{(m-3)}$. H یک p - گروه ویژه از رتبه دو است و در این حالت اثبات کامل می‌شود.

(iii) فرض کنید $Z(G) \cong K_2 \times K_3 \times \mathbb{Z}_p^{(m-4)}$ ، که در آن $(K_2 \times K_3) \cap G' = G'$ و $K_2 \cong K_3 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$. مشابه فرایند اثبات بخش (ii) نتیجه به دست می‌آید.

□

قضیه زیر نشان می‌دهد ساختار p - گروه توانا G از کلاس دو که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ به صورت حاصلضرب مستقیم یک p - گروه ویژه توانا از رتبه دو و یک p - گروه آبدی مقدماتی است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید G یک p - گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ و $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m)}$. آن گاه G تواناست اگر و تنها اگر $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ ، که در آن H یک p - گروه ویژه توانا از رتبه دو است.

اثبات. فرض کنید G توانا باشد. در این صورت بنا به [۳، گزاره ۲.۱] داریم $\exp(Z(G)) = p$. قضیه ۳.۲ (i) نشان می‌دهد که $G \cong H \times Z_p^{(m-2)}$ که در آن H یک p - گروه ویژه از رتبه دو است. از آنجا که H/H' آبلی مقدماتی است طبق [۳، گزاره ۳.۷]، H/H' تواناست. در نتیجه $Z^*(H) \subseteq H'$ از سوی دیگر، طبق [۱۵، گزاره ۲.۳] $Z^*(H) \cap H' = 1$ و بنابراین $Z^*(H) = 1$. بنابراین H توانا است. عکس این قضیه بنا به [۱۰، نکته (۲) صفحه ۲۴۷] برقرار است. $\square$

۳ اثبات قضایای اصلی

اکنون، آماده‌ایم هم‌رتبه، ضرب‌گوشور، مربع خارجی غیرآبلی، و مربع تانسور غیرآبلی p - گروه G از کلاس دو را هنگامی که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ محاسبه کنیم.

اثبات قضیه A. (i) ابتدا، نشان می‌دهیم که $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1))}$ حال، فرض کنید $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$. طبق قضیه ۱.۲ (iii) و (iv) اگر $p = 2$ باشد، آنگاه $G' = G^\vee$ و بنابراین $Z^*(G) = G'$ از اینرو، p باید فرد باشد. بنا به [۱۱، قضیه ۱.۳] $G/Z^*(G) \cong E_1 \times \mathbb{Z}_p^{(d-2)}$ با استفاده از [۳، قضیه ۲.۴] و [۱۳، قضیه اصلی] خواهیم داشت، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1))}$ برای $p > 2$ واضح است که $t(G) = 2d + 1$ عکس این قضیه را می‌توان با روش مشابهی که در بالا استفاده شد، به دست آورد. بنابراین $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1))}$ اگر $t(G) = 2d + 1$ طبق قضیه ۱.۲ (ii)، می‌توانیم ساختار $G \otimes G$ ، $G \wedge G$ و $J_2(G)$ را تعیین کنیم

(ii) واضح است $Z^*(G) = G'$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)-2)}$ اگر $t(G) = 2d + 3$ طبق قضیه ۱.۲ (vii)، [۳، قضیه ۲.۴] و [۱۲، نتیجه ۲.۲.۲]

ایجاب می‌کند $\mathcal{M}(G)$ و $G \wedge G$ هر دو گروه‌های آبلی مقدماتی هستند. از این رو، $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$ طبق قضیه ۱.۲ (ii) و (iv) ساختار $G \otimes G$ ، $G \wedge G$ و $J_2(G)$ را می‌توان تعیین کرد.

در ادامه، هم‌رتبه، ضرب‌گوشور، مربع خارجی غیرآبلی و مربع تانسور غیرآبلی p - گروه G از کلاس دو را وقتی که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ محاسبه می‌کنیم.

اثبات قضیه B. قضیه ۴.۲ نشان می‌دهد که $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ که در آن H یک p - گروه ویژه توانا از رتبه دو و نمای p است. با توجه به [۹، قضیه ۴.۱]، قرار دهید $H \cong \Phi_4(15) \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}$ در نتیجه $G \cong \Phi_4(15) \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}$ با استفاده از [۹، قضیه ۴.۱] و [۱۲، قضیه ۱۰.۲.۲ و نتیجه ۱۲.۲.۲]، داریم

$$\mathcal{M}(G) \cong \mathcal{M}(H) \oplus \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^{(d-3)}) \oplus (H/H' \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}) \cong \mathbb{Z}_p^{(\frac{1}{2}d(d-1)+3)}$$

بنابراین، $t(G) = 2d - 2$.

به طور مشابه، ضرب‌گوشور G وقتی H با یکی از p - گروه‌های $\Phi_{15}(16)$ ، $\Phi_{13}(16)$ ، $\Phi_{11}(16)$ یا T یکرخت است را می‌توان به دست آورد. همچنین با استفاده از قضیه ۱.۲ (ii)، می‌توانیم ساختار $G \otimes G$ ، $G \wedge G$ و $J_2(G)$ را به دست آوریم.

اثبات قضیه C. قضیه ۴.۲ نشان می‌دهد $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ که در آن H یک p - گروه ویژه توانا از رتبه دو و نمای p^2 است. فرض کنید H یک p - گروه d_1 مولدی باشد. آنگاه G یک p - گروه $(d_1 + m - 2)$ مولدی است. بنابراین، $d = d_1 + m - 2$. با استفاده از قضیه ۱.۲ (ix)، [۹، قضایای ۱.۱ و ۵.۱] و [۱۲، قضیه ۱۰.۲.۲]، و نتیجه ۱۲.۲.۲]، داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(G) &\cong \mathcal{M}(H) \oplus \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^{(m-2)}) \oplus (H/H' \otimes \mathbb{Z}_p^{(m-2)}) \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d_1(d_1-1) + \frac{1}{2}(m-2)(m-3) + d_1(m-2) - 3\right)} \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}(d_1+m-2)(d+m-3) - 3\right)} \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1) - 3\right)},\end{aligned}$$

و بنابراین $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1) - 3\right)}$. واضح است که، $t(G) = 2d + 2$. از قضیه ۱.۲ (viii)، داریم $\exp(G \wedge G) = p^2$. مشابه اثبات قضیه ۱.۲ (ix)، نتیجه می‌شود $(G \wedge G)^p \cong \mathbb{Z}_p$. بنابراین،

$$G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1) - 1\right)} \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{(2)}.$$

همچنین، با استفاده از قضیه ۱.۲ (ii) و [۴، قضیه ۱.۳] می‌توان ساختار $G \otimes G$ و $J_2(G)$ را به دست آورد.

مراجع

- [1] Bacon, M. R. and Kappe, L. C., 1993. The nonabelian tensor square of a 2-generator p -group of class 2. *Arch. Math. (Basel)*, 61(6), pp.508–516.
- [2] Berkovich, Ya. G., 1991. On the order of the commutator subgroup and the Schur multiplier of a finite p -group. *J. Algebra*, 144 (2), pp.269–272.
- [3] Beyl, F. R., Felgner, U. and Schmid, P., 1979. On groups occurring as center factor groups. *J. Algebra*, 61 (1), pp.161–177.
- [4] Blyth, R. D., Fumagalli, F. and Morigi, M., 2010. Some structural results on the non-abelian tensor square of groups. *J. Group Theory*, 13 (1), pp.83–94.
- [5] Brown, R., Johnson, D. L. and Robertson, E. F., 1987. Some computations of non-abelian tensor products of groups. *J. Algebra* 111 (1), pp.177–202.
- [6] Ellis, G. J., 1995. Tensor products and q -crossed modules. *J. London Math. Soc. (2)*, 51 (2) pp. 243–258.
- [7] Ellis, G., 1999. On the Schur multiplier of p -groups. *Comm. Algebra*, 27 (9), pp.4173–4177.
- [8] Jafari, S. H., Saeedi, F. and Khamseh, E., 2013. Characterization of finite p -groups by their non-abelian tensor square. *Comm. Algebra*, 41 (5), pp.1954–1963.
- [9] Hatui, S., 2020. Schur multipliers of special p -groups of rank 2. *J. Group Theory*, 23 (1), pp.85–95.
- [10] Heineken, H., 1990. Nilpotent groups of class 2 that can appear as central quotient groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 84, pp. 241–248.
- [11] Kaheni, A., Hatamian, R. and Kayvanfar, S., 2014. Capability of finite nilpotent groups of class 2 with cyclic Frattini subgroups. *J. Adv. Res. Pure Math.*, 6 (3), pp.12–18.

- [12] Karpilovsky, G., 1987. The Schur Multiplier, London Math. Soc. Monogr. (N. S.) 2, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- [13] Niroomand, P., 2009. On the order of Schur multiplier of non-abelian p -groups. *J. Algebra*, 322 (12), pp.4479–4482.
- [14] Rai, P. K., 2018. On the Schur multiplier of special p -groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 222 (2), pp.316–322.
- [15] Shahriari, S., 1987. On normal subgroups of capable groups. *Arch. Math. (Basel)*, 48 (3), pp.193–198.