Kharazmi University

Mathematical Research
Year 2026, Volume 12, Issue 2, pp. 99–108

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: 10.22034/mmr.2026.131057.0

Certain functors for some p-groups of class two with derived subgroup of order p^2

Azam Kaheni [(1)] [1] and Farangis Johari [(2)]

[(1)] Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran
[(2)] Center of Mathematics, Computer Science and Cognition, Federal University of ABC, Av. dos Estados, 5001 – Bangú, Santo André, 09210-580, São Paulo, Brazil

Received: 28 January 2026 Accepted: 18 September 2026 Published online: 23 September 2026

Abstract: Let G be a finite d-generator p-group of class two such that G/G' is elementary abelian and $G' \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. The aim of the present work is to characterize the exact structure of some functors including the Schur multiplier, the non-abelian tensor square, and the non-abelian exterior square of G. We also give the corank of G.

Keywords: Schur multiplier, Non-abelian tensor square, Non-abelian exterior square, p-groups.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1] Corresponding author
(Azam Kaheni) azamkaheni@birjand.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۱۰۸–۹۹
شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
DOI: 10.22034/mmr.2026.131057.0

تابعگون‌های خاص برای برخی pـ گروه‌ها از کلاس دو با زیرگروه مشتق از مرتبه p^2

اعظم کاهنی [۱] [۲] و فرنگیس جوهری [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
[۲] مرکز ریاضیات، علوم کامپیوتر و شناخت، دانشگاه فدرال ABC، سائو پائولو، برزیل

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۷ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۷/۰۱

چکیده:
فرض کنید G یک pـ گروه d مولدی متناهی از کلاس دو باشد به طوری که G/G' آبلی مقدماتی و $G' \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. هدف از کار حاضر، توصیف ساختار دقیق برخی از تابعگون‌ها از جمله ضربگرشور، مربع تانسور غیرآبلی و مربع خارجی غیرآبلی G است. همچنین هم‌رتبه G را به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: ضربگرشور، مربع تانسوری غیرآبلی، مربع خارجی غیرآبلی، pـ گروه‌ها

رده‌بندی ریاضی: 20D15; 20C25

۱ مقدمه و انگیزه

برای گروه G مرکز، زیرگروه مشتق و زیرگروه فراتینی به ترتیب با $Z(G)$، G' و $\Phi(G)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید p یک عدد اول باشد. زیرگروه $\langle x^p \mid x \in G \rangle$ از G با G^p نشان داده می‌شود. همچنین $exp(G)$ برای نشان دادن نمای G و $\mathbb{Z}_n^{(r)}$ نشان دهنده مجموع مستقیم $r-$ نسخه $\mathbb{Z}_n$ باشد، که در آن $\mathbb{Z}_n$ گروه دوری متناهی از مرتبه n است. مفهوم مربع تانسوری غیرآبلی $G \otimes G$ برای گروه G، حالت خاصی از حاصلضرب تانسوری غیرآبلی دو گروه دلخواه است که توسط براون و لودی در [۵] معرفی شد. به سادگی می‌توان نشان داد نگاشت

$$\begin{aligned} \kappa : G \otimes G &\to G' \\ g \otimes g' &\mapsto [g, g'] \end{aligned}$$

برای همه $g, g' \in G$ یک هم‌ریختی‌پوشا است. $J_2(G)$ را هسته κ و $\nabla(G)$ را زیرگروهی از $G \otimes G$ که توسط مجموعه $\{g \otimes g \mid g \in G\}$ تولید می‌شود، در نظر بگیرید. مشخص است (به [۵] مراجعه کنید) $J_2(G)$ و $\nabla(G)$

[۲] نویسنده مسئول مقاله
(Azam Kaheni) azamkaheni@birjand.ac.ir

هر دو زیرگروه‌های مرکزی $G \otimes G$ هستند. گروه خارج قسمت

$$G \wedge G = \frac{G \otimes G}{\bigtriangledown(G)}$$

مربع خارجی غیرآبلی G نامیده می‌شود. عنصر $(g \otimes g') \bigtriangledown (G)$ در $G \wedge G$ برای همه $g, g' \in G$ با $g \wedge g'$ نشان داده می‌شود. نگاشت κ هم‌ریختی‌پوشا κ' را به صورت:

$$\begin{aligned} \kappa' : G \wedge G &\to G' \\ g \wedge g' &\mapsto [g, g'] \end{aligned}$$

به ازای تمام $g, g' \in G$ القا می‌کند. مفهوم ضربگرشور $\mathcal{M}(G)$ برای گروه G توسط شور وقتی که وی در حال مطالعه بر روی نمایش تصویری گروه‌ها بود، معرفی شد. هسته نگاشت κ' با ضربگرشور G یکریخت است (برای اطلاعات بیشتر، به [۵] مراجعه کنید). بسیاری از نویسندگان ساختار ضربگرشور، مربع تانسوری غیرآبلی و مربع خارجی غیرآبلی را برای برخی از گروه‌ها مانند گروه‌های آبلی متناهی و p ـ گروه‌های بسیار ویژه (به [۸، ۱۲] مراجعه کنید) یافتند. به یاد داشته باشید گروه G توانا نامیده می‌شود اگر گروه E موجود باشد به طوری که $G \cong E/Z(E)$. با توجه به [۳] ، مرکز دقیق $Z^*(G)$ گروه G به عنوان کوچکترین زیرگروه مرکزی K از G تعریف می‌شود به طوری که G/K توانا باشد. به طور خاص، G توانا است اگر و تنها اگر $Z^*(G) = 1$. p ـ گروه متناهی G ویژه از رتبه k نامیده می‌شود اگر $G' = Z(G) = \Phi(G)$ و $Z(G)$ یک pـ گروه آبلی مقدماتی از رتبه k باشد. بدیهی است که p ـ گروه‌های ویژه از رتبه یک، pـ گروه‌های بسیار ویژه هستند. p ـ گروه‌های ویژه‌ی توانا توسط بِیل و همکاران [۳] طبقه‌بندی شدند. سپس، هاینیکن [۱۰، گزاره ۳] برای p ـ گروه ویژه توانای متناهی G از کلاس دو که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ نشان داد $p^5 \leq |G| \leq p^7$. همچنین، او تمام p ـ گروه‌های ویژه توانای متناهی از رتبه دو و نمای p را طبقه‌بندی کرد. در ادامه، این طبقه‌بندی ارائه شده است.

قضیه ۱.۱. (*مراجعه کنید به* [۱۰ ، *بخش* ۲ ، *صفحات* ۲۴۷-۲۴۶] *و* [۹ ، *قضیه* ۴.۱])
فرض کنید G یک p ـ گروه ویژه متناهی از رتبه دو و نمای p باشد. در این‌صورت G تواناست اگر و تنها اگر G با یکی از p ـ گروههای زیر یکریخت باشد.

$$\begin{aligned}
&G_1 = \Phi_4(1^5) = \langle a, a_1, a_2, b_1, b_2 | [a_i, a] = b_i, a^p = a_i^p = b_i^p = 1, 1 \leq i \leq 2 \rangle.\\
&G_2 = \Phi_{12}(1^6) = E_1 \times E_1 \text{ (که در آن } E_1 \text{ گروه بسیار ویژه از مرتبه } p^3 \text{ و نمای } p \text{ است)}\\
&G_3 = \Phi_{13}(1^6) = \langle a_j, b_i | [a_i, a_{i+1}] = b_i, [a_2, a_4] = b_2, a_j^p = b_i^p = 1, 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 2 \rangle.\\
&G_4 = \Phi_{15}(1^6) = \langle a_j, b_i | [a_i, a_{i+1}] = b_i, [a_3, a_4] = b_1, [a_2, a_4] = b_2^t, a_j^p = b_i^p = 1,\\
&\qquad 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq 2 \rangle \text{ (که در آن } t \text{ باقیمانده غیر درجه دوم به پیمانه } p \text{ است)}\\
&G_5 = T = \langle a_j, b_i | [a_2, a_1] = [a_5, a_3] = b_1, [a_3, a_1] = [a_5, a_4] = b_2, a_j^p = b_i^p = 1,\\
&\qquad 1 \leq j \leq 5, 1 \leq i \leq 2 \rangle.
\end{aligned}$$

کارهای متعددی برای تعیین ساختار ضربگرشور برای برخی از کلاس‌های p ـ گروه‌های متناهی مانند p ـ گروه‌های بسیار ویژه و p ـ گروه‌های ویژه از نمای p با رتبه حداکثر انجام شده است (به [۱۲، ۱۴] مراجعه کنید). علاوه بر این، هاتوی [۹] مرتبه ضربگرشور را برای p ـ گروه‌های ویژه متناهی از رتبه دو به‌دست آورد. علاوه بر این، برای یک pـ گروه G از مرتبه p^n داریم $|\mathcal{M}(G)| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$ که $t(G)$ یک عدد صحیح غیر منفی است و هم‌رتبه G نامیده می‌شود. برخی از نویسندگان ساختار دقیق p ـ گروه متناهی G از هم‌رتبه کوچک را مشخص کرده‌اند، برای مثال به [۲، ۷] مراجعه کنید.
اکنون فرض کنید G یک pـ گروه با تولید متناهی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ باشد. هدف مقاله حاضر ارائه توصیف کاملی از ساختار برخی از تابعگون‌ها از جمله ضربگرشور، مربع تانسور غیرآبلی و مربع خارجی غیرآبلی G است. علاوه بر این، هم‌رتبه G را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به ساختار مرکز دقیق G، تابعگون‌های موردنظر را برای گروه G محاسبه می‌کنیم.

قضیه A. *فرض کنید G یک p ـ گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$. در این‌صورت نتایج زیر برقرار است:*

(i) *اگر و تنها اگر* $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)\right)}$، $t(G) = 2d+1$، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+2\right)}$، $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+2)}$ و $J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2)}$. *در این حالت* $G/Z^*(G) \cong E_1 \times \mathbb{Z}_p^{(d-2)}$.

(ii) *اگر و تنها اگر* $Z^*(G) = G'$، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-2\right)}$، $t(G) = 2d+3$، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)\right)}$، $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2)}$ و $J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2-2)}$. *در این حالت* $G/Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d)}$.

حال فرض کنید G توانا باشد. بدیهی است که $G^p \subseteq \Phi(G) = G'$ و $exp(G) \leq p^2$. بنابراین $G^p = 1$ ، $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ یا $G^p = G'$. با توجه به قضیه ۱.۲ (vi) چنانچه $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ باشد، آنگاه G توانا نیست. بنابراین، تابعگون‌ها را در دو حالت به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

قضیه B. *فرض کنید G یک p ـ گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ و $exp(G) = p$. در این‌صورت یکی از حالت‌های زیر برقرار است:*

(i) $G \cong \Phi_4(15) \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}$، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+3\right)}$، $t(G) = 2d-2$، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+5\right)}$، $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+5)}$، $J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+3)}$.

(ii) $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(d-4)}$، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+2\right)}$، $t(G) = 2d-1$، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+4\right)}$، $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+4)}$ و $J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+2)}$ که در آن $H \cong \Phi_{12}(16)$، $H \cong \Phi_{13}(16)$ یا $H \cong \Phi_{15}(16)$.

(iii) $G \cong T \times \mathbb{Z}_p^{(d-5)}$، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)}$، $t(G) = 2d$، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+1\right)}$، $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2+1)}$ و $J_2(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(d^2-1)}$.

قضیه C. *فرض کنید G یک p ـ گروه d ـ مولدی توانا از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G^p = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$. در این‌صورت نتایج زیر برقرار است:*

(i) $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-3\right)}$ و $t(G) = 2d+2$.

(ii) *اگر* $p \neq 2$، *آنگاه* $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)}$، $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(d^2-1)}$ و $J_2(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{(d^2-3)}$.

(iii) *اگر* $p = 2$ و $N = \ker\left(\bigtriangledown(G) \to \bigtriangledown(G/G')\right)$، *آنگاه* $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)}$، $(G \otimes G)/N \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{(d^2-1)}$ و $J_2(G)/N \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{(d^2-3)}$.

۲ مقدمات

در بخش حاضر، نتایجی را ارائه می‌دهیم که در بخش بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. قضیه زیر نقش اساسی در اثبات قضایای اصلی ایفا می‌کند.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید G یک pـ گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

(i) $G \otimes G$ *یک pـ گروه آبلی است.*

(ii) فرض کنید $p \neq 2$. در این صورت $|G \wedge G| = |\mathcal{M}(G)||G'|$ ، $G \otimes G \cong (G \wedge G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$.

(iii) اگر $p = 2$ ، آنگاه $G' = G^2 = \Phi(G)$.

(iv) اگر $G' = G^p$ و G توانا نباشد، آنگاه $Z^*(G) = G'$ ، $G \otimes G \cong G/G' \otimes G/G'$ ، $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$. به طور خاص، $G \otimes G$ یک p ـ گروه آبلی مقدماتی است.

(v) اگر $exp(G) = p$ ، آنگاه $exp(G \otimes G) = p$.

(vi) اگر $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ ، آنگاه G توانا نیست و $G \otimes G$ یک p ـ گروه آبلی مقدماتی است. علاوه بر این، $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$

(vii) اگر G توانا نباشد یا $exp(G) = p$ باشد، آنگاه $\mathcal{M}(G)$ و $G \wedge G$ گروه‌های آبلی مقدماتی هستند.

$(viii)$ اگر $exp(G) = p^2$ و G توانا باشد، آنگاه $exp(G \wedge G) = exp(G \otimes G) = p^2$.

(ix) اگر G یک p ـ گروه ویژه توانا از رتبه دو و نمای p^2 باشد، آنگاه $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-3\right)}$ و $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)} \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{(2)}$.

اثبات. (i) به سادگی از [۱، گزاره ۱.۳ و لم ۴.۳] به‌دست می‌آید.

(ii) واضح است که $|G \wedge G| = |\mathcal{M}(G)||G'|$. از [۴، لم ۲.۱$(i)$، قضیه ۳.۱$(iii)$ و نتیجه ۴.۱] ، خواهیم داشت $\bigtriangledown(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ ، $G \otimes G \cong (G \wedge G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$.

(iii) برای همه $x, y \in G$ داریم $[y, x] = y^{-2}x^{-2}(xy)^2$. این نشان می‌دهد $G' \subseteq G^2$. از سوی دیگر، $G' = \Phi(G)$ و بنابراین $G' = G^2 = \Phi(G)$.

(iv) با استفاده از قسمت (iii) ، اگر $p = 2$ باشد، آنگاه $G' = G^2$. مشابه فرآیند اثبات [۹، قضیه ۱.۱] می‌توان نشان داد $Z^*(G) = G'$.

علاوه بر این با توجه به [۶، گزاره ۱۶] خواهیم داشت: $G \otimes G \cong G/G' \otimes G/G'$ ، $\bigtriangledown(G) \cong \bigtriangledown(G/G')$ و $G \wedge G \cong G/G' \wedge G/G'$.

واضح است که $G \otimes G$ و $G \wedge G$ هر دو گروه‌های آبلی مقدماتی هستند، بنابراین $\mathcal{M}(G)$ نیز یک گروه آبلی مقدماتی است. بنابراین، $J_2(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \bigtriangledown(G) \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)}$ و $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$.

(v) نتیجه به کمک [۱، لم ۴.۳] به‌دست می‌آید.

(vi) از قسمت (iii) ، $p > 2$. مشابه فرایند اثبات [۹، قضیه ۳.۱] می‌توان نشان داد G توانا نیست و علاوه بر این $Z^*(G) \subseteq G'$. با توجه به [۱۱، قضیه ۱.۳] $G/Z^*(G) = G/G'$ یا $G/Z^*(G) \cong E_1 \times \mathbb{Z}_p^{(d-2)}$. با روشی مشابه اثبات قسمت (iv) ، [۶، گزاره ۱۶(iv)] و [۸، نتیجه ۴.۲] می‌توان نشان داد $G \wedge G$ آبلی مقدماتی است و در نتیجه $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$.

(vii) به راحتی از قسمت های (iv) ، (v) و (vi) به‌دست می‌آید.

$(viii)$ با استفاده از قسمت (vi) ، $G^p = G'$. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $G' = G^p = \langle x^p \rangle \oplus \langle y^p \rangle$ که در آن $x, y \in G$ و $x^p \neq y^p$. با استفاده از [۶، گزاره ۷] دنباله دقیق زیر را در نظر بگیرید.

$$G' \otimes (G/G') \to G \otimes G \xrightarrow{\tau} G/G' \otimes G/G' \to ۱.$$

همچنین قرار دهید $S = \langle x^p \otimes g, y^p \otimes g_۱ \mid g, g_۱ \in G \rangle$. واضح است که $ker\tau = S$. با استفاده از [۶، گزاره ۱۶] ، $(G \otimes G)/S \cong G/G' \otimes G/G'$ و $S \neq ۱_{G \otimes G}$. از اینرو برای $g \in G$ ، خواهیم داشت $x^p \otimes g \neq ۱_{G \otimes G}$ و بنا به [۱، لم ۴.۳] $(x \otimes g)^p = (x^p \otimes g)(g \otimes [x, g])^{\frac{-۱}{۲}p(p-۱)} \neq ۱_{G \otimes G}$. در نتیجه $exp(G \otimes G) = p^۲$. با روشی مشابه، می‌توان نشان داد $exp(G \wedge G) = p^۲$.

(ix) با استفاده از [۹، قضایای ۱.۱، ۳.۱ و ۵.۱]، $G^p = G'$ و $|\mathcal{M}(G)| = p^{\frac{۱}{۲}d(d-۱)-۱}$.
بنابراین $|G \wedge G| = p^{\frac{۱}{۲}d(d-۱)+۱}$. با توجه به [۶، گزاره ۷] دنباله زیر

$$G' \otimes (G/G') \to G \wedge G \xrightarrow{\eta} G/G' \wedge G/G' \cong \mathcal{M}(G/G') \to ۱,$$

دقیق است. فرض کنید $K = \ker \eta$. بنا به [۱۲، نتیجه ۱۲.۲.۲]، $\mathcal{M}(G/G') \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{۱}{۲}d(d-۱)\right)}$. از آنجایی که $|G \wedge G| = p^{\frac{۱}{۲}d(d-۱)+۱}$ ، داریم $۱ \neq K \cong \mathbb{Z}_p$. با استفاده از قسمت $(viii)$ نتیجه می‌شود $(G \wedge G)^p = K \cong \mathbb{Z}_p$. بنابراین $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^۲} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{۱}{۲}d(d-۱)-۱\right)}$. ادعا می‌کنیم $exp(\mathcal{M}(G)) = p^۲$.
به برهان خلف، فرض کنید $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{۱}{۲}d(d-۱)-۱\right)}$. آنگاه $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_{p^۲}$ بنابراین، $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^۲} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{۱}{۲}d(d-۱)-۳\right)}$ و $G' \cong (G \wedge G)/\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^۲}$ که غیرممکن است. بنابراین، $G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^۲} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{۱}{۲}d(d-۱)-۱\right)} \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{(۲)}$.

□

لم زیر در اثبات قضیه بعدی استفاده خواهد شد.

لم ۲.۲. *فرض کنید G یک p ـ گروه متناهی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(k)}$ و $|Z(G)| = p^m$. آنگاه*

(i) $exp\big(Z(G)\big) = p$ *اگر و تنها اگر* $Z(G) \cong G' \oplus \mathbb{Z}_p^{(m-k)} \cong \mathbb{Z}_p^{(m)}$.

(ii) $exp\big(Z(G)\big) = p^۲$ *اگر و تنها اگر G' جمعوند مستقیم $Z(G)$ نباشد اگر و تنها اگر برای مقدار t به طوری که $۱ \leq t \leq k$* ، $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-۲t)} \oplus \mathbb{Z}_{p^۲}^{(t)}$.

اثبات. G/G' و $Z(G)/G'$ آبلی مقدماتی هستند، بنابراین، $exp\big(Z(G)\big) \leq p^۲$.

(i) می‌توان به راحتی بررسی کرد که $exp\big(Z(G)\big) = p$ اگر و تنها اگر $Z(G) \cong G' \oplus \mathbb{Z}_p^{(m-k)} \cong \mathbb{Z}_p^{(m)}$
بنابراین درستی حکم به اثبات می‌رسد.

(ii) از آنجایی که $exp\big(Z(G)\big) \leq p^۲$ ، قسمت (i) نشان می‌دهد که $exp\big(Z(G)\big) = p^۲$ اگر و تنها اگر G' جمعوند مستقیم $Z(G)$ نباشد. اکنون، نشان می‌دهیم که G' جمعوند مستقیم $Z(G)$ نیست اگر و تنها اگر $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-۲t)} \oplus \mathbb{Z}_{p^۲}^{(t)}$ برای مقدار t که $۱ \leq t \leq k$. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $G' = \oplus_{i=۱}^{k} \langle x_i \rangle$ به طوری که $\langle x_j \rangle$ برای تمام j که $۱ \leq j \leq t$ جمعوند مستقیم $Z(G)$ نباشند. به راحتی می‌توان دید که $\langle x_j \rangle \subsetneq K_j$ ، که در آن K_j ها زیرگروه‌های دوری مرکزی دو به دو مجزا از مرتبه $p^۲$ می‌باشند، یعنی $\mathbb{Z}_{p^۲} \cong K_j \subseteq Z(G)$ و $K_j \cap K_r = ۰$ برای همه r و j به طوری که $۱ \leq r, j \leq t$ و $r \neq j$. از این رو نتیجه می‌شود $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-۲t)} \oplus \mathbb{Z}_{p^۲}^{(t)}$ برای مقدار t که $۱ \leq t \leq k$. عکس این قضیه واضح است.

□

قضیه زیر نشان می‌دهد که ساختار p ـ گروه G از کلاس دو وقتی $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ ، به نحوی قرارگیری G' در $Z(G)$ بستگی دارد.
به یاد داشته باشید که گروه G حاصلضرب مرکزی H و K است، اگر $G = HK$ ، H و K زیرگروه‌هایی از G و $[H, K] = 1$. اگر G حاصلضرب مرکزی دو زیرگروه H و K باشد، G را به صورت $G = H \cdot K$ خواهیم نوشت.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید G یک p ـ گروه از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ و $|Z(G)| = p^m$. در این‌صورت یکی از حالت‌های زیر برقرار است:*

(i) $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ ، *که در آن H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است.*

(ii) $G \cong (H \cdot K_1) \times \mathbb{Z}_p^{(m-3)}$ ، *که در آن $K_1 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ ، $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$ و H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است.*

(iii) $G \cong \big(H \cdot (K_2 \times K_3)\big) \times \mathbb{Z}_p^{(m-4)}$، *که در آن* $K_2 \cong K_3 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$، $(K_2 \times K_3) \cap G' = G'$، $K_2 \cap K_3 = 1$ *و H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است.*

اثبات. لم ۲.۲ نشان می‌دهد که $Z(G) \cong G' \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ ، $Z(G) \cong K_1 \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ که در آن $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$ و $K_1 \cong \mathbb{Z}_p^2$ یا $Z(G) \cong K_2 \times K_3 \times \mathbb{Z}_p^{(m-4)}$ که در آن $K_2 \cap K_3 = 1$ ، $(K_2 \times K_3) \cap G' = G'$ و $K_2 \cong K_3 \cong \mathbb{Z}_p^2$. برای به‌دست آوردن ساختار G اثبات را به سه حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

(i) فرض کنید $Z(G) = G' \times A$ ، که در آن $A \cong \mathbb{Z}_p^{(m-1)}$. اگر $A = 1$ ، G یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است و اثبات کامل می‌شود.
حال فرض کنید $A \neq 1$. از آنجا که G/G' آبلی مقدماتی است، داریم $G/G' = H/G' \times (AG')/G'$ برای زیرگروه H از G. بنابراین $G = HA$ و $G' = H \cap AG' = (H \cap A)G'$. در نتیجه $G \cong H \times A$ زیرا $H \cap A = 1 \subseteq G' \cap A$. از آنجا که $Z(H) \times A = Z(G) = G' \times A$ و $G' = H'$ ، خواهیم داشت $Z(H) = H' = G'$. بنابراین H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است.

(ii) فرض کنید $Z(G) \cong K_1 \times A_1 \times A_2$ ، که در آن $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$ ، $K_1 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ ، $\mathbb{Z}_p \cong A_1 \subsetneq G'$ و $A_2 \cong \mathbb{Z}_p^{(m-3)}$. دو حالت را به شرح زیر در نظر می‌گیریم:
حالت ۱ فرض کنید $m = 3$. در این صورت $Z(G) = K_1 \times A_1$. با روشی مشابه اثبات بخش (i) می‌توان نشان داد $G = HK_1$ که در آن H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است، $K_1 \nsubseteq H$ ، $[H, K_1] = 1$ و $H \cap K_1 = H' \cap K_1$. از این رو نتیجه می‌شود که $G = H \cdot K_1$ به طوری که $K_1 \cap H' \cong \mathbb{Z}_p$.
حالت ۲ فرض کنید $m \geq 4$. مشابه **حالت ۱** ، زیرگروه P از G موجود است به طوری که، $G = P \times A_2$ ، $P' = G'$ و $Z(P) = K_1 \times A_1$. علاوه بر این، **حالت ۱** نشان می‌دهد که $P = H \cdot K_1$ و $K_1 \cap H = 1$. بنابراین $G = (H \cdot K_1) \times A_2$ و $G' = H'$ به طوری که $K_1 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$، $K_1 \cap G' \cong \mathbb{Z}_p$، $H' \cap K_1 \cong \mathbb{Z}_p$، $A_2 \cong \mathbb{Z}_p^{(m-3)}$ و H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است و در این حالت اثبات کامل می‌شود.

(iii) فرض کنید $Z(G) \cong K_2 \times K_3 \times \mathbb{Z}_p^{(m-4)}$، که در آن $(K_2 \times K_3) \cap G' = G'$ و $K_2 \cong K_3 \cong \mathbb{Z}_{p^2}$. مشابه فرایند اثبات بخش (ii) نتیجه به‌دست می‌آید.

□

قضیه زیر نشان می‌دهد ساختار p ـ گروه توانا G از کلاس دو که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ به صورت حاصلضرب مستقیم یک p ـ گروه ویژه توانا از رتبه دو و یک p ـ گروه آبلی مقدماتی است.

قضیه ۴.۲. *فرض کنید G یک p ـ گروه d مولدی از کلاس دو باشد به طوری که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ و $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p^{(m)}$. آن گاه G تواناست اگر و تنها اگر $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$، که در آن H یک p ـ گروه ویژه توانا از رتبه دو است.*

اثبات. فرض کنید G توانا باشد. در این صورت بنا به [۳، گزاره ۲.۱] داریم $exp(Z(G)) = p$. قضیه ۳.۲(i) نشان می‌دهد که $G \cong H \times Z_p^{(m-2)}$ که در آن H یک p ـ گروه ویژه از رتبه دو است. از آنجا که H/H' آبلی مقدماتی است طبق [۳، گزاره ۳.۷] ، H/H' تواناست. در نتیجه $Z^*(H) \subseteq H'$. از سوی دیگر، طبق [۱۵، گزاره ۲.۳] $Z^*(H) \cap H' = 1$ و بنابراین $Z^*(H) = 1$. بنابراین H توانا است. عکس این قضیه بنا به [۱۰، نکته (۲) صفحه ۲۴۷] برقرار است. □

۳ اثبات قضایای اصلی

اکنون، آماده‌ایم هم‌رتبه، ضربگرشور، مربع خارجی غیرآبلی، و مربع تانسور غیرآبلی p ـ گروه G از کلاس دو را هنگامی که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ محاسبه کنیم.

اثبات قضیه A. (i) *ابتدا، نشان می‌دهیم که* $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)\right)}$. *حال، فرض کنید* $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$. *طبق قضیه* ۱.۲$(iii)$ *و* (iv) *اگر* $p = 2$ *باشد، آنگاه* $G' = G^2$ *و بنابراین* $Z^*(G) = G'$. *از اینرو،* p *باید فرد باشد. بنا به،* [۱۱ ، *قضیه* ۱.۳] $G/Z^*(G) \cong E_1 \times \mathbb{Z}_p^{(d-2)}$. *با استفاده از* [۳ ، *قضیه* ۲.۴] *و* [۱۳ ، *قضیه اصلی*] *خواهیم داشت،* $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)\right)}$. *برای* $p > 2$ *واضح است که* $t(G) = 2d + 1$. *عکس این قضیه را می‌توان با روش مشابهی که در بالا استفاده شد، به‌دست آورد. بنابراین* $Z^*(G) \cong \mathbb{Z}_p$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)\right)}$ *اگر و تنها اگر* $t(G) = 2d + 1$. *طبق قضیه* ۱.۲(ii) ، *می‌توانیم ساختار* $G \otimes G$ ، $G \wedge G$ *و* $J_2(G)$ *را تعیین کنیم*

(ii) *واضح است* $Z^*(G) = G'$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-2\right)}$ *اگر و تنها اگر* $t(G) = 2d + 3$. *قضیه* ۱.۲(vii) ، [۳ ، *قضیه* ۲.۴] *و* [۱۲ ، *نتیجه* ۱۲.۲.۲]

ایجاب می‌کند $\mathcal{M}(G)$ *و* $G \wedge G$ *هر دو گروه‌های آبلی مقدماتی هستند. از این رو،* $G \wedge G \cong \mathcal{M}(G) \oplus G'$. *طبق قضیه* ۱.۲$(ii)$ *و* (iv) *ساختار* $G \otimes G$ ، $G \wedge G$ *و* $J_2(G)$ *را می‌توان تعیین کرد.*

در ادامه، هم‌رتبه، ضربگرشور، مربع خارجی غیرآبلی و مربع تانسور غیرآبلی p ـ گروه G از کلاس دو را وقتی که $\Phi(G) = G' \cong \mathbb{Z}_p^{(2)}$ محاسبه می‌کنیم.

اثبات قضیه B. *قضیه* ۲.۴ *نشان می‌دهد که* $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$، *که در آن* H *یک* p ـ *گروه ویژه توانا از رتبه دو و نمای* p *است. با توجه به* [۹ ، *قضیه* ۴.۱] ، *قرار دهید* $H \cong \Phi_4(15)$. *در نتیجه* $G \cong \Phi_4(15) \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}$. *با استفاده از* [۹ ، *قضیه* ۴.۱] *و* [۱۲ ، *قضیه* ۱۰.۲.۲ *و نتیجه* ۱۲.۲.۲] ، *داریم*

$$\mathcal{M}(G) \cong \mathcal{M}(H) \oplus \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^{(d-3)}) \oplus (H/H' \times \mathbb{Z}_p^{(d-3)}) \cong \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)+3\right)}$$

بنابراین، $t(G) = 2d - 2$.
به طور مشابه، ضربگرشور G *وقتی* H *با یکی از* p ـ *گروه‌های* $\Phi_{12}(16)$ ، $\Phi_{13}(16)$ ، $\Phi_{15}(16)$ *یا* T *یکریخت است را می‌توان به‌دست آورد. همچنین با استفاده از قضیه* ۱.۲(ii) ، *می‌توانیم ساختار* $G \otimes G$ ، $G \wedge G$ *و* $J_2(G)$ *را به‌دست آوریم.*

اثبات قضیه C. *قضیه* ۴.۲ *نشان می‌دهد* $G \cong H \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)}$ *که در آن* H *یک* p ـ *گروه ویژه توانا از رتبه دو و نمای* p^2 *است. فرض کنید* H *یک* p ـ *گروه* d_1 *مولدی باشد. آنگاه* G *یک* p ـ *گروه* $(d_1 + m - 2)$ *مولدی است. بنابراین،* $d = d_1 + m - 2$. *با استفاده از قضیه* ۱.۲(ix) ، [۹ ، *قضایای* ۱.۱ *و* ۱.۵] *و* [۱۲ ، *قضیه* ۱۰.۲.۲ ، *و نتیجه* ۱۲.۲.۲] ، *داریم:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(G) &\cong \mathcal{M}(H) \oplus \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^{(m-2)}) \oplus (H/H' \otimes \mathbb{Z}_p^{(m-2)}) \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d_1(d_1-1)+\frac{1}{2}(m-2)(m-3)+d_1(m-2)-3\right)} \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}(d_1+m-2)(d+m-3)-3\right)} \\ &\cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-3\right)},\end{aligned}$$

و بنابراین $\mathcal{M}(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-3\right)}$. واضح است که، $t(G) = 2d+2$. از قضیه ۱.۲ $(viii)$، داریم $exp(G \wedge G) = p^2$. مشابه اثبات قضیه ۱.۲ (ix)، نتیجه می‌شود $(G \wedge G)^p \cong \mathbb{Z}_p$. بنابراین،

$$G \wedge G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p^{\left(\frac{1}{2}d(d-1)-1\right)} \cong \mathcal{M}(G) \oplus \mathbb{Z}_p^{(2)}.$$

همچنین، با استفاده از قضیه ۱.۲ (ii) و [۴، قضیه ۱ ۳] می‌توان ساختار $G \otimes G$ و $J_2(G)$ را به‌دست آورد.

مراجع

[1] Bacon, M. R. and Kappe, L. C., 1993. The nonabelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2. *Arch. Math. (Basel)*, 61(6), pp.508–516.

[2] Berkovich, Ya. G., 1991. On the order of the commutator subgroup and the Schur multiplier of a finite p-group. *J. Algebra*, 144 (2), pp.269–272.

[3] Beyl, F. R., Felgner, U. and Schmid, P., 1979. On groups occurring as center factor groups. *J. Algebra* , 61 (1), pp.161–177.

[4] Blyth, R. D., Fumagalli, F. and Morigi, M., 2010. Some structural results on the non-abelian tensor square of groups. *J. Group Theory* , 13 (1), pp.83–94.

[5] Brown, R., Johnson, D. L. and Robertson, E. F., 1987. Some computations of non-abelian tensor products of groups. *J. Algebra* 111 (1), pp.177–202.

[6] Ellis, G. J., 1995. Tensor products and q-crossed modules. *J. London Math. Soc. (2)* , 51 (2) pp. 243–258.

[7] Ellis, G., 1999. On the Schur multiplier of p-groups. *Comm. Algebra*, 27 (9), pp.4173–4177.

[8] Jafari, S. H., Saeedi, F. and Khamseh, E., 2013. Characterization of finite p-groups by their non-abelian tensor square. *Comm. Algebra* , 41 (5), pp.1954–1963.

[9] Hatui, S., 2020. Schur multipliers of special p-groups of rank 2. *J. Group Theory*, 23 (1), pp.85–95.

[10] Heineken, H., 1990. Nilpotent groups of class 2 that can appear as central quotient groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 84, pp. 241–248.

[11] Kaheni, A., Hatamian, R. and Kayvanfar, S., 2014. Capability of finite nilpotent groups of class 2 with cyclic Frattini subgroups. *J. Adv. Res. Pure Math.*, 6 (3), pp.12–18.

[12] Karpilovsky, G., 1987. The Schur Multiplier, London Math. Soc. Monogr. (N. S.) 2, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

[13] Niroomand, P., 2009. On the order of Schur multiplier of non-abelian p-groups. *J. Algebra*, 322 (12), pp.4479–4482.

[14] Rai, P. K., 2018. On the Schur multiplier of special p-groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 222 (2), pp.316–322.

[15] Shahriari, S., 1987. On normal subgroups of capable groups. *Arch. Math. (Basel)* ,48 (3), pp.193–198.