

## رگرسیون چندکی بیزی با توان الاستیکنت سازوار برای داده‌های طولی

علی آقامحمدی\*، سکینه محمدی؛ دانشگاه زنجان، گروه آمار

دریافت ۹۳/۱۰/۱۳

پذیرش ۹۴/۱۰/۶

### چکیده

بررسی داده‌های طولی قسمت مهمی از پژوهش‌های اپیدمیولوژی، بررسی‌های بالینی و تحقیقات اجتماعی را شامل می‌شود. در بررسی‌های طولی، اندازه‌گیری پاسخ‌ها به‌طور مکرر در طول زمان انجام می‌شود. اغلب هدف اصلی تشخیص تغییر در متغیر پاسخ در طول زمان و عواملی است که روی این تغییر اثر می‌گذارند. اخیراً به رگرسیون چندکی برای تجزیه و تحلیل این نوع داده‌ها توجه شده است. در این مقاله مدل رگرسیون چندکی با ایجاد توان الاستیکنت سازوار روی اثرهای تصادفی برای داده‌های طولی ارائه شده و از دیدگاه آمار بیزی تجزیه و تحلیل می‌شود. چون در این روش توزیع پسینی پارامترها به شکل بسته قابل حصول نیستند، از این‌رو، توزیع‌های پسینی شرطی کامل پارامترها محاسبه شده و از الگوریتم نمونه‌گیری گیبس برای استنباط استفاده می‌شود. برای مقایسه کارایی روش ارائه شده با روش‌های متداول، بررسی شبیه‌سازی انجام شده و در پایان نحوه کاربست مدل‌ها در قالب مثال کاربردی شرح داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** رگرسیون چندکی، داده‌های طولی، توان الاستیکنت سازوار، اثرهای تصادفی، استنباط بیزی.

### مقدمه

در بسیاری از تحقیقات مربوط به علوم پزشکی و علوم اجتماعی و اقتصادی، برای بررسی تغییرات ویژگی‌های واحدهای آزمایشی در طول زمان و تحلیل آن‌ها از بررسی‌های طولی استفاده می‌شود. در این نوع پژوهش‌ها، متغیر پاسخ در چندین نوبت متوالی مشاهده می‌شود، به عبارت دیگر یک واحد آزمایشی تحت اندازه‌گیری مکرر در طول زمان قرار می‌گیرد. زیرا اندازه‌ی صفت بررسی شده، در طول زمان در واحدهای آزمایشی تغییر می‌کند. در واقع به پژوهشی که اندازه‌گیری مربوط به صفتی در طول زمان بررسی می‌شود، مطالعه طولی<sup>۱</sup> و به داده‌های جمع‌آوری شده در این نوع پژوهش‌ها، داده‌های طولی<sup>۲</sup> گویند. هدف اولیه این تحقیقات تشخیص عواملی است که متغیرهای پاسخ را در طول زمان تحت تأثیر قرار می‌دهد. واضح است این نوع پژوهش‌ها نسبت به بررسی‌های مقطعی که متغیر پاسخ برای هر واحد آزمایشی تنها یک بار اندازه‌گیری می‌شود، نتایج کارآمدتری ارائه می‌دهد. یکی از روش‌های تجزیه و تحلیل این نوع داده‌ها رگرسیون چندکی<sup>۳</sup> است. این مدل رگرسیونی را اولین بار کوننکر و باست [۱] ارائه کرد. این روش نسبت به روش‌های دیگر دارای دو مزیت مهم است. نخست این‌که رگرسیون چندکی نسبت به ناپایداری واریانس و داده‌های دورافتاده حساس نیست و دوم این‌که اطلاعات جزئی‌تری نسبت به تأثیر متغیرهای تبیینی در چندک‌های مختلف توزیع متغیر پاسخ ارائه می‌دهد.

در بررسی داده‌های طولی علاوه بر اثرهای ثابت که تغییرات درون گروه‌ها (تغییرات در طول زمان) را کنترل می‌کند، اثرات تصادفی<sup>۴</sup> بین متغیرهای پاسخ نیز در مدل لحاظ می‌شود که تغییرات بین گروهی را کنترل می‌کنند. اما در بسیاری از مسائل، تعداد مشاهدات از متغیر پاسخ نسبت به مشاهدات انجام گرفته در طول زمان از متغیر مربوط بسیار زیاد است. بنابراین در این مدل تعداد اثرات تصادفی (تعداد پارامترها) نیز خیلی زیاد شده از این‌رو، تعبیر و تفسیر مدل مشکل شده و دقت آن نیز کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل، کونکر [۲] رگرسیون چندکی را برای تحلیل این داده‌ها با افزودن تاوان لاسو<sup>۵</sup> (تاوان با نرم  $L_1$ ) روی اثرات تصادفی بررسی کرد. در واقع این روش با ایجاد تاوان، اثرات تصادفی کم‌اهمیت را به سمت صفر ترنجش<sup>۶</sup> کرده و مدلی تنک<sup>۷</sup> ایجاد می‌کند.

اولین بار تیشیرانی [۳] رگرسیون لاسو که با ایجاد تاوان لاسو روی پارامترها انجام می‌شود را ارائه کرد. سپس زو [۴] رگرسیون لاسوی سازوار<sup>۸</sup> را به‌منظور گسترش رگرسیون لاسو پیشنهاد کرد. در این روش بر خلاف تاوان لاسو که برای همه ضرایب اندازه تاوان را یکسان در نظر می‌گیرد، اندازه تاوان‌های مختلفی برای ضرایب رگرسیونی متفاوت لحاظ می‌شود. بررسی‌های زو [۴] مشخص کرد که در رگرسیون چندکی با تاوان لاسوی سازوار اریبی در برآورد پارامترها در مقایسه با روش لاسو کمتر است. اما روش‌های رگرسیونی لاسو عمل‌کرد بهتری ندارند مگر این‌که اندازه کران تاوان نرم  $L_1$  از مقداری مشخص کوچکتر باشد. در غیر این صورت عمل‌کرد این روش مانند روش کمترین توان‌های دوم عادی<sup>۹</sup> (OLS) خواهد بود. در واقع دقت روش‌های رگرسیونی لاسو به انتخاب کران بسیار حساس است [۵]. از طرف دیگر در حالت  $n > k$  تعداد پارامترهای موجود در مدل و  $n$  حجم نمونه است، اگر همبستگی زیادی بین متغیرهای تبیینی در مدل وجود داشته باشد، آن‌گاه به‌صورت تجربی مشاهده می‌شود که روش رگرسیونی ستیغی<sup>۱۰</sup> به لحاظ پیش‌بینی نسبت به روش‌های لاسو عمل‌کرد بهتری دارد [۳]. از این‌رو، زو و هستی [۵]، روش رگرسیونی الاستیکنت<sup>۱۱</sup> که تابع تاوان آن ترکیبی اکیداً محدب از توابع تاوان لاسو و ستیغی است، را معرفی کردند. چنان‌که دیدیم رگرسیون ستیغی را اولین بار هورل و کنارد [۶]، به‌منظور غلبه بر همخطی یعنی زمانی که همبستگی زیادی بین متغیرهای تبیینی در مدل‌های خطی موجود است، ارائه کرده است. با توجه به این ویژگی رگرسیون ستیغی، مدل رگرسیونی با تاوان الاستیکنت علاوه بر ترنجش ضرایب کم‌اهمیت مدل به سمت صفر و در نهایت حذف برخی از آن‌ها از مدل، می‌تواند متغیرهای تبیینی که اثر یکسان بر متغیر پاسخ دارند یا دارای همبستگی زیاد هستند را به‌طور یکسان و برابر برآورد کند [۵]. از این‌روش در مدل‌های رگرسیونی که متغیرهای تبیینی گروه‌بندی شده دارند، به‌خصوص اگر تعداد آن‌ها زیاد باشد می‌توان استفاده کرد. اولین بار لی و لین [۷] مدل رگرسیونی با تاوان الاستیکنت را در داده‌های مقطعی از دیدگاه آمار بیزی بررسی کردند. در این روش پارامترهای تنظیم<sup>۱۲</sup>

4. Random effects
5. Lasso penalty
6. Shrink
7. Sparse
8. Adaptive Lasso
9. Ordinary least square
10. Ridge
11. Elastic net
12. Tuning parameters

مربوط به هر دو تاوان لاسو و ستیخی از روش اعتبارسنجی متقابل<sup>۱۳</sup> محاسبه می‌شوند. سپس چن و همکاران [۸] با تعمیم روش لی ولین [۷] مدل رگرسیونی با تاوان الاستیکنت سازوار را در داده‌های مقطعی از دیدگاه آمار بیزی ارائه کردند. این روش در مقایسه با روش لی ولین [۷] دارای دو مزیت است. اول این‌که به‌جای تاوان الاستیکنت از تاوان الاستیکنت سازوار استفاده شده است و دوم این‌که در این روش برای پارامترهای تنظیم در تاوان لاسو توزیع‌های پیشینی مزدوج موجود بوده از این‌رو، برای برآورد آن‌ها برخلاف روش لی ولین [۷] نیاز به اعتبارسنجی متقابل نیست.

در این مقاله هدف تحلیل داده‌های طولی با استفاده از روش رگرسیون چندکی با در نظر گرفتن تاوان الاستیکنت سازوار روی اثرهای تصادفی از دیدگاه آمار بیزی است. برخلاف روش‌های لی ولین [۷] و چن و همکاران [۸] در مدل ارائه شده برای پارامترهای تنظیم در هر دو تاوان لاسو و ستیخی توزیع‌های پیشینی مزدوج موجود است از این‌رو، تمام پارامترهای مدل در فرآیند نمونه‌گیری گیبس قابل برآورد هستند. بنابراین بخش دوم، شامل مطالب کلی در مورد مدل رگرسیون چندکی و رگرسیون چندکی در داده‌های طولی است. بخش سوم مدل رگرسیون چندکی با تاوان الاستیکنت سازوار از دیدگاه آمار بیزی ارائه و در بخش چهارم نیز با روش شبیه‌سازی، کارایی مدل ارائه شده با مدل‌های دیگر مقایسه می‌شود. بخش ششم شامل تحلیل داده‌های واقعی و ارزیابی کارایی مدل‌ها است.

### رگرسیون چندکی

مدل رگرسیونی خطی  $y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$  را در نظر بگیرید که در آن بردار مربوط به متغیرهای تبیینی،  $\beta$  یک بردار  $k \times 1$  بعدی از پارامترها و  $\varepsilon_i$  مؤلفه خطا است. در مدل رگرسیونی میانگین، هدف استنباط دربارهٔ متوسط مقدار پاسخ به‌ازای مقادیر متفاوت متغیرهای تبیینی است، از این‌رو، به  $E(y_i | x_i) = x_i' \beta$  توجه شده است. اما در رگرسیون چندکی، به این تابع چندک شرطی توجه شده است:

$$Q_\tau y_i | x_i = x_i' \beta, \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن  $Q_\tau(\cdot)$  معکوس تابع توزیع تجمعی متغیر پاسخ  $y_i$  به شرط معلوم بودن بردار  $x_i$  است. به‌عبارت دیگر  $x_i' \beta$  چندک  $\tau$ -ام شرطی متغیر  $y_i$  به‌شرط معلوم بودن بردار  $x_i$  را نشان می‌دهد. در رگرسیون معمولی میانگین توزیع خطاها صفر در نظر گرفته می‌شود، اما در رگرسیون چندکی، چندک  $\tau$ -ام توزیع  $\varepsilon_i$ ‌ها برابر صفر هستند، یعنی  $\int_{-\infty}^t f_{\varepsilon_i} dt = \tau$ . در رگرسیون چندکی، ضرایب رگرسیونی یعنی  $\beta$  از مینیم کردن این عبارت نسبت به  $\beta$  برآورد می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - x_i' \beta), \quad (1)$$

که در آن  $\rho_\tau(\cdot)$  نشان‌دهنده تابع زیان و به‌صورت  $\rho_\tau(u) = \frac{|u| + \sqrt{2\tau - 1} u}{2}$  تعریف می‌شود [۱].

چون رابطه (۱) نسبت به  $\beta$  در مبدأ مشتق‌پذیر نیست، از این‌رو، راه حل تحلیلی برای برآورد ضرایب رگرسیونی وجود ندارد. برای رفع این مشکل یو و مویید [۹] رگرسیون چندکی را از دیدگاه آمار بیزی با استفاده از توزیع لاپلاس نامتقارن پیشنهاد کردند. متغیر تصادفی  $y$  را دارای توزیع لاپلاس نامتقارن گویند و با نماد  $y \sim ALD(\mu, \sigma, \tau)$  نشان می‌دهند، هر گاه تابع چگالی آن بدین‌صورت باشد:

$$f(y) = \frac{\tau^{1-\tau}}{\sigma} \exp\left\{-\rho_\tau\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}, \quad -\infty < y < +\infty$$

که در آن  $0 < \tau < 1$  پارامتر چولگی،  $\sigma$  پارامتر مقیاس و  $-\infty < \mu < \infty$  پارامتر مکان است. از این‌رو، با فرض  $y_i \sim ALD(x'_i\beta, \sigma, \tau)$ ، تابع درست‌نمایی بردار  $y = (y_1, \dots, y_n)$  بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$L(\beta, \sigma | y, x, \tau) = \left(\frac{\tau^{1-\tau}}{\sigma}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \rho_\tau\left(\frac{y_i - x'_i\beta}{\sigma}\right)\right\}, \quad (2)$$

بنابراین ماکسیم کردن رابطه (۲) در حضور پارامتر مزاحم  $\sigma$  با مینیم کردن رابطه (۱) نسبت به  $\beta$  معادل است. به‌همین دلیل در بسیاری از موارد، تحلیل رگرسیون چندکی با استفاده از این توزیع بررسی می‌شود. یو و مویید [۹] با فرض  $\sigma = 1$  و تعریف توزیع پیشینی ناآگاهی‌بخش برای  $\beta$  ( $\pi(\beta) \propto 1$ ) رگرسیون چندکی بیزی را در داده‌های مقطعی معرفی و بررسی کردند.

مدل خطی برای داده‌های طولی یک مدل آمیخته خطی بدین‌صورت است:

$$y_{ij} = x'_{ij}\beta + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad (3)$$

است که در آن  $y_{ij}$ ،  $j$ -امین پاسخ اندازه‌گیری شده روی  $i$ -امین واحد آزمایشی و  $x_{ij}$  بردار  $k \times 1$  بعدی مربوط به متغیرهای تبیینی،  $\beta$  یک بردار  $k \times 1$  بعدی از پارامترها و  $\alpha_i$  اثر تصادفی مربوط به پاسخ  $y_{ij}$  را نشان می‌دهد. توجه شود که در این مدل  $\alpha_i$  ها اثرات بین گروهی و  $\beta$  اثرات درون گروهی را کنترل می‌کنند. تابع چندک شرطی در این مدل بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$Q_\tau(y_{ij} | x_{ij}, \alpha_i) = x'_{ij}\beta + \alpha_i,$$

کوننکر [۲] با فرض تاوان لاسو روی بردار  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ( $p(\alpha) = \lambda \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ ) پارامترهای مدل یعنی

$\alpha$  و  $\beta$  را از مینیم کردن تابع زیان

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} w_\tau \rho_\tau(y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i) + \lambda \sum_{i=1}^n |\alpha_i|,$$

نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  برآورد کردند که در آن وزن  $w_\tau$  تأثیر نسبی چندک  $\tau$ -ام را در برآورد اثرات تصادفی کنترل می‌کند. کوننکر [۲] استدلال کرد که اگر  $i$  در مقایسه با  $j$  خیلی بزرگ باشد، آنگاه تابع زیان تاوانیده فوق نسبت به‌روش‌های غیرتاوانیده عمل‌کرد بهتری دارند. گراسی و باتای [۱۰] نیز با تعریف توزیع خاص برای  $\alpha_i$  و با در نظر گرفتن توزیع لاپلاس نامتقارن برای  $y_{ij}$  ها مدل رگرسیونی چندکی در داده‌های طولی را

از دیدگاه آمار بیزی بررسی شدند. در این روش، با فرض این‌که توزیع  $\alpha_i$  ها لاپلاس متقارن هستند، مدل کونکر [۲] به‌دست می‌آید. با توجه به مشکلات تاوان لاسو که در بخش اول به آن‌ها اشاره شد، هدف این مقاله بررسی مدل رگرسیون چندکی در داده‌های طولی با تاوان الاستیکنت سازوار روی اثرات تصادفی از دیدگاه آمار بیزی است. با در نظر گرفتن این تاوان روی اثرات تصادفی، تابع زیان تاوانیده به‌صورت

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \rho_{\tau} (y_{ij} - x'_{ij} \beta - \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \nu_i |\alpha_i| + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \quad (4)$$

به‌دست می‌آید که در آن مؤلفه  $\sum_{i=1}^n \nu_i |\alpha_i| + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  را تاوان الاستیکنت سازوار گویند. در این تاوان به

عبارت  $\sum_{i=1}^n \nu_i |\alpha_i|$  تاوان لاسوی سازوار و به  $\nu_i$  پارامتر تنظیم گویند. هرچه مقدار این پارامتر بزرگتر باشد،

ترنجش به‌سمت صفر نیز بیشتر و اثرهای تصادفی کم‌اهمیت از مدل حذف خواهند شد. عبارت  $\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  همان

تاوان ستیخی و  $\lambda$  نیز پارامتر تنظیم آن است. برآورد بردار پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  از دیدگاه آمار بسامدی از مینیم کردن عبارت رابطه (۴) نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  به‌دست می‌آید.

### رگرسیون چندکی با تاوان الاستیکنت سازوار از دیدگاه آمار بیزی

چنان‌که عنوان شد در مدل رگرسیون چندکی با تاوان الاستیکنت سازوار در داده‌های طولی، تابع زیان تاوانیده با تاوان الاستیکنت سازوار روی اثرهای تصادفی، به‌صورت رابطه (۴) است. اگر فرض کنیم در رابطه (۳)،  $\varepsilon_{ij} \sim ALD(\cdot, \sigma, \tau)$  و توزیع پیشینی برای  $\alpha_i$  را مانند چن و همکاران [۸] بدین‌صورت در نظر بگیریم:

$$\pi(\alpha_i | \lambda, \sigma, \nu_i) \propto \frac{\nu_i}{2\sigma} \exp \left\{ -\frac{\nu_i |\alpha_i|}{\sigma} - \lambda \alpha_i^2 \right\}$$

آن‌گاه توزیع پسینی بردار  $\alpha$  بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\pi(\alpha | y, x, \sigma, \lambda, \nu, \beta) \propto \sigma^N \exp \left\{ -\sigma^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \rho_{\tau} (y_{ij} - x'_{ij} \beta - \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \nu_i |\alpha_i| \right) - \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right\}, \quad (5)$$

که در آن  $N = \sum_{i=1}^n n_i$ ، تعداد کل مشاهدات را نشان می‌دهد. از این‌رو، مینیم کردن تابع هدف (۴) معادل

ماکسیم کردن توزیع پسینی در رابطه (۵) در حضور پارامتر مزاحم  $\sigma$  است. بنابراین می‌توان توزیع لاپلاس نامتقارن را برای این مدل استفاده کرد. با توجه به رابطه (۵) توزیع پسینی بردار  $\alpha$  توزیع شناخته شده‌ای نیست و نمی‌توان برای استنباط از آن استفاده کرد. از این‌رو، برای سادگی مدل و استفاده از روش نمونه‌گیری گیبس، ابتدا توزیع لاپلاس نامتقارن و عبارت  $-(\sigma)^{-1} \nu_i |\alpha_i|$  را به‌صورت توزیع‌های آمیخته در

نظر می‌گیریم. اگر  $u \sim ALD(\cdot, \sigma, \tau)$  و متغیرهای  $z$  و  $e$  به ترتیب دارای توزیع نرمال استاندارد و نمایی با میانگین  $\sigma(\tau(1-\tau))^{-1}$  و مستقل از هم باشند، آنگاه:

$$u = k_{\tau} e + \sqrt{\tau\sigma} z$$

که در آن  $k_{\tau} = (1 - 2\tau)$  است [۱۱]. با استفاده از این خاصیت توزیع لاپلاس نامتقارن و با توجه به این‌که  $\varepsilon_{ij} \sim ALD(\cdot, \sigma, \tau)$  است، آنگاه مدل رابطه (۳) را می‌توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$y_{ij} = x'_{ij}\beta + \alpha_i + k_{\tau} e_{ij} + \sqrt{\tau\sigma} e_{ij} z_{ij}, \quad (۴)$$

که در آن  $e_{ij}$  و  $z_{ij}$  به ترتیب دارای توزیع نرمال استاندارد و نمایی با میانگین  $\sigma(\tau(1-\tau))^{-1}$  و مستقل از هم هستند. تابع چگالی  $-(\sigma)^{-1} \nu_i \exp\{-(\sigma)^{-1} \nu_i | \alpha_i | \}$  که همان توزیع لاپلاس متقارن است را می‌توان به صورت توزیعی آمیخته از هسته‌های فیجر-بارتلت با توزیع آمیختگی گاما بدین صورت نوشت [۱۲]:

$$\frac{\nu_i}{\tau\sigma} \exp\left\{-\frac{\nu_i | \alpha_i |}{\sigma}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\nu_i}{\sigma} \left\{1 - \frac{\nu_i | \alpha_i |}{w_i \sigma}\right\}_+ f(w_i) dw_i$$

که در آن  $f(w_i) = w_i \exp\{-w_i\}$  و  $a_+ = \max\{a, \cdot\}$ . چون هدف تحلیل بیزی است، از این‌رو، برای پارامترهای تنظیم  $\nu_i$  و  $\lambda$  توزیع‌های پیشینی مزدوج را نمایی به صورت  $\pi(\lambda | \phi_{\tau}) = \phi_{\tau} \exp\{-\phi_{\tau} \lambda\}$  و  $\pi(\nu_i | \phi_{\tau}) = \phi_{\tau} \exp\{-\phi_{\tau} \nu_i\}$  قرار داده و برای پارامترهای  $\sigma$  و  $\beta$  به ترتیب توزیع معکوس گاما و توزیع نرمال چندمتغیره در نظر می‌گیریم. واضح است که هر چه مقدار  $\phi_{\tau}$  کوچک باشد، آنگاه ترجیح به سمت صفر  $\alpha_i$ ‌ها بیشتر و توانیدن آن‌ها نیز بزرگ است. چون تعداد  $\alpha_i$ ‌ها زیاد است، از این‌رو، برای پارامتر  $\phi_{\tau}$  توزیع پیشینی را به صورت پخ<sup>۱۴</sup> یعنی  $\pi(\phi_{\tau}) \propto \phi_{\tau}^{-1}$  در نظر می‌گیریم. برای  $\phi_{\tau}$  نیز توزیع پیشینی را به صورت  $\pi(\phi_{\tau}) \propto \phi_{\tau}^{-1}$  قرار می‌دهیم. حال با توجه به مدل روابط (۵)، (۶) و توزیع‌های پیشینی تعریف شده، مدل سلسله مراتبی را می‌توان بدین صورت خلاصه کرد:

$$y_{ij} | x_{ij}, \beta, \alpha_i, \sigma, e_{ij} \sim N(x'_{ij}\beta + \alpha_i + k_{\tau} e_{ij}, \tau\sigma e_{ij})$$

$$e_{ij} | \sigma \sim \text{Exp}\left(\frac{\tau(1-\tau)}{\sigma}\right), \quad \beta | b, B. \sim N_k(b, B),$$

$$\pi(\alpha_i | \nu_i, \lambda, \sigma, w_i) \propto \exp\{-\lambda \alpha_i^2\} \times \frac{\nu_i}{\sigma} \left\{1 - \frac{\nu_i | \alpha_i |}{w_i \sigma}\right\}_+, \quad w_i \sim \text{Gamma}(\tau, 1)$$

$$\nu_i | \phi_{\tau} \sim \text{Exp}(\phi_{\tau}), \quad \lambda | \phi_{\tau} \sim \text{Exp}(\phi_{\tau}), \quad \pi(\phi_{\tau}) \propto \frac{1}{\phi_{\tau}},$$

$$\pi(\phi_{\tau}) \propto \frac{1}{\phi_{\tau}}, \quad \sigma | c, d. \sim \text{IGamma}(c, d),$$

که در آن  $\text{Gamma}(a, b)$  و  $\text{IGamma}(a, b)$  به ترتیب نشان‌دهنده توزیع گاما و معکوس گاما و  $\text{Exp}(\theta)$  نشان‌دهنده توزیع نمایی با میانگین  $\theta^{-1}$  است. با توجه به شکل سلسله مراتبی مذکور، توزیع پسینی همه

پارامترها و ابرپارامترها به صورت بسته قابل حصول نیست. اما می‌توان توزیع‌های پسینی شرطی کامل همه پارامترها و ابرپارامترها را بدین صورت محاسبه کرد:

هسته توزیع پسینی  $\alpha_i$  بدین صورت به دست می‌آید:

$$\pi(\alpha_i | \cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i - k_1 e_{ij})^2}{e_{ij}} \right\} \times \exp \{-\lambda \alpha_i^2\} \times \left\{ 1 - \frac{\nu_i |\alpha_i|}{w_i \sigma} \right\}_+.$$

ملاحظه می‌شود که توزیع مذکور، توزیع شناخته شده‌ای نیست. برای تولید نمونه از این توزیع به پیروی از پولسون و همکاران [۱۲]، ابتدا با تعریف متغیرهای تصادفی برشی  $u_1, \dots, u_n$  که دارای توزیع یکنواخت

در بازه  $(0, 1)$  هستند، توزیع پسینی  $\alpha_i$  را به صورت توزیع توأم

$$\pi(\alpha_i, u_i | \cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i - k_1 e_{ij})^2}{e_{ij}} \right\} \times \exp \{-\lambda \alpha_i^2\} \times I(0 < u_i < 1 - \frac{\nu_i |\alpha_i|}{w_i \sigma}),$$

در نظر می‌گیریم که در آن  $I(\cdot)$  همان تابع مشخصه است. حال با توجه به رابطه مذکور داریم:

$$(u_i | \alpha_i, \cdot) \sim Unif(0, 1 - \frac{\nu_i |\alpha_i|}{w_i \sigma}), i = 1, \dots, n,$$

که در آن  $Unif(a, b)$  توزیع یکنواخت در بازه  $(a, b)$  است. همچنین

$$(\alpha_i | u_i, \cdot) \sim N(\bar{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i) \times I(|\alpha_i| \leq \frac{(1 - u_i)\sigma w_i}{\nu_i}), i = 1, \dots, n$$

که در آن

$$\bar{\mu}_i = \tilde{\sigma}_i \left[ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - x'_{ij}\beta - k_1 e_{ij})}{e_{ij}} \right] \text{ و } \tilde{\sigma}_i = (\lambda + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{e_{ij}})$$

است. بنابراین توزیع پسینی شرطی کامل  $\alpha_i$  نرمال بریده شده در نقاط  $\frac{(1 - u_i)\sigma w_i}{\nu_i}$  و  $-\frac{(1 - u_i)\sigma w_i}{\nu_i}$

با میانگین  $\bar{\mu}_i$  و واریانس  $\tilde{\sigma}_i$  است.

$$\pi(w_i | \cdot) \propto w_i \exp\{-w_i\} \times I(w_i \geq \frac{\nu_i |\alpha_i|}{(1 - u_i)\sigma}), i = 1, \dots, n.$$

اگر  $a_i = \nu_i |\alpha_i| [(1 - u_i)\sigma]^{-1}$ ، آنگاه توزیع پسینی  $w_i$  توزیع گامای بریده شده در نقطه  $a_i$  است. برای سهولت در نمونه‌گیری از این توزیع، فرض می‌کنیم  $q_i = w_i - a_i$ ، آنگاه توزیع  $q_i$  بدین صورت به دست

می‌آید:

$$\begin{aligned} \pi(q_i | \cdot) &= c(q_i + a_i) \exp \{-(q_i + a_i)\} \times I(q_i \geq 0) \\ &= c q_i \exp\{-q_i\} \exp\{-a_i\} + c a_i \exp \{-q_i\} \exp\{-a_i\}, \quad (V) \end{aligned}$$

که در آن  $c$  عبارتست از  $\exp(a_i)(1+a_i)^{-1}$ ، حال با جای‌گذاری  $c$  در رابطه (۷) توزیع پسینی  $q_i$  بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\pi(q_i | \cdot) = \frac{1}{1+a_i} \text{Gamma}(r, 1) + \frac{a_i}{1+a_i} \text{Gamma}(1, 1),$$

از این‌رو، توزیع  $q_i$  توزیع آمیخته‌ای از دو توزیع گاما است. حال با تولید  $q_i$  می‌توان از رابطه  $w_i = q_i + a_i$  را نیز تولید کرد.

$$\begin{aligned} \pi(e_{ij} | \cdot) &\propto (e_{ij})^{-1/r} \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma e_{ij}} (y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i - k_i e_{ij})^r - \frac{\tau(1-\tau)e_{ij}}{\sigma} \right\} \\ &\propto (e_{ij})^{-1/r} \exp \left\{ -\frac{1}{r} (\hat{\delta}_{ij}^r e_{ij}^{-1} + \hat{\gamma}_{ij}^r e_{ij}) \right\}, \end{aligned}$$

از این‌رو، توزیع پسینی شرطی کامل  $e_{ij}$  بدین‌صورت است:

$$(e_{ij} | \cdot) \sim GIG\left(\frac{1}{r}, \hat{\delta}_{ij}^r, \hat{\gamma}_{ij}^r\right)$$

که در آن

$$GIG(r, m, n) \text{ و } \hat{\gamma}_{ij}^r = (r\sigma)^{-1}(y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i)^r, \hat{\delta}_{ij}^r = \sigma^{-1} r^{-1} k_i^r + r\tau(1-\tau)$$

نشان‌دهنده توزیع گاوسی وارون تعمیم یافته<sup>۱۶</sup> با تابع چگالی

$$f(x | r, m, n) \propto x^{r-1} \exp \left\{ -\frac{1}{r} (m^r x^{-1} + n^r x) \right\}, \quad x > 0, -\infty < r < +\infty, m, n > 0.$$

است. برای تولید نمونه تصادفی از این توزیع، از تابع  $\text{rgig}()$  که در بسته  $\text{ghyp}$  در نرم‌افزار  $\mathbf{R}$  موجود است، می‌توان استفاده کرد [۱۳].

$$\begin{aligned} \pi(\sigma | \cdot) &\propto \sigma^{-N/r} \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i - k_i e_{ij})^r}{e_{ij}} \right\} \\ &\propto \sigma^{-N} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\tau(1-\tau)e_{ij}}{\sigma} \right\} \times \sigma^{-n} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{\nu_i |\alpha_i|}{\sigma} \right\} \times \left( \frac{1}{\sigma} \right)^{c+1} \exp \left\{ -\frac{d}{\sigma} \right\} \end{aligned}$$

بنابراین توزیع پسینی شرطی کامل  $\sigma$  بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$(\sigma | \cdot) \sim \text{IGamma}(a, b)$$

که در آن  $a = r^{-1}(rN) + n + c$  و

$$b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \frac{(y_{ij} - x'_{ij}\beta - \alpha_i - k_i e_{ij})^r}{4e_{ij}} + \frac{\tau(1-\tau)e_{ij}}{\sigma} \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i |\alpha_i|}{\sigma} + d.$$

است. توزیع پسینی شرطی کامل پارامترهای دیگر بدین‌صورت به‌دست می‌آیند:



$$(\nu_i | \cdot) \sim \text{Gamma}(\tau, \frac{|\alpha_i|}{\sigma} + \phi_1), i = 1, \dots, n, \quad (\phi_1 | \cdot) \sim \text{Gamma}(n, \sum_{i=1}^n \nu_i),$$

$$(\lambda | \cdot) \sim \text{Exp}(\phi_\tau + \sum_{i=1}^n \alpha_i^\tau), \quad (\phi_\tau | \cdot) \sim \text{Exp}(\lambda).$$

توجه کنیم که توزیع پسینی شرطی کامل  $\sigma$  و  $\nu_i$  با انتگرال‌گیری از توزیع پسینی همه پارامترها نسبت به  $u_i$  ها و  $\alpha_i$  ها محاسبه شده‌اند. بالاخره توزیع پسینی شرطی کامل  $\beta$  بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$(\beta | \cdot) \sim N_k(Bb, B),$$

که در آن

$$b = \frac{1}{\tau\sigma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_{ij}(y_{ij} - \alpha_i - k_1 e_{ij})}{e_{ij}} + B^{-1}b. \quad \text{و} \quad B^{-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_{ij}x'_{ij}}{e_{ij}} + B^{-1}.$$

حال با مشخص شدن توزیع پسینی شرطی کامل پارامترها و ابرپارامترها می‌توان با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبس نمونه‌های کافی تولید کرده و استنباطها را انجام داد. از این‌رو، چنان‌که عنوان شد در این مدل نیازی به برآورد پارامترها به‌روش اعتبارسنجی متقابل نیست.

### بررسی شبیه‌سازی

در این بخش برای مقایسه کارایی روش ارائه شده با روش‌های متداول دیگر به بررسی شبیه‌سازی می‌پردازیم. در این شبیه‌سازی مدل را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

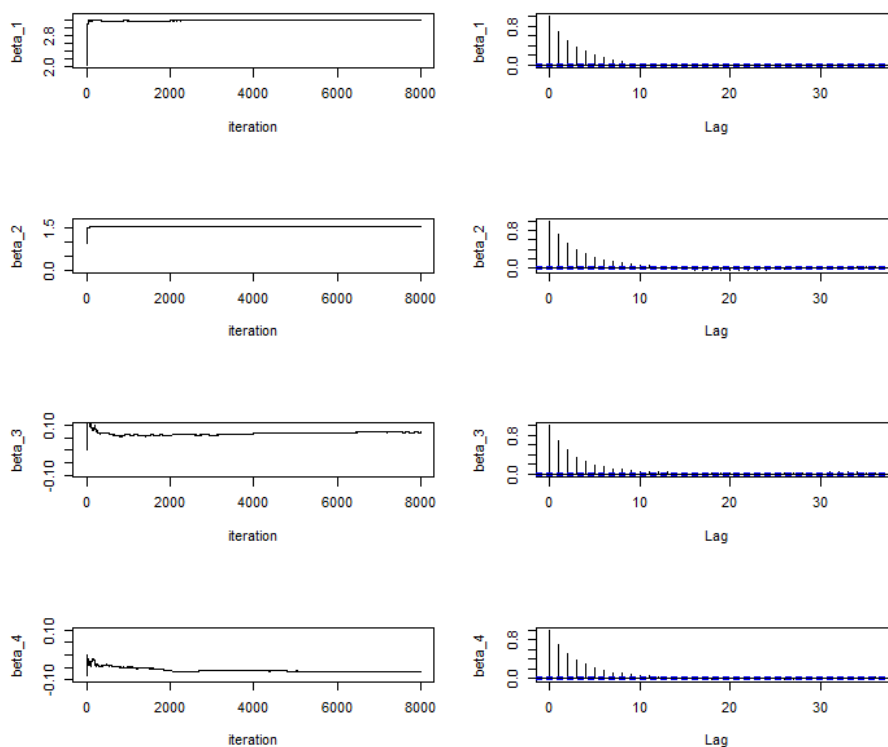
$$y_{ij} = x_{ij}^1 \beta_1 + x_{ij}^2 \beta_2 + \dots + x_{ij}^5 \beta_5 + x_{ij}^8 \beta_8 + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$

که در آن  $i = 1, \dots, 100$  و  $j = 1, \dots, 5$  است. توجه کنیم که تعداد متغیرهای پاسخ در مقایسه با متغیرهای تبیینی زیاد است. از این‌رو، استفاده از توان الاستیکنت سازوار منجر به بهبود برآورد پارامترها و دقت مدل خواهد شد. همانند شبیه‌سازی لیو و همکاران [۱۴] متغیرهای تبیینی یعنی  $x_{ij}^k$  را به‌صورت  $x_{ij}^k \sim N(0, 1)$  خواهد شد. برای  $k = 1, \dots, 8$  تولید کرده و توزیع اثرهای تصادفی را نیز برابر  $\alpha_i \sim N(0, 4)$  فرض می‌کنیم. برای  $\beta$  نیز بردارهای

$$\beta = 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \quad \beta = 3, 1 / 5, 0, 0, 2, 0, 0, 0, \\ \beta = 0 / 85, 0 / 85, 0 / 85, 0 / 85, 0 / 85, 0 / 85, 0 / 85, 0 / 85$$

را در نظر می‌گیریم که در آن بردار اول متناظر با یک مدل کاملاً تنک و بردار سوم مربوط به مدلی کاملاً چگال است. برای مؤلفه خطا نیز توزیع‌های نرمال استاندارد، تی با سه درجه آزادی و توزیع لاپلاس متقارن در نظر می‌گیریم. به‌منظور کاهش حساسیت مدل به توزیع‌های پیشینی، برای پارامتر  $\beta$  توزیع پیشینی را  $\beta \sim N_8(0, 100I)$  و برای ابرپارامتر  $\sigma$  نیز توزیع پیشینی پخ به‌صورت  $IGamma(0 / 0.1, 0 / 0.1)$  فرض می‌شود. مدل ارائه شده یعنی رگرسیون چندکی با توان الاستیکنت سازوار از دیدگاه آمار بیزی (BENQR) را با روش رگرسیون چندکی معمولی بدون در نظر گرفتن اثرهای تصادفی (QR) و روش رگرسیون چندکی در

داده‌های طولی با در نظر گرفتن تاوان لاسو روی اثرهای تصادفی از دیدگاه آمار بسامدی (PQR) که کوئکر [۲] ارائه کرده است، مقایسه می‌کنیم. برای برآورد پارامترها در مدل بیزی با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبس، ۸۰۰۰ نمونه از توزیع‌های پسینی شرطی کامل پارامترها تولید کرده و ۲۰۰۰ نمونه اول را به‌عنوان دوره همگرایی مطلوب کنار می‌گذاریم. برای ارزیابی همگرایی زنجیر و تعیین تقریبی تعداد نمونه‌ها به‌عنوان همگرایی مطلوب از آماره  $\hat{R}$  که گلن و همکاران [۱۵] ارائه کرده‌اند، استفاده می‌کنیم. برای همه پارامترها تقریباً بعد از ۲۰۰۰ نمونه اولیه، همگرایی مطلوب رخ می‌دهد که شکل ۱ نمودارهای اثر و تابع خودهمبستگی را با فرض توزیع نرمال برای مؤلفه‌های خطا و  $\beta = 3,1 / 5,0, 2,0, 0,0$  نشان می‌دهند. برای اجتناب از طولانی شدن نمودارها، فقط برای چهار مؤلفه اول بردار  $\beta$ ، نمودارها نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱. نمودار اثر و تابع خود همبستگی در روش رگرسیون چندکی با تاوان الاستیکنت در چندک  $\tau = 0/5$  هر دو نمودار به‌خوبی همگرایی زنجیره‌های مارکف تولید شده از توزیع‌های پسینی ضرایب را بعد از تقریباً ۲۰۰۰ نمونه نشان می‌دهند. جدول ۱ برآورد و انحراف معیار پارامترهای  $\beta$  برای سه‌روش عنوان شده را در مقایسه با مقدار واقعی  $\beta$  نشان می‌دهد. چنان‌که مشاهده می‌شود روش ارائه شده عمل‌کرد بهتری در برآورد پارامتر  $\beta$  در مقایسه با مقدار واقعی آن‌ها دارد (توجه کنیم در تحلیل بیزی میانگین توزیع پسینی به‌عنوان برآورد در نظر گرفته شده است). برای مقایسه کارایی روش‌ها و به‌منظور لحاظ کردن تغییرپذیری نتایج حاصل از شبیه‌سازی، روند شبیه‌سازی را ۱۰۰ مرتبه تکرار کرده و دو معیار ارزیابی<sup>۱۷</sup> پارامترها و جذر میانگین توان دوم خطا<sup>۱۸</sup> را طبق این روابط محاسبه می‌کنیم:

17. Bias

18. Root mean square error

$$Bias(\hat{\beta}_k) = \left| \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\beta}_{ik} - \beta_{ik}) \right|, k = 1, \dots, 8 \quad RMSE(\hat{\beta}_k) = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\beta}_{ik} - \beta_{ik})^2}$$

جدول ۱. برآورد پارامترها و انحراف معیار آن‌ها زمانی که توزیع خطاها نرمال استاندارد و  $\tau = 0.5$  است

مدل	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
$\beta_{True}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
BENQR	۰/۰۹۷	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶
انحراف معیار	۰/۱۱۴	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶
PQR	۰/۱۷۳	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴
انحراف معیار	۰/۱۷۸	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶
QR	۰/۱۲۰	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳
انحراف معیار	۰/۱۲۲	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹
$\beta_{True}$	۱/۵	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
BENQR	۱/۴۱۰	۳/۰۲۶	۳/۰۲۶	۳/۰۲۶	۳/۰۲۶	۳/۰۲۶	۳/۰۲۶	۳/۰۲۶
انحراف معیار	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶	۰/۱۱۶
PQR	۱/۴۶۳	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴	۳/۰۶۴
انحراف معیار	۰/۱۵۹	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶	۰/۱۵۶
QR	۱/۴۰۰	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳	۳/۰۴۳
انحراف معیار	۰/۱۳۲	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹
$\beta_{True}$	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵
BENQR	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴
انحراف معیار	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹	۰/۱۲۹
PQR	۱/۰۲۸	۰/۸۶۱	۰/۸۶۱	۰/۸۶۱	۰/۸۶۱	۰/۸۶۱	۰/۸۶۱	۰/۸۶۱
انحراف معیار	۰/۱۲۵	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲	۰/۱۵۲
QR	۰/۹۶۵	۰/۷۶۲	۰/۷۶۲	۰/۷۶۲	۰/۷۶۲	۰/۷۶۲	۰/۷۶۲	۰/۷۶۲
انحراف معیار	۰/۱۳۰	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳	۰/۱۳۳

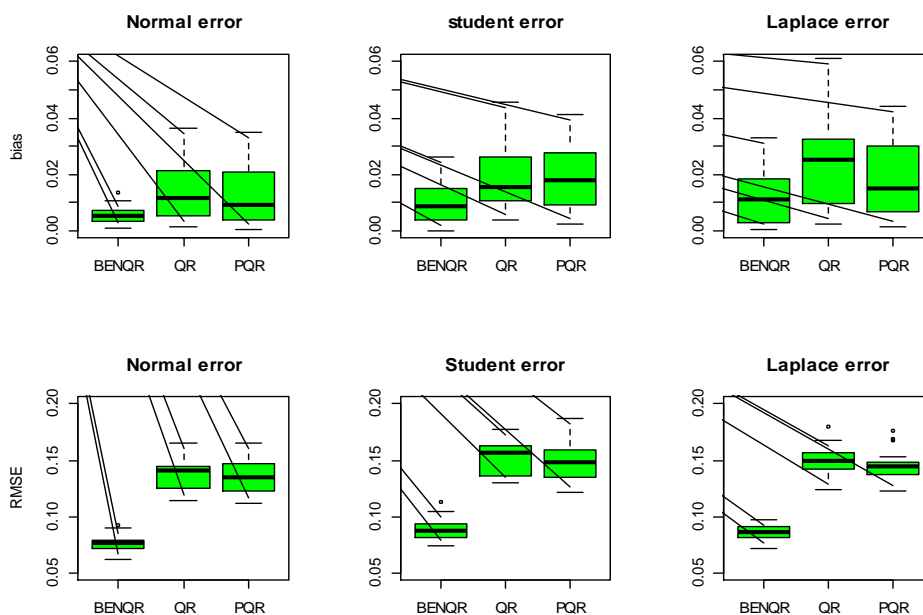
هر چه اندازه این معیارها کوچک باشد، حاکی از کارایی زیاد مدل است. چون نوشتن تمام مقادیر با توجه به وجود سه مدل، دو روش برآورد برای سه توزیع خطا و بیست و چهار پارامتر در قالب جدول امکان‌پذیر نیست، بنابراین نتایج در قالب نمودارهای جعبه‌ای برای چندک‌های (۰/۲۵، ۰/۵، ۰/۷۵)  $\tau =$ ، خلاصه شده‌اند که نتایج آن در شکل‌های ۲، ۳ و ۴ ارائه شده است. هر چه نمودارهای جعبه‌ای کوچکتر و نزدیک به صفر باشند، نشان‌دهنده آریبی کمتر و برآورد بهتر پارامترها است. در شکل ۲ عملکرد روش‌ها از نقطه نظر آریبی و RMSE در چندک  $\tau = 0.25$  مقایسه می‌شود. با توجه به این شکل روش BENQR در تمامی توزیع‌های فرض شده برای خطاها عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. شکل‌های ۳ و ۴ نیز عملکرد روش‌ها را از نظر معیارهای ذکر شده در چندک‌های  $\tau = 0.5$  و  $\tau = 0.75$  مقایسه می‌کند. با توجه به این دو شکل مشاهده می‌شود که مانند شکل ۲، در این نمودارها نیز روش ارائه شده برآورد بهتری از پارامترها در تمامی توزیع‌های فرض شده برای خطا دارند.

### تحلیل داده‌های واقعی

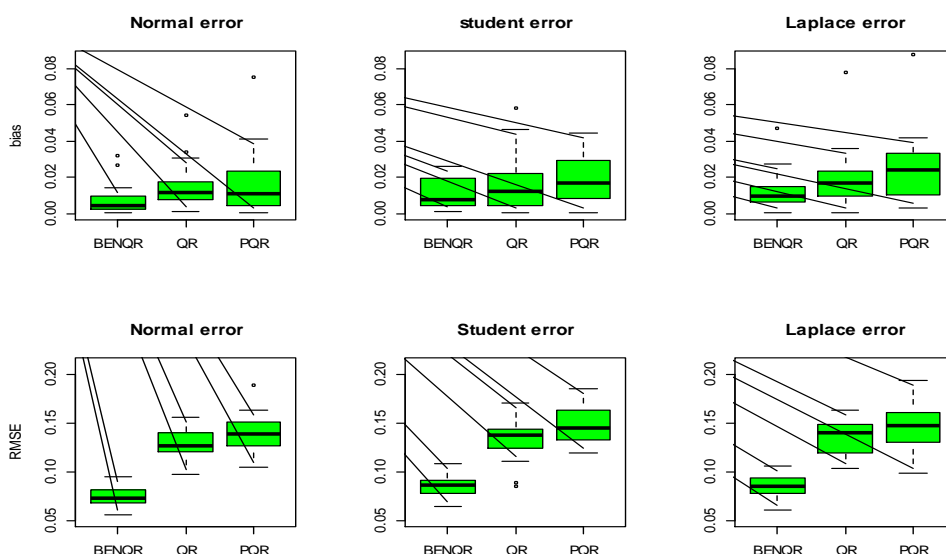
در این بخش به بررسی و تحلیل داده‌های واقعی می‌پردازیم. این داده‌ها شامل رشد اندازه قد ۵۰۰ کودک از بدو تولد تا دوسالگی است که از سال ۱۳۹۱ تا سال ۱۳۹۲ (به مدت دو سال) از درمان‌گاه‌های شهرستان زنجان به تصادف انتخاب و جمع‌آوری شده است. هدف بررسی تأثیر برخی عوامل بر میزان رشد قد کودکان است. این

عوامل یعنی متغیرهای تبیینی عبارت‌اند از: جنسیت کودک  $x^{(۱)}$ ، فاصله زایمان با کودک قبل  $x^{(۲)}$ ، شاغل بودن یا نبودن مادر  $x^{(۳)}$ ، سن مادر  $x^{(۴)}$ ، چندمین نوزاد خانواده بودن  $x^{(۵)}$ ، تحت مراقبت ویژه بودن مادر  $x^{(۶)}$ ، وزن مادر  $x^{(۷)}$ ، قد مادر  $x^{(۸)}$ ، سن تولد نوزاد  $x^{(۹)}$ ، چندقلو بودن نوزاد  $x^{(۱۰)}$ ، مدت شیردهی انحصاری مادر  $x^{(۱۱)}$ ، مدت شیردهی مادر در کنار غذای کمکی  $x^{(۱۲)}$  و متغیر پاسخ نیز اندازه‌قد کودک از بدو تولد تا دو سالگی  $y$  است که در فاصله‌های زمانی بدو تولد، ۱، ۲، ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸ و ۲۴ ماهگی اندازه‌گیری شده است. بنابراین مدل با اثرات تصادفی برای این داده‌ها را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

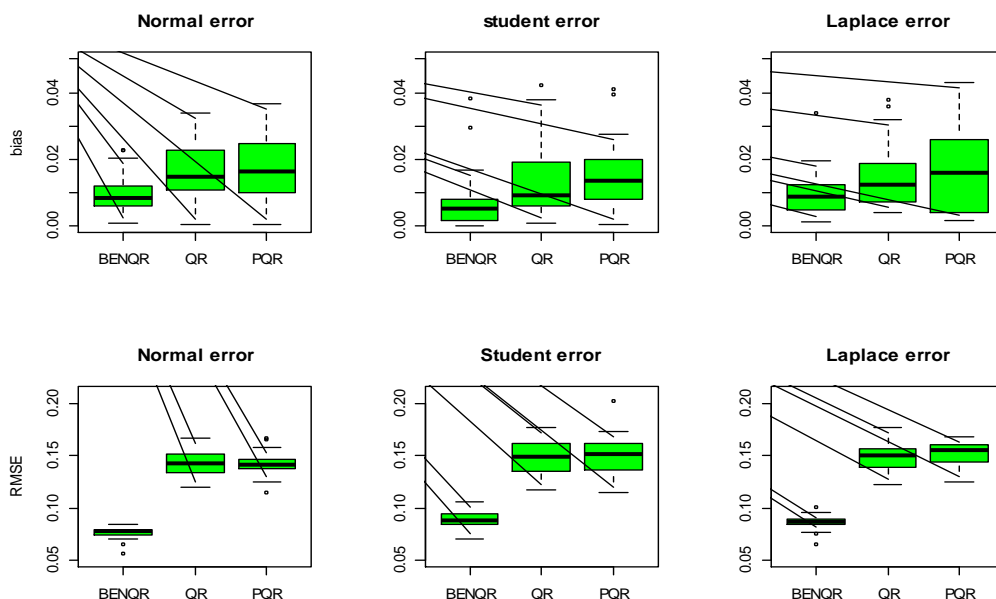
$$y_{ij} = x_{ij}^{(۱)}\beta_1 + x_{ij}^{(۲)}\beta_2 + \dots + x_{ij}^{(۱۲)}\beta_{12} + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$



شکل ۲. عملکرد روش‌ها به لحاظ معیار اریبی و RMSE در چنک  $\tau = ۰/۲۵$



شکل ۳. عملکرد روش‌ها به لحاظ معیار اریبی و RMSE در چنک  $\tau = ۰/۵$



شکل ۴. عملکرد روش‌ها به لحاظ معیار اریبی و RMSE در چندک  $\tau = 0.75$

که در آن  $i = 1, \dots, 50, j = 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 18, 24$  است. در برآزش مدل به روش BENQR توزیع مؤلفه‌های خطا  $\varepsilon_{ij}$  را لاپلاس نامتقارن،  $ALD(\cdot, \sigma, \tau)$  در نظر گرفته و با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبس، ۲۰۰۰۰ نمونه از توزیع‌های پسینی شرطی کامل پارامترها تولید کرده و ۱۰۰۰۰ نمونه اول را به‌عنوان دوره هم‌گرایی مطلوب کنار می‌گذاریم. برای پارامترهای  $\beta$  و  $\sigma$ ، توزیع‌های پیشینی را ناآگاهی‌بخش به‌صورت  $\beta \sim N_{\lambda}(\cdot, 100I)$  و  $\sigma \sim IGamma(0 / 0.1 / 0)$  در نظر می‌گیریم. جدول ۲ برآورد پارامترهای مدل و انحراف معیار آن‌ها را برای سه روش ذکر شده در چندک  $\tau = 0.5$  نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که هر سه روش ضرایب مدل را تقریباً یکسان برآورد کرده‌اند. اندازه انحراف معیار برآوردها در هر سه روش برای متغیرهای تبیینی  $x^{(4)}$  و  $x^{(11)}$  در مقایسه با اندازه قدر مطلق برآوردها کوچک هستند که حاکی از تأثیر معنی‌دار آن‌ها بر متغیر پاسخ است. در هر دو روش QR و PQR در سطح معنی‌داری ۵ درصد تأثیر این دو متغیر معنی‌دار است. برای مقایسه دقت پیش‌بینی سه روش از معیار اعتبارسنجی متقابل ده دسته‌ای<sup>۱۹</sup> استفاده می‌کنیم که معیاری مرسوم در تحلیل داده‌های مقطعی و طولی است [۵]، [۱۶]. برای این منظور مشاهدات مربوط به ۵۰۰ کودک به ۱۰ گروه تقسیم شده (هر گروه شامل ۵۰ کودک است) و سپس در گروه اول، مشاهدات مربوط به ماه‌های ۲۴، ۱۸، ۱۲، و ۹ برای هر ۵۰ کودک حذف شده، سپس هر سه مدل به کل داده‌های باقی‌مانده برآزش می‌شوند. مقادیر پاسخ برای مشاهدات حذف شده از طریق مدل‌های برآزش شده پیش‌بینی شده و میانگین توان دوم انحرافات پاسخ‌های پیش‌بینی شده از مقادیر واقعی آن‌ها<sup>۲۰</sup> (MSE) محاسبه می‌شود. این روند با حذف مشاهدات عنوان شده در گروه ۵۰ تایی دوم ادامه پیدا کرده و بالاخره با گروه دهم پایان می‌پذیرد. در جدول ۳ مقادیر میانگین، میانه و انحراف معیار MSEها که برای ۱۰ گروه در سه چندک مختلف ۰/۵، ۰/۳ و ۰/۷ محاسبه شده، آمده است. چنان‌که از این جدول ملاحظه می‌شود، روش BENQR به لحاظ پیش‌بینی مقایره آینده در طول

19. Ten fold  
20. Mean square error

زمان برای چندک‌های متفاوت که یکی از اهداف مهم در تحلیل داده‌های طولی است، عمل‌کرد بهتری نسبت به روش‌های دیگر دارد.

جدول ۲. برآورد پارامترها و انحراف معیار آن‌ها برای سه روش در چندک  $\tau = 0.5$

QR		PQR		BENQR		پارامترها
انحراف معیار	برآورد	انحراف معیار	برآورد	انحراف معیار	برآورد	
۰/۶۱۴۳	۰/۰۹۴۰	۰/۶۰۴۲	۰/۰۴۲۸	۰/۴۶۹۶	۰/۱۷۱۷	$\beta_1$
۰/۹۲۳۲	۰/۴۰۹۳	۰/۸۷۹۰	-۰/۴۳۵۹	۰/۶۸۷۵	۰/۳۹۷۷	$\beta_2$
۰/۹۷۱۲	۰/۸۵۰۲	۰/۸۵۲۲	۰/۱۰۹۵	۰/۷۴۱۸	۰/۸۵۰۱	$\beta_3$
۰/۰۵۵۸	-۰/۱۲۹۰	۰/۰۴۲۵	-۰/۱۳۶۶	۰/۰۳۳۶	-۰/۱۲۳۶	$\beta_4$
۰/۴۷۶۶	۰/۱۳۴۷	۰/۴۵۰۸	۰/۰۰۳۳	۰/۳۸۴۶	۰/۱۱۸۷	$\beta_5$
۰/۵۷۹۱	-۰/۴۹۷۸	۰/۵۴۳۱	-۰/۲۳۹۷	۰/۴۴۰۱	-۰/۴۵۱۲	$\beta_6$
۰/۰۳۵۰	۰/۰۱۰۸	۰/۰۳۴۳	-۰/۰۰۶۰	۰/۰۲۷۱	۰/۰۱۱۵	$\beta_7$
۰/۰۴۴۱	-۰/۰۰۴۷	۰/۰۵۶۶	۰/۰۰۷۴	۰/۰۳۵۰	-۰/۰۰۱۶	$\beta_8$
۰/۱۶۵۲	-۰/۰۷۹۲	۰/۲۱۸۷	-۰/۰۱۴۸	۰/۱۳۰۳	-۰/۰۶۱۷	$\beta_9$
۱/۰۲۸۸	-۰/۹۲۶۸	۱/۴۱۱۰	-۱/۳۰۹۸	۱/۴۱۰۰	-۰/۷۵۷۲	$\beta_{10}$
۰/۰۱۲۱	۰/۲۰۰۴	۰/۰۲۹۴	۰/۱۴۶۵	۰/۰۲۵۶	۰/۱۵۵۸	$\beta_{11}$
۰/۱۳۱۴	۰/۰۵۷۱۷	۰/۱۳۱۰	۰/۰۶۷۷	۰/۱۰۷۰	۰/۰۷۱۱	$\beta_{12}$

جدول ۳. میانگین، میانه و انحراف معیار MSE ها در چندک‌های ۰/۷، ۰/۳ و ۰/۵

چندک	مدل	میانگین	میانه	انحراف معیار
$\tau = 0.5$	BENQR	۱۵۱/۶۵۷۹	۱۵۰/۸۷۵۴	۴/۱۸۰۰
	PQR	۱۵۲/۸۷۶۴	۱۵۴/۵۰۸۴	۵/۶۷۵۵
	QR	۱۵۲/۵۲۸۵	۱۵۴/۶۵۴۸	۵/۶۳۵۳
$\tau = 0.3$	BENQR	۱۵۴/۲۳۴۶	۱۵۳/۷۴۵۹	۶/۲۰۰۱
	PQR	۱۵۶/۹۴۳۸	۱۵۵/۸۳۷۳	۸/۰۴۸۶
	QR	۱۵۵/۴۸۶۷	۱۵۵/۹۳۲۸	۷/۹۳۴۷
$\tau = 0.7$	BENQR	۱۶۱/۱۲۸۷	۱۵۸/۸۴۳۶	۴/۵۶۴۰
	PQR	۱۶۵/۴۳۲۶	۱۶۴/۹۴۳۷	۶/۸۳۴۵
	QR	۱۶۶/۵۶۳۴	۱۶۳/۸۴۳۹	۷/۵۶۴۸

### بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش‌های طولی علاوه بر اثرات ثابت که تأثیر هر یک از متغیرهای تبیینی را بر متغیر پاسخ بیان می‌کند، اثرات تصادفی نیز در مدل لحاظ می‌شود. این اثرات تغییرات بین متغیرهای پاسخ (تغییرات بین گروهی) را کنترل می‌کند. در بررسی‌هایی که تعداد مشاهدات از متغیر پاسخ زیاد است، از این رو، اثرات تصادفی نیز زیاد شده و پارامترهای زیادی وارد مدل شده و بنابراین دقت مدل کم و تفسیر آن مشکل می‌شود. در این مقاله با ترکیب توابع تاوان لاسوی سازوار و ستیغی و ایجاد تاوان الاستیکنت سازوار روی اثرات تصادفی، علاوه بر این‌که اثرات تصادفی را به سمت صفر منقبض کرده و اثرات کم اهمیت از مدل حذف شدند، اثرهای تصادفی که تأثیر یک‌سان بر متغیر پاسخ داشته‌اند یا دارای هم‌بستگی زیادی بودند، به‌طور یک‌سان برآورد شده و از این رو، منجر به افزایش دقت مدل شده است. تاوان الاستیکنت سازوار با تعریف توزیع پیشینی مناسب روی اثرهای

تصادفی، در مدل لحاظ شده و از دیدگاه آماربیزی بررسی شد. مزیت مدل ارائه شده در برآورد همه پارامترهای مدل با روش نمونه‌گیری گیبس است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان داد که روش بیزی ارائه شده در تمامی چندک‌ها نسبت به روش‌های متداول دیگر در رگرسیون چندکی برای داده‌های طولی با اثرات تصادفی در برآورد ضرایب رگرسیونی عمل‌کرد بهتری دارد. نتایج حاصل از تحلیل داده‌های واقعی نیز مشخص کرد که روش ارائه شده دقت زیادی نسبت به دو روش دیگر دارد. بنابراین استفاده از مدل ارائه شده در تحلیل داده‌های واقعی توصیه می‌شود.

### منابع

1. Koenker R., Bassett G., "Quantile regression", *Econometrica*, 46 (1978).
2. Koenker R., "Quantile regression for longitudinal data", *Journal of Multivariate Analysis*, 91 (2004) 74-89.
3. Tibshirani R., "Regression shrinkage and selection via the Lasso", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58 (1996) 267-288.
4. Zou H., "The adaptive Lasso and its oracle properties", *Journal of the American Statistical Association*, 101 (2006) 1418-1429.
5. Zou H., Hastie T., "Regularization and variable selection via the elastic net", *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 67 (2005) 301-320.
6. Hoerl A.E., Kennard R., "Ridge regression-applications to non orthogonal problems", *Technometrics*, 12 (1970) 61-93.
7. Li Q., Lin N., "The Bayesian elastic net", *Bayesian Analysis*, 5 (2010) 151-170.
8. Chen M., Carlson D., Zaas A., Woods C., Ginsburg G.S., Lucas J., Carin L., "Detection of viruses via statistical gene expression analysis", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 58 (2011) 468-479.
9. Yu K., Moyeed R.A., "Bayesian quantile regression", *Statistics and Probability Letters*, 54 (2001) 437-447.
10. Geraci M., Bottai M., "Quantile regression for longitudinal data using the asymmetric Laplace distribution", *Biostatistics*, 8 (2007) 140-154.
11. Kozumi H., Kabayashi G., "Gibbs sampling methods for Bayesian quantile regression", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81 (2011) 1565-1578.
12. Polson N.G., Scott J.G., Windle J., "The Bayesian Bridge", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 76 (2014) 713-733.

13. Breymann W., Luthi D., "ghyp: A package on the generalized hyperbolic Distribution and its special cases, R Package Version 1.5.6 URL [http:// www.r-project.org](http://www.r-project.org) (2014).
14. Luo Y., Lian H., Tian M., "Bayesian quantile regression for longitudinal data model", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82 (2012) 1635-1649.
15. Gelman A., Carlin J.B., Stern H. S., Rubin D.B., "Bayesian data analysis", Chapman and Hall, London 1995.
16. Lin T.I., Lee J.C., "Estimation and prediction in linear mixed models with skew-normal random effects for longitudinal data", *Statistics in Medicine*, 27 (2008) 1490-1507.