

## بررسی مسئله لایه مرزی شامل معادله دیفرانسیل اغتشاشی کوشی ریمان با شرط مرزی غیرموضعی

سیامک اشرفی، محمد جهانشاهی\*، نیهان علی‌اف؛ دانشگاه آذربایجان، گروه ریاضی

دریافت ۹۳/۲/۱۳

پذیرش ۹۴/۱۲/۱۰

### چکیده

نظریه لایه مرزی که به مسائل اغتشاشی غیرعادی نیز موسوم هستند بیش‌تر برای معادلات دیفرانسیل عادی به‌کار رفته است. در حالی که مسائل لایه مرزی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (پاره‌ای) کاربردهای بسیار وسیعی در زمینه‌های مختلف فیزیک مهندسی دارد. به‌دلیل رفتار پیچیده حدی و مرزی جواب‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، مسائل لایه مرزی که شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است کمتر بررسی شده‌اند. در این مقاله مسئله لایه مرزی شامل معادله دیفرانسیل پاره‌ای با شرط مرزی غیرموضعی بررسی می‌شود. از این‌رو، برای نشان دادن وقوع و یا عدم وقوع لایه مرزی در نزدیکی نقاط مرزی، مسئله لایه مرزی را موضعی‌سازی می‌کنیم. در نهایت برای مسئله داده شده شرایطی ارائه می‌شود که وقوع لایه مرزی و عدم آن را در نقاط مرزی دامنه مشخص می‌کند. همچنین شرط مرزی مناسب تعیین می‌شود تا هم مسئله لایه مرزی خوش طرح باشد و هم لایه مرزی ایجاد نشود تا جواب‌های تقریبی شبیه مسائل لایه مرزی شامل معادلات دیفرانسیل عادی نوشته شود.

واژه‌های کلیدی: جواب اساسی، شرایط ضروری، مسئله لایه مرزی، معادله اغتشاشی کوشی ریمان

### مقدمه

مسائل لایه مرزی که به مسائل اغتشاشی غیرعادی نیز موسوم هستند مدل ریاضی خیلی از پدیده‌های فیزیک و مهندسی است که از لحاظ ساختار مدل ریاضی پارامتر کوچک  $\epsilon$  در ضریب بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شود. این مسائل نخست در کارهای مدل‌سازی ریاضی لودویگ پرانتدل در سال ۱۹۰۴ در سخنرانی‌اش در سومین کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در هایدلبرگ با عنوان حرکت مایعات با اصطکاک کوچک ظاهر شد [۱]. نظریه لایه مرزی پرانتدل بعدها در کتاب هیدرودینامیک لامب در سال ۱۹۴۲ و سپس لاجرس استورم در ۱۹۶۴ و وان دیک در ۱۹۶۴ توسعه دادند. هم‌زمان با کار پرانتدل، سوال یک شیمیدان، ریاضی‌دان ژاپنی به‌نام ناگومو را تشویق کرد تا یک مسئله مقدار اولیه با معادله دیفرانسیل شامل پارامتر  $\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0$  وقتی که  $\lambda \rightarrow 0$  بررسی کند [۲]، ادامه نظریه لایه مرزی با عنوان اغتشاشات غیرعادی در کار فریدریگس و واسو در سمینار نوسان‌های غیرخطی در دانشگاه نیویورک در سال ۱۹۶۴ ارائه شد. این نظریه را هم‌زمان ریاضی‌دانان روسی مثل تیخانوف و شاگردانش در دانشگاه دولتی مسکو خصوصاً واسیل و آلینیک در بسط روش‌های مفید آنالیز مجانبی جواب‌های معادلات دیفرانسیل شامل پارامتر ادامه دادند

\*نویسنده مسئول jahanshahi@azaruniv.edu

[۴]، [۵]. بنابراین ریاضی‌دانان و فیزیکدانان سراسر دنیا به نظریه لایه مرزی توجه زیادی داشته‌اند. در سال‌های اخیر ریاضی‌دانانی مثل روبرت امالی [۶] و اچ. میلر و اچ. آشیلدور و پ. دولان در [۷] این مسائل را از نقطه نظر بسط‌های جانبی جواب‌ها همراه با شرایط مرزی موضعی بررسی کرده‌اند.

مؤلفان این مسائل را از نقطه نظر محل تشکیل لایه مرزی با شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی بررسی کرده‌اند چون ساختار جواب‌های این مسائل به صورت بسط‌های جانبی نسبت به پارامتر در محل لایه مرزی و خارج از لایه مرزی است؛ از این رو، تشخیص این‌که در کدام نقطه مرزی لایه مرزی ایجاد می‌شود مهم است. اما همه مسائل لایه مرزی مذکور، شامل معادلات دیفرانسیل عادی هستند از جمله می‌توان به کارهای [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] از مؤلفان اشاره کرد. هدف عمده در این مقالات تشخیص لایه مرزی در حالت‌هایی است که مسئله با شرایط مرزی غیرموضعی داده شده است. در کارهای سایرین که به آن‌ها اشاره شد مسائل مذکور با شرایط مرزی موضعی کلاسیک مثل شرط مرزی دیریکله و نویمان داده شده است.

در این مقاله نظریه لایه مرزی را برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (با مشتقات جزئی) بررسی می‌کنیم. با تأکید بر این‌که نظریه لایه مرزی برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر خلاف معادلات دیفرانسیل معمولی سابقه چندانی ندارد. مسائل لایه مرزی شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در خیلی از زمینه‌های فیزیک و مهندسی مثل مکانیک و دینامیک سیالات، نظریه الاستیسیته، مکانیک کوانتومی، آیرودینامیک، پلاسما دینامیک، هیدرو دینامیک مغناطیس، نظریه راکتور شیمیایی، فرایندهای پخش و سایر زمینه‌های حرکت سیالات و فلوهای تشعشعی ظاهر می‌شود. به عنوان مثال جریان لایه مرزی در یک سیال غیرمتراکم با انتقال الکتریکی با معادله لایه مرزی برای میدان فلو بدین صورت داده می‌شود:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + Mu \quad (1)$$

برای مقدار زیاد  $R$  که  $\varepsilon = \frac{1}{R}$  در نظر گرفته می‌شود و برای مقدار کم  $R$  با معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon Mu, \quad y \rightarrow \infty, \quad t > 0. \quad (2)$$

و با شرایط  $0 < y < \infty$ ،  $u(y, t) \rightarrow 0$ ،  $u(y, 0) = 0$ ،  $u(0, T) = 1$  داده می‌شود. که در آن  $R = \frac{v \cdot L}{\nu}$  عدد

$$\text{رینولدز و } M = \frac{\delta \beta^* L}{\rho \nu} \text{ عدد هارتمن است [۱۳].}$$

مثال دیگر معادله اغتشاشی بیضوی خطی

$$Lu \equiv \varepsilon \Delta u + a \nabla u - bu = f, \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (3)$$

با شرایط مرزی دیریکله،  $u = 0$  روی مرز  $\Omega$  که در آن  $1 \gg \varepsilon > 0$  است. این مسئله را هگارتی و دیگران در [۱۴] بررسی کرده‌اند. مسئله مذکور در واقع مدل ریاضی حالت پایایی فرایند پخش است. و در نهایت مسئله مقدار مرزی اغتشاشی

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \Delta u + \sum b_i(x) u_{x_i} = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (4)$$

و با شرایط مرزی دیریکله  $u = \varphi$  روی مرز  $D$  است که کامین [۱۵] بررسی کرده است. کامین این معادله را با انداختن جمله  $\varepsilon \Delta u$  به معادله  $\sum b_i(x) u_{x_i} = 0$  پرداخته است. با فرض این که تابع پتانسیل  $\psi(x)$  چنان باشد که  $b_i(x) = \psi_{x_i}$  که  $i = 1, 2, \dots, n$ ، او ثابت کرده است که جواب به یک ثابت میل می کند چیزی که قبلاً ماتکوسکی و شوس [۱۶] با استفاده از یک بسط مجانبی به دست آورده اند.

در بخش پایانی مقاله چند مسئله لایه مرزی حل نشده که مربوط به معادله (۴) است و با کارهای بعدی مؤلفان در ارتباط است برای تحقیق و کار پژوهشی معرفی شده است، بررسی حل این مسئله ها می تواند با چهار چوب روشی که در این مقاله ارائه می شود انجام شود.

### بیان ریاضی مسئله

در این مقاله معادله کوشی ریمان اغتشاشی بیضوی را بدین صورت در نظر می گیریم:

$$\ell_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_r} + i\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_1} = 0, \quad D = \{(x_1, x_r) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_r \in (0, 1)\} \quad (5)$$

که پارامتر کوچک  $\varepsilon$  در ضریب جمله دوم پارامتر اغتشاشی و  $i$  موهومی محض است. این معادله با  $\varepsilon \neq 0$  معادله از نوع بیضوی است و با  $\varepsilon = 0$  تبدیل به معادله ای هذلولوی می شود. با توجه به ناحیه مورد نظر معادله که با  $D$  نمایش داده شده است شرط مرزی (۶) را به طور طبیعی روی جواب در بینهایت در نظر می گیریم:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u_\varepsilon(x_1, x_r) = 0 \quad (6)$$

هدف این است که با بررسی رفتار این معادله بر حسب تغییر پارامتر (جای گذاری با  $\varepsilon = 0$ ) تشکیل و یا عدم تشکیل لایه های مرزی را در نقاط مرزی  $x_r = 1, x_r = 0$  مشخص کنیم و در نهایت شرط مرزی مناسب برای این معادله را تعیین کنیم که لایه مرزی در مرزهای فوق ایجاد نشود.

چون در مسایل لایه مرزی جواب های تقریبی یکنواخت در ناحیه لایه مرزی (جواب داخل لایه) و خارج لایه مرزی (جواب خارجی) به صورت جداگانه و با تکنیک های خاصی نوشته می شود از این رو، تشخیص این که لایه مرزی در کدام یک از مرزها تشکیل می شود حائز اهمیت است [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]. به این منظور نخست الحاقی معادله (۵) را به دست می آوریم. برای این تابع اختیاری  $Z_\varepsilon(x)$  را به طرفین معادله (۵) ضرب کرده و در ناحیه  $D$  انتگرال گیری انجام می دهیم و داریم:

$$(\ell_\varepsilon u_\varepsilon, Z_\varepsilon(x)) \equiv \int_R dx_r \int \ell_\varepsilon u_\varepsilon \overline{Z_\varepsilon(x)} dx_1 = \int_R dx_1 \int \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_r} \overline{Z_\varepsilon(x)} dx_r + i\varepsilon \int_R dx_r \int \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_1} \overline{Z_\varepsilon(x)} dx_1$$

با توجه به شرط (۶) داریم:

$$\int_R u_\varepsilon(x_1, 1) \overline{Z_\varepsilon(x_1, 1)} dx_1 - \int_R u_\varepsilon(x_1, 0) \overline{Z_\varepsilon(x_1, 0)} dx_1 - \int_R dx_r \int dx_1 u_\varepsilon(x) \left[ \frac{\partial \overline{Z_\varepsilon(x)}}{\partial x_r} + i\varepsilon \frac{\partial \overline{Z_\varepsilon(x)}}{\partial x_1} \right] = 0. \quad (7)$$

با توجه به اتحاد لاگرانژ از رابطه اخیر چنین بر می‌آید که الحاقی معادله (۵) بدین صورت است:

$$\ell_{\varepsilon}^* Z_{\varepsilon}(x) \equiv \frac{\partial Z_{\varepsilon}(x)}{\partial x_{\gamma}} - i\varepsilon \frac{\partial Z_{\varepsilon}(x)}{\partial x_{\alpha}} \quad (۸)$$

### محاسبه جواب اساسی معادله الحاقی

اکنون جواب اساسی (جواب به مفهوم توزیع) معادله (۸) را به دست می‌آوریم به این منظور معادله ناهمگن نظیر معادله (۸) را با جمله ناهمگن  $g(x)$  در نظر گرفته و از تبدیل فوریه بدین منظور استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial Z_{\varepsilon}(x)}{\partial x_{\gamma}} - i\varepsilon \frac{\partial Z_{\varepsilon}(x)}{\partial x_{\alpha}} = g(x) \quad (۹)$$

در استفاده از روش تبدیل فوریه فرض می‌کنیم:

$$Z_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} \tilde{Z}_{\varepsilon}(\alpha) d\alpha, \quad (۱۰)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} \tilde{g}(\alpha) d\alpha \quad (۱۱)$$

$$\tilde{g}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-i(\alpha, \xi)} g(\xi) d\xi \quad (۱۲)$$

با توجه به روابط (۱۰-۱۲) و با توجه به ضرب داخلی  $(\alpha, x) = \alpha_{\gamma} x_{\gamma} + \alpha_{\alpha} x_{\alpha}$  و با اعمال تبدیل فوریه به طرفین معادله (۵) داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} i\alpha_{\gamma} \tilde{Z}(\alpha) d\alpha - i\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} i\alpha_{\alpha} \tilde{Z}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} \tilde{g}(\alpha) d\alpha,$$

و با ساده کردن روابط بالا داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} \left[ (i\alpha_{\gamma} + \varepsilon\alpha_{\alpha}) \tilde{Z}(\alpha) - \tilde{g}(\alpha) \right] d\alpha = 0.$$

بنابراین برای  $\tilde{Z}(\alpha)$  معادله جبری (۱۳) را داریم:

$$(i\alpha_{\gamma} + \varepsilon\alpha_{\alpha}) \tilde{Z}(\alpha) = \tilde{g}(\alpha), \quad (۱۳)$$

$$\tilde{Z}(\alpha) = \frac{\tilde{g}(\alpha)}{i\alpha_{\gamma} + \varepsilon\alpha_{\alpha}}$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۳) در تبدیل

عکس فوریه (۱۰) خواهیم داشت:

$$Z_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i(\alpha, x)} d\alpha \frac{1}{i\alpha_{\gamma} + \varepsilon\alpha_{\alpha}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-i(\alpha, \xi)} g(\xi) d\xi$$

و نهایتاً جواب اساسی (توزیع) معادله الحاقی (۸) بدین صورت است:

$$V_{\varepsilon}(x - \xi) = \frac{1}{4\pi^r} \int_{\mathbb{R}^r} \frac{e^{i(\alpha, x - \xi)}}{i\alpha_{\gamma} + \varepsilon\alpha_{\alpha}} d\alpha \quad (۱۴)$$

لازم به ذکر است جواب اساسی فوق نسبت به بردار نرمال خارجی حساب شده است. اگر تبدیل فوریه را تنها در امتداد محور  $x_r$  (نسبت به متغیر  $x_r$ ) به کار ببریم نمایش دیگری برای جواب اساسی (۱۴) بدین صورت به دست می آید [۱۷]:

$$V_\varepsilon(x - \xi) = \theta(x_r - \xi_r) \delta(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon(x_r - \xi_r)) \quad (15)$$

که در آن  $\delta(x - \xi)$  تابع دلتای دیراک و  $\theta(x - \xi)$  تابع هویساید واحد است که در حالت يك بعدی  $x, \xi \in (a, b)$  بدین صورت نمایش داده می شوند:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in (a, b) \\ \frac{1}{2} f(\xi), & \xi = a, \xi = b, \\ 0, & \xi \notin [a, b] \end{cases}$$

و

$$\theta(x - \xi) = \begin{cases} 1, & x > \xi \\ \frac{1}{2}, & x = \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases}$$

توجه شود که در رابطه (۱۵)،  $\xi = (\xi_1, \xi_r)$  و  $x = (x_1, x_r)$ . البته می توان خاصیت های مذکور را برای تابع دلتای دیراک و تابع هویساید در حالت برداری نیز به طور مشابه نوشت.

در لم زیر نشان می دهیم تابع تعمیم یافته (توزیع) حقیقتاً جواب اساسی (توزیع) معادله (۸) است.

لم ۱. معادله کوشی-ریمان اغتشاشی (۸) دارای جواب اساسی بدین صورت است:

$$V_\varepsilon(x - \xi) = \theta(x_r - \xi_r) \delta(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon(x_r - \xi_r))$$

اثبات: نشان می دهیم مشتقات تعمیم یافته تابع مذکور در معادله کوشی-ریمان اغتشاشی (۸) که طرف راست آن تابع دلتای دیراک است، صدق می کند. به عبارت دیگر طبق تعریف جواب اساسی، اگر این جواب در معادله دیفرانسیل (۸) قرار داده شود باید تابع دلتای دیراک حاصل شود، یعنی

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_r} = \delta(x_r - \xi_r) \delta'(x_1 - \xi_1) + i\varepsilon(x_r - \xi_r) + i\varepsilon \theta(x_r - \xi_r) \delta'(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon(x_r - \xi_r))$$

همچنین

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_1} = \theta(x_r - \xi_r) \delta'(x_1 - \xi_1) + i\varepsilon(x_r - \xi_r)$$

با جای گذاری مقادیر مذکور در معادله (۸) و محاسبه مشتق تابع دلتای دیراک داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_r} - i\varepsilon \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_1} &= \delta(x - \xi) + i\varepsilon \theta(x_r - \xi_r) \delta'(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon(x_r - \xi_r)) \\ &\quad - i\varepsilon \theta(x_r - \xi_r) \delta'(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon(x_r - \xi_r)) = \delta(x - \xi) \end{aligned} \quad (16)$$

اکنون از جواب اساسی (۱۵) استفاده کرده و رابطه‌ای موسوم به شرط ضروری به دست می‌آوریم. شرط ذاتی (یا ضروری) بدین‌منظور گفته می‌شود که هر جواب معادله دیفرانسیل بدون توجه به ناحیه مورد نظر در این شرط صدق می‌کند [۱۷]، [۱۸]، [۱۹].

### محاسبه شرط‌های ضروری

برای محاسبه شرط‌های ضروری، جواب اساسی (۱۴) را به طرفین معادله (۵) ضرب کرده در ناحیه D انتگرال‌گیری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \bullet &= (\ell_\varepsilon u_\varepsilon, V_\varepsilon) \equiv \int_R dx_1 \int \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_r} \overline{V_\varepsilon(x-\xi)} dx_r + i\varepsilon \int dx_r \int \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_1} \overline{V_\varepsilon(x-\xi)} dx_1 \\ &= \int_R dx_1 \left[ u_\varepsilon(x) \overline{V_\varepsilon(x-\xi)} \Big|_{x_r=0} - \int u_\varepsilon(x) \frac{\partial \overline{V_\varepsilon(x-\xi)}}{\partial x_r} dx_r \right] \\ &+ i\varepsilon \int dx_r \left[ u_\varepsilon(x) \overline{V_\varepsilon(x-\xi)} \Big|_{x_1=-\infty}^\infty - \int_R u_\varepsilon(x) \frac{\partial \overline{V_\varepsilon(x-\xi)}}{\partial x_1} dx_1 \right] \\ &= \int_R \left[ u_\varepsilon(x_1, 1) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1, 1 - \xi_r)} - u_\varepsilon(x_1, 0) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1 - \xi_r)} \right] dx_1 \\ &\quad - \int_R dx_1 \int dx_r u_\varepsilon(x) \left[ \frac{\partial \overline{V_\varepsilon(x-\xi)}}{\partial x_r} - i\varepsilon \frac{\partial \overline{V_\varepsilon(x-\xi)}}{\partial x_1} \right]. \end{aligned}$$

که با توجه به رابطه حدی (۶) و محاسبه انتگرال‌های فوق و جاگذاری تابع دلتای دیراک به جای معادله الحاقی ظاهر شده در داخل براکت (در عبارت انتگرال دوگانه بالا) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\int_R \left[ u_\varepsilon(x_1, 1) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1, 1 - \xi_r)} - u_\varepsilon(x_1, 0) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1 - \xi_r)} \right] dx_1 \\ &= \int_R dx_1 \int dx_r u_\varepsilon(x) \delta(x - \xi) \\ &= \begin{cases} u_\varepsilon(\xi), & \xi_1 \in R, \xi_r \in (0, 1), \\ \frac{1}{\gamma} u_\varepsilon(\xi), & \xi_1 \in R, \xi_r = 0, \xi_r = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین با استفاده از رابطه دوم (۱۷) مقادیر زیر را برای مقادیر مرزی  $u_\varepsilon(\xi_1, 0)$  و  $u_\varepsilon(\xi_1, 1)$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} u_\varepsilon(\xi_1, 0) &= \int_R \left[ u_\varepsilon(x_1, 1) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1, 1)} - u_\varepsilon(x_1, 0) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1, 0)} \right] dx_1 \\ \frac{1}{\gamma} u_\varepsilon(\xi_1, 1) &= \int_R \left[ u_\varepsilon(x_1, 1) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1, 0)} - u_\varepsilon(x_1, 0) \overline{V_\varepsilon(x_1 - \xi_1, -1)} \right] dx_1 \end{aligned}$$

اکنون با توجه به ضابطه  $V_\varepsilon(x-\xi)$  در رابطه (۱۵) و جای‌گذاری آن‌ها در روابط بالا در نهایت شرایط ضروری را بدین‌صورت داریم:

$$\frac{1}{\gamma} u_\varepsilon(\xi_1, 0) = \int_R u_\varepsilon(x_1, 1) \theta(1) \delta(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon) dx_1 - \int_R u_\varepsilon(x_1, 0) \theta(0) \delta(x_1 - \xi_1) dx_1 \quad (18)$$

و

$$\frac{1}{\gamma} u_{\varepsilon}(\xi_1, 1) = \int_R u_{\varepsilon}(x_1, 1) \theta(\cdot) \delta(x_1 - \xi_1) dx_1 - \int_R u_{\varepsilon}(x_1, \cdot) \theta(-1) \delta(x_1 - \xi_1 - i\varepsilon) dx_1 \quad (19)$$

مشابه آنچه که در [۱۸] آمده است، با توجه به مقادیر تابع هویساید و خاصیت‌های تابع دلتای دیراک رابطه (۱۹) به یک اتحاد تبدیل می‌شود و رابطه (۱۸) بدین صورت ساده می‌شود:

$$u_{\varepsilon}(\xi_1, \cdot) = u_{\varepsilon}(\xi_1 - i\varepsilon, 1) \quad (20)$$

این رابطه که به‌طور طبیعی در مورد هر جواب معادله (۵) برقرار است به‌عنوان یک شرط ضروری روی معادله (۵) محسوب می‌شود، و همچنین می‌تواند مبنایی برای تعیین شرط مرزی مناسب برای معادله (۵) در نظر گرفته شود. در قضیه (۱) نشان می‌دهیم که معادله کوشی-ریمان اغتشاشی (۵) می‌تواند با یک شرط مرزی غیرموضعی داده شود و جواب تحلیلی آن نیز با استفاده از ضابطه اول رابطه (۱۷) نوشته شود.

**قضیه ۱.** فرض کنید معادله کوشی-ریمان اغتشاشی (۵) در ناحیه

$$D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1)\}$$

و با شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) داده شود:

$$u_{\varepsilon}(\xi_1, \cdot) + u_{\varepsilon}(\xi_1 - i\varepsilon, 1) = \phi(\xi_1), \quad \xi_1 \in \mathbb{R} \quad (21)$$

که در آن  $\phi(\xi_1)$  تابع دلخواه پیوسته است.

هر گاه شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) با شرط ضروری (۲۰) مستقل خطی باشد آن‌گاه مسئله مقدار مرزی (۲۱)-(۵) دارای جواب تحلیلی است که در شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) صدق می‌کند.

**اثبات:** ابتدا با در نظر گرفتن شرط ضروری (۲۰) ملاحظه می‌کنیم:

$$u_{\varepsilon}(\xi_1, \cdot) = u_{\varepsilon}(\xi_1 - i\varepsilon, 1) = \frac{\phi(\xi_1)}{\gamma} \quad (22)$$

روابط فوق در حقیقت شرایط موضعی شده شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) است، از طرفی با توجه به حالت نخست رابطه (۱۷) می‌توان جواب تحلیلی مسئله مذکور با شرط مرزی بالا را بدین صورت نوشت:

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon}(\xi) &= u_{\varepsilon}(\xi_1, \xi_2) \\ &= \int_R u_{\varepsilon}(x_1, 1) \theta(1 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - i\varepsilon(1 - \xi_2)) dx_1 \\ &\quad - \int_R u_{\varepsilon}(x_1, \cdot) \theta(-\xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon\xi_2) dx_1 \\ &= \int_R u_{\varepsilon}(x_1, 1) \delta(x_1 - \xi_1 - i\varepsilon(1 - \xi_2)) dx_1 \\ &= u_{\varepsilon}(\xi_1 + i\varepsilon(1 - \xi_2), 1) \end{aligned}$$

با ملاحظه رفتار حدی این جواب وقتی که  $\varepsilon \rightarrow 0$  داریم:

$$u_{\varepsilon}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(\xi) = u_{\varepsilon}(\xi_1, 1)$$

و با در نظر گرفتن رفتار حدی از رابطه (۲۲) داریم:

$$u_{\varepsilon}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(\xi_1, \cdot) = u_{\varepsilon}(\xi_1, 1) = \frac{1}{\gamma} \phi(\xi_1)$$

یعنی جواب حدی حاصل از جواب تحلیلی مذکور در شرایط مرزی موضعی شده صدق می‌کند.

**قضیه ۲.** فرض کنیم معادل  $G$  دیفرانسیل اغتشاشی کوشی ریمان (۵) با شرط غیرموضعی (۲۱) برای  $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1)\}$  و  $0 < \varepsilon \ll 1$  داده شده باشد در این صورت مسئله اغتشاشی (۲۱)-(۵) فاقد لایه مرزی در نزدیکی نقاط مرزی  $x_2 = 0$ ،  $x_2 = 1$  است اگر و تنها اگر رابطه  $u_\varepsilon(\xi_1, 0) = u_\varepsilon(\xi_1 - i\varepsilon, 1)$  برقرار باشد.

**اثبات:** با توجه به تعریف تشکیل لایه مرزی، چون جواب حدی

$$u(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(\xi_1, 0) = u(\xi_1, 1) = \frac{1}{2} \phi(\xi_1)$$

بنا به قضیه ۱ در شرایط مرزی موضعی شده (۲۲) صدق می‌کند از این رو، در مسئله (۲۱)-(۵) لایه مرزی وجود نخواهد داشت.

تذکر ۱. لایه مرزی زمانی تشکیل می‌شود که جواب حدی در شرط مرزی موضعی شده مربوط به نقطه مرزی صدق نکند.

### شرط مرزی غیرموضعی عمومی

اکنون معادله (۵) را با شرط مرزی عمومی زیر در نظر می‌گیریم:

$$au_\varepsilon(\xi_1, 1) + bu_\varepsilon(\xi_1, 0) = af(\xi_1) \quad (23)$$

که در آن  $a, b$  ثابت‌های حقیقی و  $f(\xi_1)$  تابع اختیاری پیوسته در بازه  $[0, 1]$  است. در قضیه (۳) نشان می‌دهیم در مسئله مقدار مرزی (۲۳)-(۵) لایه مرزی تشکیل نمی‌شود.

**قضیه ۳.** فرض کنید معادله اغتشاشی کوشی-ریمان (۵) با شرط مرزی غیر موضعی عمومی (۲۳) داده شود. هرگاه در شرط مرزی فوق ثابت  $\alpha = -\frac{b}{a}$  بزرگتر از واحد باشد آنگاه در مسئله (۲۳)-(۵) لایه مرزی تشکیل نمی‌شود.

**اثبات:** ابتدا شرط مرزی فوق را با انتخاب  $\alpha = -\frac{b}{a}$  به صورت معادله تابعی (۲۴) می‌نویسیم:

$$u_\varepsilon(\xi_1, 1) = \alpha u_\varepsilon(\xi_1, 0) + f(\xi_1) \quad (24)$$

با توجه به شرط ضروری (۲۰) و با قرار دادن  $\xi_1 = \xi_1 + i\varepsilon$  داریم:

$$u_\varepsilon(\xi_1 + i\varepsilon, 0) = u_\varepsilon(\xi_1, 1)$$

با استفاده از رابطه مذکور و استفاده مجدد از تغییر متغیر  $\xi_1 = \xi_1 + i\varepsilon$  شرط مرزی (۲۴) بدین صورت نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\xi_1 + 2i\varepsilon, 0) &= \alpha u_\varepsilon(\xi_1 + i\varepsilon, 0) + f(\xi_1 + i\varepsilon) \\ &= \alpha(\alpha u_\varepsilon(\xi_1, 0) + f(\xi_1)) + f(\xi_1 + i\varepsilon) \\ &= \alpha^2 u_\varepsilon(\xi_1, 0) + \alpha f(\xi_1) + f(\xi_1 + i\varepsilon) \end{aligned}$$

با به‌کار بردن  $n$  بار تغییر متغیر فوق می‌توان نتیجه گرفت:



$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon(\xi_1 + ni\varepsilon, \cdot) &= \alpha^n u_\varepsilon(\xi_1, \cdot) + \alpha^{n-1} f(\xi_1) + \alpha^{n-2} f(\xi_1 + i\varepsilon) \\
 &\quad + \alpha^{n-3} f(\xi_1 + 2i\varepsilon) + \dots + f(\xi_1 + (n-1)i\varepsilon) \\
 u_\varepsilon(\xi_1, \cdot) &= \alpha^{-n} u_\varepsilon(\xi_1 + ni\varepsilon, \cdot) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k-n} f(\xi_1 + (n-1-k)i\varepsilon)
 \end{aligned}$$

و یا

حال با استفاده از تغییر متغیر  $k - n = m$  داریم:

$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon(\xi_1, \cdot) &= - \sum_{m=-\infty}^{-1} \alpha^m f(\xi_1 - (m+1)i\varepsilon) \\
 &= - \sum_{m=-1}^{-\infty} \alpha^m f(\xi_1 - (m+1)i\varepsilon)
 \end{aligned}$$

و دوباره با تعویض اندیس سیگما از  $m$  به  $-m$  داریم:

$$u_\varepsilon(\xi_1, \cdot) = - \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^m f(\xi_1 - (1-m)i\varepsilon)$$

از محاسبه حد رابطه مذکور وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$  رابطه (۲۵) به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 u.(\xi_1, \cdot) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(\xi_1, \cdot) \\
 &= \frac{f(\xi_1)}{1-\alpha}
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

با توجه به این که  $\alpha > 1$  است سری هندسی  $\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^m$  همگرا است. با استفاده از ضابطه نخست (۱۷) جواب تحلیلی مسئله را در داخل ناحیه بدین صورت است:

$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(x_1, 1) \theta(1-\xi_1) \delta(x_1 - \xi_1 - i\varepsilon(1-\xi_1)) dx_1 \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(x, \cdot) \theta(-\xi_1) \delta(x_1 - \xi_1 + i\varepsilon\xi_1) dx_1
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن مقادیر تابع هویساید و خاصیت تابع دلتای دیراک جواب تحلیلی مسئله بدین صورت نوشته می شود:

$$u_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(x_1, 1) \delta(x_1 - \xi_1 - i\varepsilon(1-\xi_1)) dx_1$$

اکنون حالت حدی جواب فوق را وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$  به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 u. &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} u.(x_1, 1) \delta(x_1 - \xi_1) dx_1 \\
 &= u.(\xi_1, 1)
 \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$u.(\xi_1, \xi_2) = u.(\xi_1, 1) \tag{۲۶}$$

از رابطه (۲۶) می شود که

$$u.(\xi_1, \cdot) = u.(\xi_1, 1)$$

و لذا از شرط مرزی (۲۳) می توانیم بنویسیم:

$$u(\xi, 1) = \alpha u(\xi, 1) + f(\xi) \Rightarrow u(\xi, 1) = \frac{f(\xi)}{1-\alpha}$$

روابط (۲۵) و (۲۶) و رابطه اخیر نشان می‌دهد که جواب حدی مسئله در شرط مرزی مسئله (۲۳)-(۲۳) صدق می‌کند. بنابراین در مسئله مذکور لایه مرزی تشکیل نمی‌شود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله به دنبال به دست آوردن شرط مرزی غیرموضعی مناسب برای مسئله اغتشاشی کوشی ریمان هستیم که در آن لایه مرزی در نزدیکی نقاط مرزی نداشته باشیم. به همین خاطر نیازمند به کارگیری روش موضعی‌سازی برای شرط غیرموضعی (۲۱) مسئله اغتشاشی کوشی ریمان هستیم. به این منظور ابتدا جواب اساسی معادله الحاقی مسئله با استفاده از تبدیلات فوریه به دست آوردیم و به دنبال آن شرایط ضروری محاسبه شد و سپس با استفاده از شرط ضروری شرط مرزی غیرموضعی به شرط مرزی موضعی تبدیل کردیم. و در نهایت با استفاده از جواب حدی به دست آمده از روی جواب تحلیلی به وجود یا عدم وجود لایه مرزی در نزدیکی نقاط مرزی مسئله پی بردیم. و نتیجه مهم این‌که هرگاه در مسئله لایه مرزی شامل معادلات پاره‌ای، لایه مرزی تشکیل نشود شبیه مسایل لایه مرزی برای معادلات دیفرانسیل عادی، جواب تقریبی مسئله را به صورت توان‌های متوالی مثبت پارامتر  $\varepsilon$  به صورت  $u_\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1, x_2) \varepsilon^n$  محاسبه می‌کنیم، که با مشتق‌گیری از جواب پیشنهادی فوق و جای‌گذاری در معادله دیفرانسیل پاره‌ای داده شده نسبت به ضرایب  $a_n(x_1, x_2)$  دستگاه معادلات دیفرانسیل متوالی ظاهر می‌شود. که با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل متوالی، ضرایب مجهول محاسبه شده و جواب تقریبی مسئله با اعمال شرایط مرزی داده شده به دست خواهد آمد.

### مسائل حل نشده

۱. برای مسئله لایه مرزی زیر با شرایط مرزی موضعی

$$\varepsilon \Delta u + ia \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + b \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = 0, \quad u(x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0$$

$$u(x_1, 0) = \varphi_1(x), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in (0, 1)$$

$$u(x_1, 1) = \varphi_2(x)$$

که در آن  $a$  و  $b$  ثابت‌های حقیقی هستند. با محاسبه جواب اساسی معادله الحاقی و شرط‌های ضروری و بررسی وضعیت حدی جواب و شرایط مرزی، شرایط لازم و کافی برای نبود لایه مرزی در مسئله مذکور ارائه شود.

۲. مسئله قبلی را با شرایط مرزی غیرموضعی زیر به کار رود.

$$\alpha u(x_1, 0) + \alpha_1 u(x_1, 1) = \varphi_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\beta \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} + \beta_1 \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} = \varphi_2(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

## منابع

1. Prandtl L., "Uber flussing leeits-bowengung bei kleiner Reibung verhandlungen", III int, Math. Kongresses, Tuebner Leipzig, Hiedelberg, Germany (1905).
2. Nagumo M., "Uberdas verhaltender integrable von  $\ell y$ " +  $f(x, y, y', \ell) = \cdot$ ,  $\ell \rightarrow \cdot$ ", Proc., Math .Soc.Japan- 21 (1939).
3. Wasow W., Friedrich K.O., "singular perturbation of nonlinear oscillations", Duke, Math., 13 J. (1964).
4. Tikhonov A.N., "System of differential equations containing small parameter infront of derivatives", Math.S, b.31, No.3 (1952).
5. Oleinik O.A., "Mathematical problems of boundary layer theory", Usperhi, Math., Nauka. 23, No.3 (1968).
6. O`mally J.R.E, "Introduction to Singular Perturbations", Academic Press, New York (1974).
7. Dualan E.P., Milleranal J.J.H., Schilders L.H.A., "Uniform Numerical Methods for Problem with initial and Boundary layers",Boole PRESS Dublin (1980).
8. Sarakhsi A.R., Jahanshahi M., "Investigation of boundary layers of singular perturbation problem of including second order linear equation with non-local boundary conditions", Journal of sciences, Tehran University of Tarbiat Moallem, No.3 (2013) 809-818.
9. Sarakhsi A.R., Jahanshahi M., Sarakhsi M., "Approximate solution of the problem of singular perturbation of second order linear with variable coefficients with Dirichlet conditions", Journal of Advanced mathematical modeling, No. 2 (2013) 49-70.
10. Jahanshahi M., Sarakhsi A.R., Aliev N., Ashrafi S., "Boundary layer problem for system of one order ordinary differential equations with linear non-local boundary conditions", Iranian Journal of Science & Technology, 37 (2013) 389-396.
11. Sarakhsi A.R. , Jahanshahi M., "Asymptotic solution of the problem of singular perturbation of second-order linear with constant cofficients with a Dirichlet condition", Journal of sciences, Tehran University of Tarbiat Moallem, Volome 10, No.1(2012) 683-692.
12. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliev N., "Tikhonov-lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation", Azerb. J. Math. 3, No.1 (2013) 104-110.
13. Mohan K., Kadalbajoo K., Patidar C., "Singular perturbation problems in partial differential equations a survey", Applied Mathematics and computation. Elsevier, 134 (2003).

14. Hegarty A., O'Riordan E., Stynes M., "A comparison of uniformly convergent difference schemes for two-dimensional convection-diffusion problems, *J.Comput.Phys*,105 (1993).
15. Kamin S., "On elliptic singular perturbation problems with turning points", *SIAM, J. Math., Anal* 10 (3) (1979).
16. Matkosky B.J., Schuss Z., "On the problems of exit", *Bull. Amer. Math. Soc. Volume 82, No.2* (1976) 157-355 .
17. Vladimirov V.S., "Equations of Mathematical Physics" 3<sup>rd</sup>ed., Nauka, Moscow (1976).  
*Technol.*, vol. 33, No.2 (2002) 241-247.
18. Naimark M.A., "Linear differential operators", part II, Unger, New York (1968).