بررسی مسئلهٔ لایه مرزی شامل معادله دیفرانسیل اغتشاشی کوشی ریمان با شرط مرزی غیرموضعی

سیامک اشرفی، محمد جهانشاهی*، نیهان علی‌اف؛ دانشگاه آذربایجان، گروه ریاضی

دریافت ۹۳/۲/۱۳ پذیرش ۹٤/۱۲/۱۰

چکیده

نظریهٔ لایهٔ مرزی که به مسائل اغتشاشی غیرعادی نیز موسوم هستند بیش‌تر برای معادلات دیفرانسیل عادی به‌کار رفته است. در حالی که مسائل لایهٔ مرزی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (پاره‌ای) کاربردهای بسیار وسیعی در زمینه‌های مختلف فیزیک مهندسی دارد. به‌دلیل رفتار پیچیده حدی و مرزی جواب‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، مسائل لایهٔ مرزی که شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است کم‌تر بررسی شده‌اند. در این مقاله مسئله لایهٔ مرزی شامل معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای با شرط مرزی غیرموضعی بررسی می‌شود. از این‌رو، برای نشان دادن وقوع و یا عدم وقوع لایهٔ مرزی در نزدیکی نقاط مرزی، مسئلهٔ لایه مرزی را موضعی‌سازی می‌کنیم. درنهایت برای مسئلهٔ داده شده شرایطی ارائه می‌شود که وقوع لایه مرزی وعدم آن‌را در نقاط مرزی دامنه مشخص می‌کند. هم‌چنین شرط مرزی مناسب تعیین می‌شود تا هم مسئلهٔ لایه مرزی خوش طرح باشد وهم لایهٔ مرزی ایجاد نشود تا جواب‌های تقریبی شبیه مسائل لایه مرزی شامل معادلات دیفرانسیل عادی نوشته شود.

واژه‌های کلیدی: جواب اساسی، شرایط ضروری، مسئلهٔ لایه مرزی، معادله اغتشاشی کوشی ریمان

مقدمه

مسائل لایه مرزی که به مسائل اغتشاشی غیرعادی نیز موسوم هستند مدل ریاضی خیلی از پدیده‌های فیزیک و مهندسی است که از لحاظ ساختار مدل ریاضی پارامتر کوچک ε در ضریب بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شود. این مسائل نخست در کارهای مدل‌سازی ریاضی لودویگ پرانتدل در سال ۱۹۰۴ در سخنرانی‌اش در سومین کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در هایدلبرگ باعنوان حرکت مایعات با اصطکاک کوچک ظاهر شد [۱]. نظریهٔ لایهٔ مرزی پرانتدل بعدها در کتاب هیدرودینامیک لامب در سال ۱۹۴۲ و سپس لاجرس استورم در ۱۹۶۴ و وان دیک در ۱۹۶۴ توسعه دادند. هم‌زمان با کار پرانتدل، سوال یک شیمیدان، ریاضی‌دان ژاپنی به‌نام ناگومو را تشویق کرد تا یک مسئله مقدار اولیه با معادله دیفرانسیل شامل پارامتر $\lambda y''+f(x,y,y',\lambda)=0$ وقتی که $\lambda\to 0$ بررسی کند [۲]، ادامه نظریهٔ لایهٔ مرزی باعنوان اغتشاشات غیرعادی در کار فریدریگس و واسو در سمینار نوسان‌های غیرخطی در دانشگاه نیویورک در سال ۱۹۶۴ ارائه شد. این نظریه را هم‌زمان ریاضی‌دانان روسی مثل تیخانوف و شاگردانش در دانشگاه دولتی مسکو خصوصاً واسیل وا و آلینیک در بسط روش‌های مفید آنالیز مجانبی جواب‌های معادلات دیفرانسیل شامل پارامتر ادامه دادند

*نویسندهٔ مسئول jahanshahi@azaruniv.edu

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

[۴]، [۵]. بنابراین ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان سراسر دنیا به نظریه لایهٔ مرزی توجه زیادی داشته‌اند. در سال‌های اخیر ریاضی‌دانانی مثل روبرت امالی [۶] و اچ. میللر و اچ. آشیلدور و پ. دولان در [۷] این مسائل را از نقطه نظر بسطهای مجانبی جواب‌ها همراه با شرایط مرزی موضعی بررسی کرده‌اند.

مؤلفان این مسائل را از نقطه نظر محل تشکیل لایهٔ مرزی با شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی بررسی کرده‌اند چون ساختار جواب‌های این مسائل به‌صورت بسطهای مجانبی نسبت به پارامتر در محل لایهٔ مرزی و خارج از لایهٔ مرزی است؛ از این رو، تشخیص این‌که در کدام نقطه مرزی لایهٔ مرزی ایجاد می‌شود مهم است. اما همهٔ مسائل لایهٔ مرزی مذکور، شامل معادلات دیفرانسیل عادی هستند از جمله می‌توان به کارهای [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] ازمؤلفان اشاره کرد. هدف عمده در این مقالات تشخیص لایهٔ مرزی در حالت‌هایی است که مسئله با شرایط مرزی غیرموضعی داده شده است. در کارهای سایرین که به‌ان‌ها اشاره شد مسائل مذکور با شرایط مرزی موضعی کلاسیک مثل شرط مرزی دیریکله و نویمان داده شده است.

در این مقاله نظریه لایهٔ مرزی را برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (با مشتقات جزئی) بررسی می‌کنیم. با تأکید براین‌که نظریه لایه مرزی برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر خلاف معادلات دیفرانسیل معمولی سابقه چندانی ندارد. مسائل لایهٔ مرزی شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در خیلی از زمینه‌های فیزیک و مهندسی مثل مکانیک و دینامیک سیالات، نظریه الاستیسیته، مکانیک کوانتومی، آیرودینامیک، پلاسما دینامیک، هیدرودینامیک مغناطیس، نظریه راکتور شیمیایی، فرایندهای پخش و سایر زمینه‌های حرکت سیالات و فلوهای تشعشعی ظاهر می‌شود. به‌عنوان مثال جریان لایهٔ مرزی در یک سیال غیرمتراکم با انتقال الکتریکی با معادلهٔ لایه مرزی برای میدان فلو بدین‌صورت داده می‌شود:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + Mu \qquad (1)$$

برای مقدار زیاد R_0 که $\varepsilon = \frac{1}{R_0}$ در نظر گرفته می شود و برای مقدار کم R_0 با معادله

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon Mu, \qquad y \to \infty, \quad t > 0 \qquad (2)$$

و با شرایط $u(0,T)=1, u(y,0)=0, u(y,t) \to 0, \quad 0 < y < \infty$ داده می‌شود. که در آن $R_0 = \frac{v_0 L}{v}$ عدد رینولدز و $M = \frac{\delta \beta_0^2 L}{\rho v_0}$ عدد هارتمن است [۱۳].

مثال دیگر معادله اغتشاشی بیضوی خطی

$$Lu \equiv \varepsilon \Delta u + a \nabla u - bu = f, \qquad \Omega = (0,1) \times (0,1) \qquad (3)$$

با شرایط مرزی دیریکله، $u = 0$ روی مرز Ω که در آن $0 < \varepsilon << 1$، است. این مسئله را هگارتی و دیگران در [۱۴] بررسی کرده‌اند. مسئله مذکور در واقع مدل ریاضی حالت پایای فرایند پخش است. و در نهایت مسئله مقدار مرزی اغتشاشی

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \Delta u + \sum b_i(x) u_{x_i} = 0, \qquad x \in D \subset R^n \qquad (4)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

و با شرایط مرزی دیریکله $u=\varphi$ روی مرز D است که کامین [۱۵] بررسی کرده است. کامین این معادله را با انداختن جمله $\varepsilon\Delta u$ به معادله $\sum b_i(x)u_{x_i}=0$ پرداخته است. با فرض این‌که تابع پتانسیل $\psi(x)$ چنان باشد که $b_i(x)=\psi_{x_i}$ که $i=1,2,\dots,n$، او ثابت کرده است که جواب به یک ثابت میل می‌کند چیزی که قبلاً ماتکوسکی و شوس [۱۶] با استفاده از یک بسط مجانبی به‌دست آورده‌اند.

در بخش پایانی مقاله چند مسئله لایهٔ مرزی حل نشده که مربوط به معادله (۴) است و با کارهای بعدی مؤلفان در ارتباط است برای تحقیق و کار پژوهشی معرفی شده است، بررسی حل این مسئله‌ها می‌تواند با چهار چوب روشی که در این مقاله ارائه می‌شود انجام شود.

بیان ریاضی مسئله

در این مقاله معادله کوشی ریمان اغتشاشی بیضوی را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$\ell_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_2}+i\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_1}=0,\qquad D=\{(x_1,x_2)\mid\ x_1\in R,\ x_2\in(0,\ 1)\} \tag{۵}$$

که پارامتر کوچک ε در ضریب جمله دوم پارامتر اغتشاشی و i موهومی محض است. این معادله با $\varepsilon\neq 0$ معادلهٔ از نوع بیضوی است و با $\varepsilon=0$ تبدیل به معادله‌ای هذلولوی می‌شود. با توجه به ناحیه مورد نظر معادله که با D نمایش داده شده است شرط مرزی (۶) را به‌طور طبیعی روی جواب در بینهایت درنظر می‌گیریم:

$$\lim_{x_1\to\pm\infty} u_\varepsilon(x_1,x_2)=0 \tag{۶}$$

هدف این است که با بررسی رفتار این معادله بر حسب تغییر پارامتر (جای‌گذاری با $\varepsilon=0$) تشکیل و یا عدم تشکیل لایه‌های مرزی را در نقاط مرزی $x_2=1,\ \ x_2=0$ مشخص کنیم و در نهایت شرط مرزی مناسب برای این معادله را تعیین کنیم که لایه مرزی در مرزهای فوق ایجاد نشود.

چون در مسایل لایهٔ مرزی جواب‌های تقریبی یک‌نواخت در ناحیهٔ لایه مرزی (جواب داخل لایه) و خارج لایه مرزی (جواب خارجی) به‌صورت جداگانه و با تکنیک‌های خاصی نوشته می‌شود از این رو، تشخیص این‌که لایهٔ مرزی در کدام یک از مرزها تشکیل می‌شود حائز اهمیت است [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]. به‌این منظور نخست الحاقی معادله (۵) را به‌دست می‌آوریم. برای این تابع اختیاری $Z_\varepsilon(x)$ را به طرفین معادله (۵) ضرب کرده ودر ناحیهٔ D انتگرال‌گیری انجام می‌دهیم و داریم:

$$(\ell_\varepsilon u_\varepsilon, Z_\varepsilon(x))\equiv\int_0^1 dx_2\int_R \ell_\varepsilon u_\varepsilon \overline{Z}_\varepsilon(x)dx_1=\int_R dx_1\int_0^1\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_2}\overline{Z_\varepsilon(x)}dx_2+i\varepsilon\int_0^1 dx_2\int_R\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_1}\overline{Z_\varepsilon(x)}dx_1$$

با توجه به شرط (۶) داریم:

$$\begin{aligned}&\int_R u_\varepsilon(x_1,1)\overline{Z_\varepsilon(x_1,1)}dx_1-\int_R u_\varepsilon(x_1,0)\overline{Z_\varepsilon(x_1,0)}dx_1\\&-\int_0^1 dx_2\int_R dx_1 u_\varepsilon(x)\left[\frac{\partial\overline{Z_\varepsilon(x)}}{\partial x_2}+i\varepsilon\frac{\partial\overline{Z_\varepsilon(x)}}{\partial x_1}\right]=0.\end{aligned} \tag{۷}$$

با توجه به اتحاد لاگرانژ از رابطهٔ اخیر چنین بر می‌آید که الحاقی معادله (۵) بدین‌صورت است:

$$\ell_\varepsilon^* Z_\varepsilon(x) \equiv \frac{\partial Z_\varepsilon(x)}{\partial x_۲} - i\varepsilon \frac{\partial Z_\varepsilon(x)}{\partial x_۱} \tag{۸}$$

محاسبهٔ جواب اساسی معادله الحاقی

اکنون جواب اساسی (جواب به مفهوم توزیع) معادلهٔ (۸) را به‌دست می‌آوریم به‌این منظور معادله ناهمگن نظیر معادلهٔ (۸) را با جمله ناهمگن $g(x)$ در نظر گرفته و از تبدیل فوریه بدین‌منظور استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial Z_\varepsilon(x)}{\partial x_۲} - i\varepsilon \frac{\partial Z_\varepsilon(x)}{\partial x_۱} = g(x) \tag{۹}$$

در استفاده از روش تبدیل فوریه فرض می‌کنیم:

$$Z_\varepsilon(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} \tilde{Z}_\varepsilon(\alpha)\, d\alpha, \tag{۱۰}$$

$$g(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} \tilde{g}(\alpha)\, d\alpha \tag{۱۱}$$

$$\tilde{g}(\alpha) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{-i(\alpha,\xi)} g(\xi)\, d\xi \tag{۱۲}$$

با توجه به روابط (۱۲-۱۰) و با توجه به ضرب داخلی $(\alpha,x) = \alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲$ و با اعمال تبدیل فوریه به طرفین معادله (۵) داریم:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} i\alpha_۲ \tilde{Z}(\alpha)\, d\alpha - i\varepsilon \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} i\alpha_۱ \tilde{Z}(\alpha)\, d\alpha = \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} \tilde{g}(\alpha)\, d\alpha,$$

و با ساده کردن روابط بالا داریم:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} \left[(i\alpha_۲ + \varepsilon\alpha_۱)\tilde{Z}(\alpha) - \tilde{g}(\alpha) \right] d\alpha = ۰$$

بنابراین برای $\tilde{Z}(\alpha)$ معادله جبری (۱۳) را داریم:

$$(i\alpha_۲ + \varepsilon\alpha_۱)\tilde{Z}(\alpha) = \tilde{g}(\alpha),$$

$$\tilde{Z}(\alpha) = \frac{\tilde{g}(\alpha)}{i\alpha_۲ + \varepsilon\alpha_۱} \tag{۱۳}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۳) در تبدیل

عکس فوریه (۱۰) خواهیم داشت:

$$Z_\varepsilon(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{i(\alpha,x)} d\alpha \frac{۱}{i\alpha_۲ + \varepsilon\alpha_۱} \cdot \frac{۱}{۲\pi}\int_{R^۲} e^{-i(\alpha,\xi)} g(\xi)\, d\xi$$

و نهایتاً جواب اساسی (توزیع) معادله الحاقی (۸) بدین صورت است:

$$V_\varepsilon(x-\xi) = \frac{۱}{۴\pi^۲}\int_{R^۲} \frac{e^{i(\alpha,x-\xi)}}{i\alpha_۲ + \varepsilon\alpha_۱} d\alpha \tag{۱۴}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

لازم به ذکر است جواب اساسی فوق نسبت به بردار نرمال خارجی حساب شده است. اگر تبدیل فوریه را تنها در امتداد محور $x_۲$ (نسبت به متغیر $x_۲$) به‌کار ببریم نمایش دیگری برای جواب اساسی (۱۴) بدین‌صورت به‌دست می آید [۱۷]:

$$V_\varepsilon(x-\xi)=\theta(x_۲-\xi_۲)\delta(x_۱-\xi_۱+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲)) \qquad (۱۵)$$

که درآن $\delta(x-\xi)$ تابع دلتای دیراک و $\theta(x-\xi)$ تابع هویساید واحد است که در حالت یك بعدی $x,\xi\in(a,b)$ بدین‌صورت نمایش داده می‌شوند:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-\xi)=\begin{cases} f(\xi), & \xi\in(a,b)\\ \frac{۱}{۲}f(\xi), & \xi=a,\ \ \xi=b,\\ ۰, & \xi\notin[a,b]\end{cases}$$

و

$$\theta(x-\xi)=\begin{cases} ۱, & x>\xi\\ \frac{۱}{۲}, & x=\xi\\ ۰, & x<\xi\end{cases}$$

توجه شود که در رابطهٔ (۱۵)، $\xi=(\xi_۱,\xi_۲)$ و $x=(x_۱,x_۲)$. البته می‌توان خاصیت‌های مذکور را برای تابع دلتای دیراک و تابع هویساید در حالت برداری نیز به‌طور مشابه نوشت.

در لم زیر نشان می‌دهیم تابع تعمیم یافته (توزیع) حقیقتاً جواب اساسی (توزیع) معادله (۸) است.

لم۱. معادله کوشی- ریمان اغتشاشی (۸) دارای جواب اساسی بدین‌صورت است:

$$V_\varepsilon(x-\xi)=\theta(x_۲-\xi_۲)\delta(x_۱-\xi_۱+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲))$$

اثبات: نشان می‌دهیم مشتقات تعمیم یافته تابع مذکور در معادله کوشی- ریمان اغتشاشی (۸) که طرف راست آن تابع دلتای دیراك است، صدق می‌کند. به‌عبارت دیگر طبق تعریف جواب اساسی، اگر این جواب در معادله دیفرانسیل (۸) قرار داده شود باید تابع دلتای دیراک حاصل شود، یعنی

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_۲}=\delta(x_۲-\xi_۲)\delta'(x_۱-\xi_۱)+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲)+i\varepsilon\theta(x_۲-\xi_۲)\delta'(x_۱-\xi_۱+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲))$$

همچنین

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_۱}=\theta(x_۲-\xi_۲)\delta'(x_۱-\xi_۱)+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲)$$

با جای‌گذاری مقادیر مذکور در معادلهٔ (۸) و محاسبه مشتق تابع دلتای دیراک داریم:

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_۲}-i\varepsilon\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_۱}=\delta(x-\xi)+i\varepsilon\theta(x_۲-\xi_۲)\delta'(x_۱-\xi_۱+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲))$$
$$-i\varepsilon\theta(x_۲-\xi_۲)\delta'(x_۱-\xi_۱+i\varepsilon(x_۲-\xi_۲))=\delta(x-\xi) \qquad (۱۶)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

اکنون از جواب اساسی (۱۵) استفاده کرده و رابطه‌ای موسوم به شرط ضروری به‌دست می‌آوریم. شرط ذاتی (یا ضروری) بدین‌منظور گفته می‌شود که هر جواب معادله دیفرانسیل بدون توجه به ناحیهٔ مورد نظر دراین شرط صدق می کند [۱۷]، [۱۸]، [۱۹].

محاسبهٔ شرطهای ضروری

برای محاسبهٔ شرط های ضروری، جواب اساسی (۱۴) را به طرفین معادله (۵) ضرب کرده در ناحیهٔ D انتگرال‌گیری می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
0=(\ell_\varepsilon u_\varepsilon, V_\varepsilon) &\equiv \int_R dx_1\int_0^1 \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_2}\overline{V_\varepsilon(x-\xi)}dx_2 + i\varepsilon\int_0^1 dx_2\int_R \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_1}\overline{V_\varepsilon(x-\xi)}dx_1\\
&= \int_R dx_1\left[u_\varepsilon(x)\overline{V_\varepsilon(x-\xi)}\Big|_{x_2=0}^{1} - \int_0^1 u_\varepsilon(x)\frac{\partial\overline{V_\varepsilon(x-\xi)}}{\partial x_2}dx_2\right]\\
&+ i\varepsilon\int_0^1 dx_2\left[u_\varepsilon(x)\overline{V_\varepsilon(x-\xi)}\Big|_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_R u_\varepsilon(x)\frac{\partial\overline{V_\varepsilon(x-\xi)}}{\partial x_1}dx_1\right]\\
&= \int_R\left[u_\varepsilon(x_1,1)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1, 1-\xi_2)} - u_\varepsilon(x_1,0)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1-\xi_2)}\right]dx_1\\
&- \int_R dx_1\int_0^1 dx_2 u_\varepsilon(x)\left[\overline{\frac{\partial V_\varepsilon(x-\xi)}{\partial x_2} - i\varepsilon\frac{\partial V_\varepsilon(x-\xi)}{\partial x_1}}\right].
\end{aligned}
$$

که با توجه به رابطهٔ حدی (۶) و محاسبهٔ انتگرال‌های فوق و جاگذاری تابع دلتای دیراک به‌جای معادلهٔ الحاقی ظاهر شده در داخل براکت (درعبارت انتگرال دوگانه بالا) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\int_R\left[u_\varepsilon(x_1,1)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1, 1-\xi_2)} - u_\varepsilon(x_1,0)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1-\xi_2)}\right]dx_1\\
&= \int_R dx_1\int_0^1 dx_2 u_\varepsilon(x)\delta(x-\xi) \qquad (۱۷)\\
&= \begin{cases} u_\varepsilon(\xi), & \xi_1\in R,\ \xi_2\in(0,1),\\ \frac{1}{2}u_\varepsilon(\xi), & \xi_1\in R,\ \xi_2=0,\ \ \xi_2=1.\end{cases}
\end{aligned}
$$

بنابراین با استفاده از رابطهٔ دوم (۱۷) مقادیر زیر را برای مقادیر مرزی $u_\varepsilon(\xi_1,0)$ و $u_\varepsilon(\xi_1,1)$ داریم:

$$
\frac{1}{2}u_\varepsilon(\xi_1,0) = \int_R\left[u_\varepsilon(x_1,1)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1, 1)} - u_\varepsilon(x_1,0)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1, 0)}\right]dx_1
$$

$$
\frac{1}{2}u_\varepsilon(\xi_1,1) = \int_R\left[u_\varepsilon(x_1,1)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1, 0)} - u_\varepsilon(x_1,0)\overline{V_\varepsilon(x_1-\xi_1, -1)}\right]dx_1
$$

اکنون با توجه به ضابطهٔ $V_\varepsilon(x-\xi)$ در رابطهٔ (۱۵) و جای‌گذاری آن‌ها در روابط بالا در نهایت شرایط ضروری را بدین‌صورت داریم:

$$
\frac{1}{2}u_\varepsilon(\xi_1,0) = \int_R u_\varepsilon(x_1,1)\theta(1)\delta(x_1-\xi_1+i\varepsilon)dx_1 - \int_R u_\varepsilon(x_1,0)\theta(0)\delta(x_1-\xi_1)dx_1 \qquad (۱۸)
$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

و

$$\frac{1}{2}u_{\varepsilon}(\xi_1,1)=\int_R u_{\varepsilon}(x_1,1)\theta(0)\delta(x_1-\xi_1)dx_1-\int_R u_{\varepsilon}(x_1,0)\theta(-1)\delta(x_1-\xi_1-i\varepsilon)dx_1 \qquad (19)$$

مشابه آن‌چه که در[۱۸] آمده است، با توجه به مقادیر تابع هویساید و خاصیت‌های تابع دلتای دیراک رابطه (۱۹) به یک اتحاد تبدیل می‌شود و رابطهٔ (۱۸) بدین‌صورت ساده می‌شود:

$$u_{\varepsilon}(\xi_1,0)=u_{\varepsilon}(\xi_1-i\varepsilon,1) \qquad (20)$$

این رابطه که به‌طور طبیعی در مورد هر جواب معادلهٔ (۵) برقرار است به‌عنوان یک شرط ضروری روی معادله (۵) محسوب می شود، و همچنین می‌تواند مبنایی برای تعیین شرط مرزی مناسب برای معادله (۵) در نظر گرفته شود. در قضیه (۱) نشان می‌دهیم که معادله کوشی- ریمان اغتشاشی (۵) می‌تواند با يك شرط مرزی غیرموضعی داده شود و جواب تحلیلی آن نیز با استفاده از ضابطهٔ اول رابطهٔ (۱۷)نوشته شود.

قضیه ۱. فرض کنید معادله کوشی-ریمان اغتشاشی (۵) در ناحیهٔ

$$D=\{(x_1,x_2)\big|\ \ x_1\in R,\ \ x_2\in(0,\ 1)\}$$

و با شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) داده شود:

$$u_{\varepsilon}(\xi_1,0)+u_{\varepsilon}(\xi_1-i\varepsilon,1)=\phi(\xi_1)\,,\qquad \xi_1\in R \qquad (21)$$

که در آن $\phi(\xi_1)$ تابع دلخواه پیوسته است.

هر گاه شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) با شرط ضروری (۲۰) مستقل خطی باشد آن‌گاه مسئلهٔ مقدار مرزی (۲۱)-(۵) دارای جواب تحلیلی است که در شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) صدق می‌کند.

اثبات: ابتدا با در نظر گرفتن شرط ضروری (۲۰) ملاحظه می‌کنیم:

$$u_{\varepsilon}(\xi_1,0)=u_{\varepsilon}(\xi_1-i\varepsilon,1)=\frac{\phi(\xi_1)}{2} \qquad (22)$$

روابط فوق در حقیقت شرایط موضعی شده شرط مرزی غیرموضعی (۲۱) است، از طرفی با توجه به حالت نخست رابطهٔ (۱۷) می‌توان جواب تحلیلی مسئله مذکور با شرط مرزی بالا را بدین‌صورت نوشت:

$$\begin{aligned}
u_{\varepsilon}(\xi)&=u\ \ (\xi_1,\xi_2)\\
&=\int_R u_{\varepsilon}(x_1,1)\theta(1-\xi_2)\delta(x_1-\xi_1-i\varepsilon(1-\xi_2))dx_1\\
&-\int_R u_{\varepsilon}(x_1,0)\theta(-\xi_2)\delta(x_1-\xi_1+i\varepsilon\xi_2)dx_1\\
&=\int_R u_{\varepsilon}(x_1,1)\ \delta(x_1-\xi_1-i\varepsilon(1-\xi_2))dx_1\\
&=u_{\varepsilon}(\xi_1+i\varepsilon(1-\xi_2),1)
\end{aligned}$$

با ملاحظه رفتار حدی این جواب وقتی که $\varepsilon\to 0$ داریم:

$$u_0(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_{\varepsilon}(\xi)=u_0(\xi_1,1)$$

و با در نظر گرفتن رفتار حدی از رابطه (۲۲) داریم:

$$u_0(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_{\varepsilon}(\xi_1,0)=u_0(\xi_1,1)=\frac{1}{2}\phi(\xi_1)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

یعنی جواب حدی حاصل از جواب تحلیلی مذکور در شرایط مرزی موضعی شده صدق می‌کند.

قضیه ۲. فرض کنیم معادلG دیفرانسیل اغتشاشی کوشی ریمان (۵) با شرط غیرموضعی (۲۱) برای $D=\{(x_1,x_2)\mid\ x_1\in R,\ x_2\in(0,\ 1)\}$ و $0<\varepsilon<<1$ داده شده باشد در این صورت مسئلهٔ اغتشاشی (۲۱)-(۵) فاقد لایهٔ مرزی در نزدیکی نقاط مرزی $x_2=1,\ \ x_2=0$ است اگر و تنها اگر رابطهٔ $u_\varepsilon(\xi_1,0)=u_\varepsilon(\xi_1-i\varepsilon,1)$ برقرار باشد.

اثبات: با توجه به تعریف تشکیل لایه مرزی، چون جواب حدی

$$u_0(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(\xi_1,0)=u_0(\xi_1,1)=\frac{1}{2}\phi(\xi_1)$$

بنا به قضیه ۱ در شرایط مرزی موضعی شده (۲۲) صدق می کند از این رو، درمسئله (۲۱)-(۵) لایه مرزی وجود نخواهد داشت.

تذکر ۱. لایه مرزی زمانی تشکیل می‌شود که جواب حدی در شرط مرزی موضعی شده مربوط به نقطهٔ مرزی صدق نکند.

شرط مرزی غیرموضعی عمومی

اکنون معادله (۵) را با شرط مرزی عمومی زیر در نظر می گیریم:

$$au_\varepsilon(\xi_1,1)+bu_\varepsilon(\xi_1,\ 0)=af(\xi_1) \qquad (۲۳)$$

که در آن b,a ثابت‌های حقیقی و $f(\xi_1)$ تابع اختیاری پیوسته در بازه $[0\text{،}1]$ است. در قضیهٔ (۳) نشان می‌دهیم در مسئله مقدار مرزی (۲۳)-(۵) لایه مرزی تشکیل نمی‌شود.

قضیه ۳. فرض کنید معادله اغتشاشی کوشی-ریمان (۵) با شرط مرزی غیر موضعی عمومی (۲۳) داده شود. هرگاه در شرط مرزی فوق ثابت $\alpha=-\frac{b}{a}$ بزرگتر از واحد باشد آنگاه در مسئله (۲۳)-(۵) لایه مرزی تشکیل نمی شود.

اثبات: ابتدا شرط مرزی فوق را با انتخاب $\alpha=-\frac{b}{a}$ به‌صورت معادله تابعی (۲۴) می‌نویسیم:

$$u_\varepsilon(\xi_1,1)=\alpha u_\varepsilon(\xi_1,\ 0)+f(\xi_1) \qquad (۲۴)$$

با توجه به شرط ضروری (۲۰) و با قرار دادن $\xi_1=\xi_1+i\varepsilon$ داریم:

$$u_\varepsilon(\xi_1+i\varepsilon,0)=u_\varepsilon(\xi_1,\ 1)$$

با استفاده از رابطهٔ مذکور و استفاده مجدد از تغییر متغیر $\xi_1=\xi_1+i\varepsilon$ شرط مرزی (۲۴) بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(\xi_1+2i\varepsilon,0)&=\alpha u_\varepsilon(\xi_1+i\varepsilon,\ 0)+f(\xi_1+i\varepsilon)\\&=\alpha(\alpha u_\varepsilon(\xi_1,\ 0)+f(\xi_1))+f(\xi_1+i\varepsilon)\\&=\alpha^2 u_\varepsilon(\xi_1,\ 0)+\alpha f(\xi_1)+f(\xi_1+i\varepsilon)\end{aligned}$$

با به‌کار بردن n بار تغییر متغیر فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$u_\varepsilon(\xi_۱+ni\varepsilon,\cdot)=\alpha^n u_\varepsilon(\xi_۱,\cdot)+\alpha^{n-۱}f(\xi_۱)+\alpha^{n-۲}f(\xi_۱+i\varepsilon)$$
$$+\alpha^{n-۳}f(\xi_۱+۲i\varepsilon)+\ldots+f(\xi_۱+(n-۱)i\varepsilon)$$

و یا

$$u_\varepsilon(\xi_۱,\cdot)=\alpha^{-n}u_\varepsilon(\xi_۱+ni\varepsilon,\cdot)-\sum_{k=\cdot}^{n-۱}\alpha^{k-n}f(\xi_۱+(n-۱-k)i\varepsilon)$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $k-n=m$ داریم:

$$u_\varepsilon(\xi_۱,\cdot)=-\sum_{m=-\infty}^{-۱}\alpha^m f(\xi_۱-(m+۱)i\varepsilon)$$
$$=-\sum_{m=-۱}^{-\infty}\alpha^m f(\xi_۱-(m+۱)i\varepsilon)$$

و دو باره با تعویض اندیس سیگما از m به $-m$ داریم:

$$u_\varepsilon(\xi_۱,\cdot)=-\sum_{m=۱}^{\infty}(\alpha^{-۱})^m f(\xi_۱-(۱-m)i\varepsilon)$$

از محاسبهٔ حد رابطهٔ مذکور وقتی $\varepsilon\to\cdot$ رابطهٔ (۲۵) به‌دست می‌آید:

$$u_\cdot(\xi_۱,\cdot)=\lim_{\varepsilon\to\cdot}u_\varepsilon(\xi_۱,\cdot)$$
$$=\frac{f(\xi_۱)}{۱-\alpha} \qquad (۲۵)$$

با توجه به اینکه $\alpha>۱$ است سری هندسی $\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha^{-1})^m$ همگرا است. با استفاده از ضابطهٔ نخست (۱۷) جواب تحلیلی مسئله را در داخل ناحیه بدین‌صورت است:

$$u_\varepsilon(\xi)=\int_R u_\varepsilon(x_۱,۱)\theta(۱-\xi_۱)\delta(x_۱-\xi_۱-i\varepsilon(۱-\xi_۱))dx_۱$$
$$-\int_R u_\varepsilon(x,\cdot)\theta(-\xi_۱)\delta(x_۱-\xi_۱+i\varepsilon\xi_۱)dx_۱$$

با در نظر گرفتن مقادیر تابع هویساید و خاصیت تابع دلتای دیراک جواب تحلیلی مسئله بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$u_\varepsilon(\xi_۱,\xi_۲)=\int_R u_\varepsilon(x_۱,۱)\delta(x_۱-\xi_۱-i\varepsilon(۱-\xi))dx_۱$$

اکنون حالت حدی جواب فوق را وقتی $\varepsilon\to\cdot$ به دست می آوریم:

$$u_\cdot=\lim_{\varepsilon\to\cdot}u_\varepsilon(\xi_۱,\xi_۲)$$
$$=\int_R u_\cdot(x_۱,۱)\delta(x_۱-\xi_۱)dx_۱$$
$$=u_\cdot(\xi_۱,۱)$$

بنابراین داریم:

$$u_\cdot(\xi_۱,\xi_۲)=u_\cdot(\xi_۱,۱) \qquad (۲۶)$$

از رابطهٔ (۲۶) می‌شود که

$$u_\cdot(\xi_۱,\cdot)=u_\cdot(\xi_۱,۱)$$

و لذا از شرط مرزی (۲۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$u_{0}(\xi_1,1)=\alpha u_{0}(\xi_1,1)+f(\xi_1)\Rightarrow u_{0}(\xi_1,1)=\frac{f(\xi_1)}{1-\alpha}$$

روابط (۲۵) و (۲۶) و رابطه اخیر نشان می‌دهد که جواب حدی مسئله در شرط مرزی مسئله (۲۳)-(۵) صدق می‌کند. بنابرین در مسئله مذکور لایه مرزی تشکیل نمی‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به‌دنبال به‌دست آوردن شرط مرزی غیرموضعی مناسب برای مسئله اغتشاشی کوشی ریمان هستیم که درآن لایه مرزی درنزدیکی نقاط مرزی نداشته باشیم. به‌همین خاطر نیازمند به‌کارگیری روش موضعی‌سازی برای شرط غیرموضعی (۲۱) مسئلهٔ اغتشاشی کوشی ریمان هستیم. به‌این منظور ابتدا جواب اساسی معادله الحاقی مسئله با استفاده از تبدیلات فوریه به‌دست آوردیم و به‌دنبال آن شرایط ضروری محاسبه شد و سپس با استفاده از شرط ضروری شرط مرزی غیرموضعی به شرط مرزی موضعی تبدیل کردیم. و در نهایت با استفاده از جواب حدی به‌دست آمده از روی جواب تحلیلی به وجود یا عدم وجود لایه مرزی در نزدیکی نقاط مرزی مسئله پی بردیم. و نتیجه مهم این‌که هرگاه در مسئله لایه مرزی شامل معادلات پاره‌ای، لایه مرزی تشکیل نشود شبیه مسایل لایه مرزی برای معادلات دیفرانسیل عادی، جواب تقریبی مسئله را به‌صورت توان‌های متوالی مثبت پارامتر ε به‌صورت $u_\varepsilon(x_1,x_2)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_1,x_2)\varepsilon^n$ محاسبه می‌کنیم، که با مشتق‌گیری ازجواب پیشنهادی فوق و جای‌گذاری در معادله دیفرانسیل پاره‌ای داده شده نسبت به ضرایب $a_n(x_1,x_2)$ دستگاه معادلات دیفرانسیل متوالی ظاهر می‌شود. که با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل متوالی، ضرایب مجهول محاسبه شده و جواب تقریبی مسئله با اعمال شرایط مرزی داده شده به‌دست خواهد آمد.

مسایل حل نشده

۱. برای مسئله لایه مرزی زیر با شرایط مرزی موضعی

$$\varepsilon\Delta u+ia\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}+b\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}=0,\qquad u(x_1,x_2)\in R,\qquad \varepsilon>0$$
$$u(x_1,0)=\varphi_0(x),\qquad x_1\in R,\quad x_2\in(0,1)$$
$$u(x_1,1)=\varphi_1(x)$$

که در آن a و b ثابت‌های حقیقی هستند. با محاسبه جواب اساسی معادله الحاقی و شرط‌های ضروری و بررسی وضعیت حدی جواب و شرایط مرزی، شرایط لازم و کافی برای نبود لایه مرزی در مسئلهٔ مذکور ارائه شود.

۲. مسئله قبلی را با شرایط مرزی غیرموضعی زیر به‌کار رود.

$$\alpha_0 u(x_1,0)+\alpha_1 u(x_1,1)=\varphi_0(x_1),\qquad x_1\in R$$
$$\beta_0\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}+\beta_1\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=1}=\varphi_1(x_1),\qquad x_1\in R$$

منابع

1. Prantdl L., "Uber flussing leeits-bowengung bei kleiner Reibung verhandlungen", III int, Math. Kongresses, Tuebner Leipzig, Hiedelberg, Germany (1905).
2. Nagumo M.,"Uberdas verhaltender integrable von $\ell y''+f(x,y,y',\ell)=٠, \quad \ell \to ٠$", Proc., Math .Soc.Japan- 21 (1939).
3. Wasow W., Friedrich K.O., "singular perturbation of nonlinear oscillations", Duke, Math., 13 J. (1964).
4. Tikhonov A.N., "System of differential equations containing small parameter infront of derivatives", Math.S, b. 31, No.3 (1952).
5. Oleinik O.A.,"Mathematical problems of boundary layer theory", Usperhi, Math., Nauka. 23, No.3 (1968).
6. O`mally J.R.E, "Introduction to Singular Perturbations", Academic Press, New York (1974).
7. Dualan E.P., Milleranal J.J.H., Schilders L.H.A., "Uniform Numerical Methods for Problem with initial and Boundary layers",Boole PRESS Dublin (1980).
8. Sarakhsi A.R., Jahanshahi M., "Investigation of boundary layers of singular perturbation problem of including second order linear equation with non-local boundary conditions", Journal of sciences, Tehran University of Tarbiat Moallem, No.3 (2013) 809-818.
9. Sarakhsi A.R., Jahanshahi M., Sarakhsi M., "Approximate solution of the problem of singular perturbation of second order linear with variable coefficients with Dirichlet conditions", Journal of Advanced mathematical modeling, No. 2 (2013) 49-70.
10. Jahanshahi M., Sarakhsi A.R., Aliev N., Ashrafi S., "Boundary layer problem for system of one order ordinary differential equations with linear non-local boundary conditions", Iranian Journal of Science & Technology, 37 (2013) 389-396.
11. Sarakhsi A.R. , Jahanshahi M., "Asymptotic solution of the problem of singular perturbation of second-order linear with constant cofficients with a Dirichlet condition", Journal of sciences, Tehran University of Tarbiat Moallem, Volome 10, No.1(2012) 683-692.
12. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliev N., "Tikhonov-lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation", Azerb. J. Math. 3, No.1 (2013) 104-110.
13. Mohan K., Kadalbajoo K., Patidar C., "Singular perturbation problems in partial differential equations a survey", Applied Mathematics and computation. Elsevier, 134 (2003).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1394.1.2.3.9]
[DOI: 10.29252/mmr.1.2.27]

14. Hegarty A., O'Riordan E., Stynes M., "A comparison of uniformly convergent difference schemes for two-dimensional convection-diffusion problems, J.Comput.Phys,105 (1993).

15. Kamin S., "On elliptic singular perturbation problems with turning points", SIAM, J. Math., Anal 10 (3) (1979).

16. Matkosky B.J., Schuss Z., "On the problems of exit", Bull. Amer. Math. Soc. Volume 82, No.2 (1976) 157-355 .

17. Vladimirov V.S., “Equations of Mathematical Physics” 3nded., Nauka, Moscow (1976). Technol., vol. 33, No.2 (2002) 241-247.

18. Naimark M.A.," Linear differential operators", part II, Unger, New York (1968).