

## عملگرهای ترکیبی و ضربی روی فضاهاى اورلیچ

یوسف استارمی\*، سعیده شمسی گمچی؛

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ایران

پذیرش ۹۴/۱۲/۲۴

دریافت ۹۴/۷/۳

### چکیده

عملگرهای ترکیبی  $C_\varphi$  تولید شده به وسیله تبدیل خطی اندازپذیر و غیرمنفرد  $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$  و عملگر ضربی  $M_u$ ، تولید شده به وسیله تابع اندازپذیر  $u: \Omega \rightarrow C$ ، بین دو فضای متفاوت اورلیچ  $L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$  و  $L^{\Phi_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$  را در نظر می‌گیریم. سپس کراندارى، فشردگی و نرم اساسی عملگرهای ترکیبی و ضربی را از نظر خواص تابع  $\varphi$ ، تابع  $u$  و فضای اندازه  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  بررسی می‌کنیم. در حقیقت تعدادی از نتایج [۸]، [۹]، [۲۲] را توسعه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی عملگر ترکیبی، عملگر ضربی، عملگر فشرد، فضای اورلیچ، نرم اساسی

Mathematics Subject Classification [2010]: 47B37, 46B99

### مقدمه

فرض کنید  $\Phi: R \rightarrow R^+$  تابعی پیوسته محدب باشد به طوری که:

$$\Phi x = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi x = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi x}{x} = \infty \quad (3)$$

در این صورت تابع محدب  $\Phi$  را تابع یانگ می‌نامیم. تابع یانگ مکمل  $\Phi$ ، تابع محدب یکتایی مانند

$\Psi: R \rightarrow R^+$  است که دارای خواص مشابه  $\Phi$  است و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\Psi y = \sup_{x \geq 0, y \in R} x|y| - \Phi x$$

یک تابع یانگ  $\Phi$  در شرط  $\Delta_2$  (جهانی) صدق می‌کند هرگاه ثابت های  $k > 0$  و  $x_0 \geq 0$  موجود باشند

به طوری که:

$$\Phi 2x \leq k\Phi x, x \geq x_0 \geq 0 \quad (x_0 = 0)$$

اگر  $\Phi$  یک تابع یانگ باشد، آن‌گاه مجموعه توابع  $\Sigma$  - اندازپذیر

$$L^\Phi \Sigma = \left\{ f: \Omega \rightarrow C: \exists k > 0, \int_{\Omega} \Phi k|f| d\mu < \infty \right\}$$

با توجه به نرم  $N_{\Phi}(f) = \inf \left\{ k > 0 : \int \Phi \left( \frac{f}{k} \right) d\mu \leq 1 \right\}$  فضای باناخ است. فضای  $L^{\Phi} \Sigma, N_{\Phi} 0$  فضای اورلیچ نامیده می‌شود. اگر  $\Phi \in \Delta_2$  آن‌گاه فضای دوگان  $L^{\Phi} \Sigma$  برابر  $L^{\Phi^*} \Sigma$  است.

با توجه به نرم  $N_{\Phi}(\cdot)$  گوئیم دنباله  $u_n$  در  $L^{\Phi} \Sigma$  همگرایی معمولی به  $u$  در  $L^{\Phi} \Sigma$  دارد  $u_n \rightarrow u$  هرگاه،  $N_{\Phi}(u_n - u) \rightarrow 0$  همچنین یک دنباله  $u_n$  در  $L^{\Phi} \Sigma$  (را هم‌گرا به  $u \in L^{\Phi} \Sigma$ ) در  $\Phi$ -میانگین گوئیم هرگاه  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Phi |u_n - u| d\mu = 0$  انداز‌پذیر کامل و  $\sigma$ -متناهی  $\Omega, \Sigma, \mu$  و همچنین تبدیل خطی انداز‌پذیر  $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ ، بدین معنی که برای هر  $A \in \Sigma$  داریم  $\varphi^{-1} A \in \Sigma$  را در نظر می‌گیریم. اگر برای هر  $A \in \Sigma$  که  $\mu A = 0$ ، داشته باشیم  $\mu \varphi^{-1} A = 0$ ، آن‌گاه تابع  $\varphi$  را غیرمنفرد می‌نامیم. این شرط بدین معنی است که اندازه  $\mu \circ \varphi^{-1}$ ، با ضابطه  $\mu \circ \varphi^{-1} A = \mu \varphi^{-1} A$  برای هر  $A \in \Sigma$ ، نسبت به اندازه  $\mu$  پیوسته مطلق است  $\mu \circ \varphi^{-1} \ll \mu$ .

بنا به قضیه رادون نیکودیم، تابع انتگرال‌پذیر غیرمنفی مانند  $h$  روی  $\Omega$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $A \in \Sigma$   $\mu \circ \varphi^{-1} A = \int_A h d\mu$ ، یک تبدیل خطی غیرمنفرد  $\varphi$  یک عملگر خطی (عملگر ترکیبی)  $C_{\varphi}$  از  $L^0 \Omega$  به خودش را به وجود می‌آورد که با این ضابطه تعریف می‌شود:

$$C_{\varphi} f t = f \varphi t ; t \in \Omega, f \in L^0 \Omega,$$

که  $L^0 \Omega$ ، فضای خطی از همه کلاس‌های هم‌ارزی توابع  $\Sigma$ -انداز‌پذیر است، بدین معنی که هر دو تابعی که  $\mu$ -تقریباً همه جا روی  $\Omega$  یک‌سان هستند را یکی در نظر می‌گیریم. در این‌جا غیرمنفرد بودن  $\varphi$ ، تضمینی برای خوش تعریف بودن عملگر  $C_{\varphi}$  از  $L^0 \Omega$  به خودش است. اگر  $C_{\varphi}$  نگاشتی از یک فضای اورلیچ  $L^{\Phi} \Omega$  به خودش باشد، آن‌گاه عملگر ترکیبی روی  $L^{\Phi} \Omega$  نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که در این حالت  $C_{\varphi}$  کراندار است.

فرض کنید  $u: \Omega \rightarrow C$  تابعی انداز‌پذیر باشد. ضابطه‌ای که  $u$  را به  $u.f$  نسبت می‌دهد، یک تبدیل خطی روی  $L^{\Phi} \Omega$  تعریف می‌کند که آن را با  $M_u$  نمایش داده و در حالتی که  $M_u$  پیوسته باشد، آن را عملگر ضربی ایجاد شده توسط  $u$  می‌خوانیم. در دهه‌های گذشته، به‌طور چشم‌گیری به عملگرهای ضربی و ترکیبی توجه شده است. به‌ویژه عملگرهایی که روی بعضی از فضاهای توابع انداز‌پذیر مانند فضاهای  $L^p$  فضاهای برگمن، فضاهای اورلیچ تعریف شده‌اند و در بررسی عملگرها روی فضاهای هیلبرت نقش اساسی ایفا می‌کنند. ریاضی‌دانان زیادی خواص اساسی عملگرهای ضربی و ترکیبی روی فضاهای توابع انداز‌پذیر را بررسی کرده‌اند. برای جزییات بیشتر روی این عملگرها اشاره می‌کنیم به آبراهام [۱]، تاکاجی [۲۰]، ایکسلر [۲]، استارمی و جبارزاده [۵]، هالموس [۶]، لامبرت [۱۲]، سینگ و منهس [۱۶]، تاکاجی [۱۹]، [۲۱]، [۲۲]، هودزیک و کربک [۷]، چوهودزیک، کومر و مالیگراندا [۸]، آرورا [۳]، راج، شرما و کومار [۱۴] و سایر اثرات دیگر. [۹] و [۱۷] عملگرهای ترکیبی وزن‌دار و ضربی روی فضاهای اورلیچ را بررسی کرده‌اند. در

حالتی که  $\Phi$  تابع یانگ خوب (N-function) است، تعدادی نتایج روی کران‌داری عملگرهای ترکیبی روی فضاها ی اورلیچ در [۱۰] و [۱۳] به‌دست آمده است. چنان‌که در [۱۸] مشاهده می‌شود، نرم اساسی نقش جالبی در مسائل فشردگی عملگرهای سخت ایفا می‌کند. افراد زیادی نرم اساسی انواع مختلفی از عملگرهای سخت را به‌دست آورده‌اند. برای بررسی عملگرهای ترکیبی، به [۱۵]، [۲۱]، [۲۴] اشاره می‌کنیم. به‌طور دقیق حساب کردن نرم و نرم اساسی عملگرهای ضربی و ترکیبی روی فضاها ی اورلیچ، سئوالی بدیهی نیست. علی‌رغم سختی مربوط به محاسبه دقیق نرم اساسی، معمولاً پیدا کردن کران بالا و پایین برای نرم اساسی، تحت شرایط خاص امکان‌پذیر است. در این مقاله، قصد داریم مطالبی در مورد کران‌داری، فشردگی و نرم اساسی عملگرهای ضربی و ترکیبی بین دو فضای اورلیچ ارائه دهیم. در بخش ۲، شرایط لازم و کافی برای کران‌داری عملگرهای ضربی و ترکیبی بین دو فضای اورلیچ متفاوت را به‌دست می‌آوریم. در بخش ۳، شرایط لازم و کافی برای فشردگی عملگرهای ضربی و ترکیبی بین دو فضای اورلیچ متفاوت ارائه می‌دهیم. سپس در بخش ۴، با استفاده از حکم‌های اثبات شده در باره فشردگی در بخش ۳، نرم اساسی عملگرهای ضربی و ترکیبی را تخمین می‌زنیم.

### کران‌داری

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای کران‌داری عملگرهای ترکیبی و ضربی از  $L^{\Phi_1} \Omega$  به  $L^{\Phi_2} \Omega$  را ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۲.۱.** فرض کنید  $\Omega, \Sigma, \mu$  فضایی انداز‌پذیر  $\sigma$ -متناهی و  $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$  تبدیلی خطی انداز‌پذیر

غیرمنفرد پوشا باشند. اگر  $h$  مشتق رادون نیکودیم  $\frac{d\mu \circ \varphi^{-1}}{d\mu}$  باشد و:

(a) عملگر ترکیبی  $C_\varphi$  از  $L^{\Phi_1} \Omega$  به  $L^{\Phi_2} \Omega$  کران‌دار است.

(b) فضای اورلیچ  $L^{\Phi_1} \Omega$  بطور پیوسته در فضای اورلیچ وزند  $L^{\Phi_2} \Omega$  از نگاهته می‌شود، هرگاه:

$$L^{\Phi_2} \Omega = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \exists k > 0, \int_{\Omega} h \Phi_2(k|f|) d\mu < \infty \right\}$$

(c) برای هر  $u > 0$  و  $t \in \Omega \setminus A$  با  $\mu(A) = 0$  وجود دارند  $a, b > 0$  و  $g \in L^1 \Omega$  به‌طوری‌که:

$$a u h t \leq b \Phi_1 u + g t \quad \text{اگر } \mu, \Sigma, \mu \text{ هم‌چنین، } c \rightarrow a \text{ و } a \rightarrow b$$

فضای انداز‌پذیر غیراتمیک  $\sigma$ -متناهی باشد، آن‌گاه  $a, b, c$  معادلند.

**اثبات:**  $a \rightarrow b$  چون  $\varphi$  پوشاست، بنابراین برای هر  $f \in L^{\Phi_1} \Omega$  داریم:

$$\begin{aligned} I_{\Phi_2} C_\varphi f &= \int_{\Omega} \Phi_2 |C_\varphi f| d\mu = \int_{\varphi \Omega} h \Phi_2 |f| d\mu \\ &= \int_{\Omega} h \Phi_2 |f| d\mu = I_{\Phi_2, h} f \end{aligned}$$

پس اگر (a) درست باشد، آن‌گاه برای هر  $f \in L^{\Phi_1} \Omega$  داریم:

$$N_{\Phi_2, h} f = N_{\Phi_2} C_\varphi f \leq \|C_\varphi\| N_{\Phi_1} f$$

این رابطه ایجاب می‌کند که فضای اورلیچ  $L^{\Phi_1} \Omega$  به‌طور پیوسته در فضای اورلیچ  $L^{\Phi_2} \Omega$  وزن‌دار نگاشته شود. بنا به [۱۱] و [۵] Th به راحتی می‌توان دید که  $b \rightarrow c$  برای  $a \rightarrow c$ ، فرض کنید که  $c$  برقرار باشد، آن‌گاه برای هر  $f \in L^{\Phi_1} \Omega$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_{\Phi_2} \left( \frac{aC_\varphi f}{N_{\Phi_1} f} \right) &= \int_{\Omega} \Phi_2 \left( \frac{af t}{N_{\Phi_1} f} \right) h t d\mu \\ &\leq b \int_{\Omega} \Phi_1 \left( \frac{f t}{N_{\Phi_1} f} \right) d\mu + \int_{\Omega} g t d\mu \leq b + \int_{\Omega} g t d\mu \leq M' \end{aligned}$$

که  $M' > 1$  نتیجه می‌دهد که  $I_{\Phi_2} \left( \frac{aC_\varphi f}{M'N_{\Phi_1} f} \right) \leq 1$  بنابراین  $N_{\Phi_2} C_\varphi f \leq \frac{M'}{a} N_{\Phi_1} f$

**قضیه ۲.۲.** اگر  $C_\varphi : L^{\Phi_1} \Omega \rightarrow L^{\Phi_2} \Omega$  یک تبدیل خطی باشد، آن‌گاه  $C_\varphi$  کران‌دار است.

**اثبات:** با استفاده از قضیه گراف بسته، یک بودن  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  و این حقیقت که همگرایی نرمی، همگرایی  $\Phi$  میانگین را ایجاب می‌کند، کران‌داری  $C_\varphi$  به‌دست می‌آید.

**ملاحظه ۲.۳.** بنا به قضیه ۲.۲ داریم:  $C_\varphi \in B(L^{\Phi_1}, L^{\Phi_2})$  اگر و تنها اگر  $L^{\Phi_2} \Omega \subseteq L^{\Phi_1} \Omega$  بنابراین این

شرایط برقرارند:

(a) عملگر خطی  $C_\varphi$  از  $L^{\Phi_1} \Omega$  به  $L^{\Phi_2} \Omega$  کران‌دار است.

(b) برای هر  $f \in L^{\Phi_1} \Omega$  وجود دارد  $\lambda > 0$  به طوری که  $\int_{\Omega} h \Phi_2 \lambda |f| d\mu < \infty$

(c) فضای اورلیچ  $L^{\Phi_1} \Omega$  به‌طور پیوسته در فضای اورلیچ وزن‌دار  $L^{\Phi_2} \Omega$  نگاشته شده است.

(d) برای هر  $u > 0$  و  $t \in \Omega \setminus A$  با  $\mu A = 0$  وجود دارند  $a, b > 0$  و  $g \in L^1 \Omega$

به طوری که:

$$\Phi_2 au h t \leq b \Phi_1 u + g t$$

**قضیه ۴.۲.** فرض کنید  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  یک تابع انداز‌پذیر باشد آن‌گاه:

(a) اگر  $M > 0$  و  $g \in L^1_+ \Omega$  وجود داشته باشند به طوری که برای هر  $v > 0$  و  $x \in \Omega \setminus A$

$$M_u : L^{\Phi_1} \Omega \rightarrow L^{\Phi_2} \Omega \text{ آنگاه } \Phi_2 u x v \leq \Phi_1 Mv + g x$$

یک عملگر کران‌دار است.

(b) اگر  $\Omega, \sum, \mu$  فضای انداز‌پذیر غیر اتمیک و  $M_u : L^{\Phi_1} \Omega \rightarrow L^{\Phi_2} \Omega$  عملگر کران‌دار باشند،

آن‌گاه برای هر  $v > 0$  و  $x \in \Omega \setminus A$  با  $\mu A = 0$  وجود دارند  $M > 0$  و  $g \in L^1_+ \Omega$

به طوری که:

$$\Phi_2 u x v \leq \Phi_1 Mv + g x$$

**اثبات:** (a) برای هر تابع  $f \in L^{\Phi_1} \Omega$  داریم:

$$I_{\Phi_2} \left( \frac{uf}{MN_{\Phi_1} f} \right) \leq \int_{\Omega} \Phi_1 \left( \frac{Mf t}{MN_{\Phi_1} f} \right) d\mu + \int_{\Omega} g t d\mu \leq 1 + \int_{\Omega} g t d\mu \leq M'$$

جایی که  $M' > 1$  این ایجاب می‌کند که  $I_{\Phi_2} \left( \frac{uf}{MM'N_{\Phi_1} f} \right) \leq 1$  بنابراین برای هر  $f \in L^{\Phi_1} \Omega$  می‌توان نوشت:

$$N_{\Phi_2} M_u f \leq MM'N_{\Phi_1} f$$

(b) اگر شرط برقرار نباشد، آنگاه برای هر  $n \in N$  و  $g \in L^{\Phi_1} \Omega$  مجموعه‌ای اندازپذیر  $F'_n$  از  $\Omega$  و تعدادی  $a_n \in \mathbb{C}$  وجود دارند به طوری که

$$F'_n = \{x \in \Omega : \Phi_2 |u x \alpha_n| > \Phi_1 2^n n^2 \alpha_n + g x\}$$

که  $F'_n$  مجموعه‌ای اندازپذیر مثبت است زیرا

$$F'_n \subseteq \{x \in \Omega : \Phi_2 |u x \alpha_n| > \Phi_1 2^n n^2 \alpha_n\} = F_n$$

آنگاه  $F'_n$  نیز مجموعه‌ای اندازپذیر از اندازه مثبت است. چون  $\mu$  غیراتمیک است، یک دنباله جدا از هم  $E_n$  از مجموعه‌های اندازپذیر را طوری انتخاب می‌کنیم که  $E_n \subseteq F_n$  و

$$\mu E_n = \frac{\Phi_2 |\alpha_1|}{2^n \Phi_1 n^2 |\alpha_n|}$$

برای  $c_n = n |a_n|$ ، تعریف می‌کنیم  $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \chi_{E_n}$ . فرض کنید  $a > 0$  و  $n_0 > a$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_1 \alpha f d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1 \alpha c_n \chi_{E_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} \Phi_1 \alpha c_n \mu E_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\Phi_1 \alpha c_n \Phi_2 |\alpha_1|}{2^n \Phi_1 n^2 |\alpha_n|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \Phi_1 \alpha c_n \mu E_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\Phi_1 n^2 |\alpha_n| \Phi_2 |\alpha_1|}{2^n \Phi_1 n^2 |\alpha_n|} < \infty \end{aligned}$$

اگر  $\alpha > \frac{1}{n_0}$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_2 \alpha |u f| d\mu &\geq \sum_{n \geq n_0} \int_{E_n} \Phi_2 \alpha n |u \alpha_n| d\mu \geq \\ \sum_{n_0} \int_{E_n} \Phi_2 u \alpha_n d\mu &\geq \sum_{n \geq n_0} \Phi_1 2^n n^2 |\alpha_n| \mu E_n \geq \sum_{n \geq n_0} \Phi_2 |\alpha_1| = \infty \end{aligned}$$

که این یک تناقض است.

**نتیجه ۵.۲.** فرض کنید  $\Omega, \sum, \mu$  فضایی اندازپذیر غیراتمیک باشد. آنگاه  $M_u : L^{\Phi_1} \Omega \rightarrow L^{\Phi_2} \Omega$  عملگر کران‌دار است اگر و تنها اگر  $M > 0$  و  $g^+_{\Phi_1} \Omega$  وجود داشته باشند به طوری که برای هر  $v > 0$

$$\Phi_2 u x v \leq \Phi_1 Mv + g x \quad \mu A = 0 \text{ با } x \in \Omega \setminus A$$

**قضیه ۶.۲.** اگر  $M_u : L^{\Phi_1} \Omega \rightarrow L^{\Phi_2} \Omega$  یک تبدیل خطی است، آنگاه  $M_u$  کران‌دار است.

اثبات: با استفاده از قضیه گراف بسته، یک به یک بودن  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  و این حقیقت که همگرایی نرمی، همگرایی  $\Phi$ —میانگین را ایجاب می‌کند، نتیجه می‌گیریم که  $M_u$  کران‌دار است.

## فشرده‌گی

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای فشرده‌گی عملگرهای ضربی و ترکیبی را ارائه می‌کنیم. یادآوری می‌شود که یک اتم از اندازه  $\mu$ ، عنصری مانند  $A \in \Sigma$  با  $A > 0$  است که برای هر  $F \in \Sigma$  اگر  $F \subseteq A$  آن‌گاه  $\mu F = 0$  یا  $\mu F = \mu A$  (فضای اندازه بدون اتم  $\mu$ ،  $\Sigma, \Omega$  فضای اندازه‌پذیر غیراتمیک نامیده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که هر فضای اندازه‌پذیر  $\sigma$ -متناهی  $\Sigma, \Omega$  را می‌توان به به‌طور یکتا به صورت  $\Omega_0 = B \cup A_j : j \in \mathbb{N}$  افراز کرد که  $A_j$  گردایه‌ای شمارش‌پذیر از اتم‌های دو به‌دو مجزا است و  $B \in \Sigma$  یک مجموعه اندازه‌پذیر غیراتمیکی است که هیچ اشتراکی با  $A_j$  ها ندارد [۲۳]. چون  $\Sigma, \sigma$ -متناهی است بنابراین به‌ازای هر  $j \in \mathbb{N}$  داریم:

$$a_j = \mu A_j < \infty$$

عملگر خطی و کران‌دار  $(T : E \rightarrow E)$  فضای باناخ است) فشرده است هرگاه به ازای هر گوی واحد بسته  $B_1$  از  $E$ ،  $T B_1$  دارای بستار فشرده باشد.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید  $M_u$  از  $L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$  به  $L^{\Phi_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$  کران‌دار باشد. اگر  $\alpha > 0$  وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر  $\varepsilon > 0$  مجموعه  $N_{\alpha, \varepsilon} = \{x \in \Omega : \Phi_2 |u x \alpha| > \Phi_1 \varepsilon |\alpha|\}$  شامل تعداد متناهی اتم باشد، آن‌گاه  $M_u$  فشرده است.

**اثبات:** فرض می‌کنیم  $\varepsilon > 0$  و  $u = \bigcup_{i=1}^n C_i$  و  $N_{\alpha, \varepsilon} = N_{\alpha, \varepsilon}$  شامل تعداد متناهی اتم باشد. قرار می‌دهیم  $u_{\alpha, \varepsilon} = u \chi_{N_{\alpha, \varepsilon}}$  و  $T_{\alpha, \varepsilon} = M_{u_{\alpha, \varepsilon}}$  چون توابع  $\Sigma$ -اندازه‌پذیر روی  $\Sigma$ -اتم‌ها ثابتند و  $\Omega, \Sigma, \mu$  یک فضای  $\sigma$ -متناهی است، بنابراین داریم:

$$M_{u_{\alpha, \varepsilon}} f = \sum_{i=1}^n u C_i f C_i \chi_{C_i} \in \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i} : \alpha_i \in \mathbb{C} \right\} \subseteq L^{\Phi_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$$

پس  $M_{u_{\alpha, \varepsilon}}$  دارای برد با بعد متناهی است. بنابراین برای هر  $f \in L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$

$$\int_{\Omega} \Phi_2 \left( \frac{u - u_{\alpha, \varepsilon}}{\varepsilon N_{\Phi_1} f} \right) d\mu = \int_{\Omega \setminus N_{\Phi_1} f} \Phi_2 \left( \frac{u f}{\varepsilon N_{\Phi_1} f} \right) d\mu \leq \int_{\Omega \setminus N_{\Phi_1} f} \Phi_1 \left( \frac{\varepsilon f}{\varepsilon N_{\Phi_1} f} \right) d\mu = \int_{\Omega \setminus N_{\Phi_1} f} \Phi_1 \left( \frac{f}{N_{\Phi_1} f} \right) d\mu \leq 1$$

رابطه بالا ایجاب می‌کند که  $N_{\Phi_2}(M_u f - M_{u_{\alpha, \varepsilon}} f) \leq \varepsilon N_{\Phi_1} f$  در نتیجه  $M_u$  فشرده است.

**قضیه ۲.۳.** اگر  $\Omega, \Sigma, \mu$  فضای اندازه‌پذیر غیراتمیک باشد، آن‌گاه عملگر ضربی فشرده غیرصفری میان  $L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$  و  $L^{\Phi_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$  وجود ندارد.

**اثبات.** فرض کنید  $M_u \neq 0$  بنابراین  $f \in L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$  با  $A \in \Sigma$  و  $0 < \mu A < \infty$  وجود دارند به‌قسمی که  $f \chi_A \neq 0$  a.e. چون  $\Omega, \Sigma, \mu$  فضای غیراتمیک است، بنابراین می‌توان دنباله  $A_n$  از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا از هم با  $0 < \mu A_n < \infty$  را به‌دست آورد. تعریف می‌کنیم  $f_n = \chi_{A_n} \cdot f$ . پس به‌ازای هر

$$m \neq n \text{ که } |f_n - f_m| = |f| \chi_{A_n} + \chi_{A_m} \text{ داریم}$$

همچنین،  $\int E u f_n \geq \varepsilon_0 f_n$  با استفاده از خاصیت یکنواختی  $N_{\Phi}$  داریم:

$$N_{\Phi} \left| E u f_n - E u f_m \right| = N_{\Phi} \left| E u \left( f_n - f_m \right) \right| =$$

$$N_{\Phi} \left| E u \left( |f_n| + |f_m| \right) \right| \geq N_{\Phi} \left| E u \left| f_n \right| \right| \geq \varepsilon_0 N_{\Phi} \left| f_n \right| = \varepsilon_0$$

بنابراین  $N_{\Phi} \left| E u f_n - E u f_m \right| \geq \varepsilon_0$  این رابطه نتیجه می‌دهد که  $T$  نمی‌تواند فشرده باشد.

### نرم اساسی

فرض کنید  $\mathcal{B}$  یک فضای باناخ و  $\mathcal{K}$  مجموعه همه عملگرهای فشرده روی  $\mathcal{B}$  باشد. اگر  $L(\mathcal{B})$  جبر باناخ از همه عملگرهای خطی کران‌دار روی  $\mathcal{B}$  به خودش باشد، آنگاه به ازای هر  $T \in L(\mathcal{B})$  فاصله از  $T$  به  $\mathcal{K}$  در نرم عملگرها،  $\|T\|_e = \inf \|T - S\| : S \in \mathcal{K}$  را نرم اساسی  $T$  می‌نامیم. به‌وضوح  $T$  فشرده است اگر و تنها اگر  $\|T\|_e = 0$ . همان‌طور که در [۱۸] دیده می‌شود، نرم اساسی یک نقش جالبی در مسائل فشرده‌گی عملگرهای سخت ایفا می‌کند.

**قضیه ۱.۴.** فرض کنید  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  تابع  $\Sigma$ -اندازه پذیر باشد و  $M_u : L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \rightarrow L^{\Phi_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$  اگر  $\{N_{\varepsilon}\}$  شامل تعداد متناهی اتم است:  $\beta_2 = \inf \{ \varepsilon > 0$

$$\|M_u\|_e \leq \beta_2 \quad (a)$$

(b) فرض کنید  $\Phi_1 \in \Delta_2$  و  $\mu C_n \rightarrow 0$  یا  $\mu C_n \rightarrow 0$  زیرا دنباله همگرایی ندارد. در این صورت:

$$\beta_2 \leq \|M_u\|_e$$

**اثبات: (a)** فرض کنید  $\varepsilon > 0$  آنگاه  $N_{\varepsilon+\beta_2}$  شامل تعدادی متناهی اتم است. قرار می‌دهیم  $u_{\varepsilon+\beta_2} = u \chi_{N_{\varepsilon+\beta_2}}$  و  $M_{u_{\varepsilon+\beta_2}}$  بنابراین  $M_u$  دارای برد با بعد متناهی و همچنین فشرده است. پس برای  $f \in L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$  داریم:

$$\int_{\Omega} \Phi_2 \left( \frac{u - u_{\varepsilon+\beta_2}}{\varepsilon + \beta_2} \frac{f}{N_{\Phi_1}} \right) d\mu = \int_{\Omega \setminus N_{\varepsilon+\beta_2}} \Phi_2 \left( \frac{u f}{\varepsilon N_{\Phi_1}} \right) d\mu \leq \int_{\Omega \setminus N_{\varepsilon}} \Phi_1 \left( \frac{\varepsilon f}{\varepsilon + \beta_2} \frac{1}{N_{\Phi_1}} \right) d\mu$$

$$\leq \int_{\Omega \setminus N_{\varepsilon+\beta_2}} \Phi_1 \left( \frac{f}{N_{\Phi_1}} \right) d\mu \leq 1$$

بنابراین

$$N_{\Phi_2} \|u f - u_{\varepsilon+\beta_2} f\| \leq \varepsilon + \beta_2 N_{\Phi_1} \|f\| \quad \text{و نیز} \quad \|M_u\|_e \leq \|M_u - M_{u_{\varepsilon+\beta_2}}\| \leq \varepsilon + \beta_2$$

در نتیجه

$$\|M_u\|_e \leq \beta_2$$

(b) فرض کنید  $0 < \varepsilon < \beta_2$  آنگاه بنا به تعریف،  $N_{\beta_2-\varepsilon}$  شامل تعدادی نامتناهی اتم یا زیرمجموعه‌ای غیر اتمیک از اندازه مثبت است. اگر  $N_{\beta_2-\varepsilon}$  شامل زیرمجموعه‌ای غیر اتمیک باشد، آنگاه یک دنباله  $B_n$   $n \in \mathbb{N}$

را می‌توان یافت که  $\mu B_n < \infty$  و  $\mu B_n \rightarrow 0$  قرار می‌دهیم  $f_n = \frac{\chi_{B_n}}{N_{\Phi_1} \chi_{B_n}}$  آنگاه برای هر

$A \in \Sigma$  و  $0 < \mu A < \infty$  داریم:

$$\int_{\Omega} f_n \chi_A d\mu = \mu \left( A \cap B_n \right) \Phi_1^{-1} \left( \frac{1}{\mu B_n} \right) \leq \frac{\Phi_1^{-1} \left( \frac{1}{\mu B_n} \right)}{\frac{1}{\mu B_n}} \rightarrow 0$$

وقتی که  $n \rightarrow \infty$  همچنین اگر  $u \in N_{\beta_2 - \varepsilon}$  شامل تعدادی نامتناهی اتم  $C'_n$   $n \in \mathbb{N}$  و قرار دهیم

$$f_n = \frac{\chi_{C'_n}}{N_{\Phi_1} \chi_{C'_n}} \quad \text{آن‌گاه به ازای هر } A \in \Sigma \text{ با } 0 < \mu A < \infty \text{ داریم:}$$

$$\int_{\Omega} f_n \chi_A d\mu = \mu \left( A \cap C'_n \right) \Phi_1^{-1} \left( \frac{1}{\mu C'_n} \right)$$

اگر  $\mu C_n \rightarrow 0$  و  $\mu A \cap C'_n = 0$ ،  $n > n_0$  و اگر  $\mu C_n \rightarrow 0$  آنگاه  $\mu A \cap C'_n \rightarrow 0$  بنابراین در هر دو حالت

داریم:

$$\int_{\Omega} f_n \chi_A d\mu = \mu \left( A'_n \right) \Phi_1^{-1} \left( \frac{1}{\mu C'_n} \right) \rightarrow 0$$

این رابطه ایجاب می‌کند که با همگرایی ضعیف  $f_n \rightarrow 0$  همچنین:

$$\int_{\Omega} \Phi_1 \left( \frac{\beta - \varepsilon f_n}{N_{\Phi_2} u f_n} \right) d\mu \leq \int_{\Omega} \Phi_2 \left( \frac{u f_n}{N_{\Phi_2} u f_n} \right) d\mu$$

$$N_{\Phi_2} u f_n \geq \beta_2 - \varepsilon \quad \text{بنابراین}$$

همچنین، عملگر فشرده  $L^{\Phi_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ ،  $L^{\Phi_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$  وجود دارد به طوری که:

$$\|M_u\|_e \geq \|T - M_u\| - \varepsilon$$

پس  $N_{\Phi_2} T f_n \rightarrow 0$  و نیز  $N > 0$  ای وجود دارد به طوری که به ازای هر  $n > N$ ،  $N_{\Phi_2} T f_n \leq \varepsilon$ ،

بنابراین

$$\|M_u\|_e \geq \|M_u - T\| - \varepsilon \geq \left| N_{\Phi_2} u f_n - N_{\Phi_2} T f_n \right| \geq \beta_2 - \varepsilon - \varepsilon$$

در نتیجه

$$\|M_u\|_e \geq \beta_2$$

**نتیجه ۴.۲.** اگر  $\mu \Omega < \infty$  و  $\Phi_1 \in \Delta_2$ ، آن‌گاه  $\|M_u\|_e = \beta_2$

**نتیجه ۴.۳.** اگر  $\mu \Omega < \infty$  و  $\Phi_1 \in \Delta_2$ ، آن‌گاه،  $M_u$  فشرده است اگر و تنها اگر  $\beta_2 = 0$

**مثال ۴.۴.** (a) فرض کنید  $\mu, \Omega = \mathbb{N}$  اندازه شمارش‌پذیر روی  $\Omega$  و  $\varphi$  تبدیل خطی یک به یکی روی  $\Omega$  باشند.

برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\Phi_1 n = \frac{n^3}{3}$  و  $\Phi_2 n = \frac{n^2}{2}$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $u n = \frac{n^2}{n+1}$ ،

آن‌گاه بنا به قضیه ۱.۳، عملگر ضربی  $M_u$  از  $L^{\Phi_1}(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$  به  $L^{\Phi_2}(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$  فشرده نیست و اگر

$u n = \frac{1}{n^2}$ ، بنا به قضیه ۱.۳، عملگر ضربی از  $L^{\Phi_1}(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$  به  $L^{\Phi_2}(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$  فشرده است.

(b) فرض کنید  $\Omega = [0, 1 \cup \mathbb{N} - 1]$  (مجموعه اعداد طبیعی). همچنین فرض کنید  $\mu$  اندازه لبگ روی  $[0, 1]$  باشد و به ازای هر  $n \in (\mathbb{N} - \{1\})$ ،  $\mu(\{n\}) = 1$ ، اگر  $\Phi_1(x) = e^x - x - 1$  و  $\Phi_2(n) = \frac{x^5}{5}$  و برای هر  $x \in \Omega$ ،  $u(x) = x^2 + 2$  را در نظر می‌گیریم. آنگاه بنا به قضیه ۳.۱ عملگر ضربی  $M_u$  از  $L^{\Phi_1}(\mathbb{N}, \sum, \mu)$  به  $L^{\Phi_2}(\mathbb{N}, \sum, \mu)$  فشرده نیست.

### منابع

1. Abrahamse M.B., "Multiplication Operators, Lecture Notes in Mathematics", 693 (1978) 17-36.
2. Axler A., "Multiplication Operators on Bergman Spaces", J. Reine, Angew Math., 336 (1982) 26-44.
3. Arora S.C., "Gopal Datt and Satish Verma, Composition operators on Lorentz spaces", Bull., Austral, Math. Soc., 76 (2007) 205-214.
4. Douglas R.G., "Banach Algebra Techniques in Operator Theory", Academic Press, New York (1972).
5. Estaremi Y., Jabbarzadeh M.R., "Weighted Lambert type operators on  $L_p$ -spaces", Oper. and Matrices, 7 (2013) 101-116.
6. Halmos P.R., "A Hilbert Space Problem Book, Van Nostr and Princeton", N.J. (1961).
7. H. Hudzik and M. Krbec, On non-effective weights in Orlicz spaces. Indag., Math. (N.S.) 18 (2007) 215-231.
8. Cui Y., Hudzik H., Kumar R., Maligranda L., "Composition operators in Orlicz spaces", J. Aust. Math. Soc., 76 (2004) 189-206.
9. Komal B.S., Gupta S., "Multiplication operators between Orlicz spaces", Integral equation and operator theory, 41 (2001) 324-330.
10. Kumar R., "Composition operators on Orlicz spaces", Integral Equations Operator Theory 29 (1997) 17-22.
11. Musielak J., "Orlicz spaces and modular spaces", Lecture Notes in Math. 1034 (Springer, Berlin (1983).
12. Lambert A., "Operator algebras related to measure preserving transformations of finite order", Rocky Mountain J. Math., 14 (1984) 341-349.
13. Rao M.M., "Convolutions of vector fields III: random walk models", Nonlinear Anal, Theory Methods Appl., 47 (2001) 3599-3615.
14. Raj K., Sharma S.K., Kumar A., "Multiplication operator on Musielak-Orlicz spaces", Advances and Applications in Mathematical Sciences, 10 (2011) 473-480.

15. Montes-Rodríguez A., "The essential norm of a composition operator on Bloch spaces", *Pacific J. Math.*, 188 (1999) 339-351.
16. Singh R.K., Manhas J.S., "Composition operators on function spaces", *North Holland Math., Studies 179*, Amsterdam (1993).
17. Gupta S., Komal B.S, Suri N., "Weighted composition operators on Orlicz spaces", *Int. J. Contemp, Math. Sciences*, 1, (2010) 11-20.
18. Shapiro J.H., "The essential norm of a composition operator", *Analls of Math.*, 125 (1987) 375-404.
19. Takagi H., "Compact weighted composition operators on  $L_p$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116 (1992) 505-511.
20. Takagi H., "Fredholm Weighted Composition Operators", *Integral Equations and Operator Theory* 16 (1993) 267-276.
21. Takagi T., Miura T., "Takahasi, Sin-Ei: Essential norm and stability constants of weighted composition operators on  $C(X)$ ", *Bull. Korean Math. Soc.*, 40, 583-591 (2003).
22. Takagi H., Yokouchi K., "Multiplication and composition operators between two  $L_p$ -spaces", *Contemporary Math.*, 232 (1999) 321-338.
23. Zaanen A.C., "Integration, 2nd ed.", *North-Holland, Amsterdam* (1967).
24. Zheng L., "The essential norms and spectra of composition operators on  $H^\infty$ ", *Pacific J. Math.*, 203, 503-510 (2002).