(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

بررسی وجود جواب و طیف مقادیر ویژه درکلاس‌هایی از معادلات بیضوی

سمیه سعیدی نژاد؛ دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی

دریافت ۹۵/۰۳/۲۱ پذیرش ۹۶/۰۵/۱۰

چکیده

دراین مقاله به بررسی وجود جواب برخی از کلاس‌های معادلات بیضوی به‌صورت‌های

$$\Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon\, div(\varphi(x,\nabla u)\nabla u) = \lambda u + \varepsilon f(x,u)$$

با شرایط مرزی ناویر $u = \Delta u = 0$ روی مرزهموار از ناحیهٔ کراندار Ω از $\mathbb{R}^N$ و معادلهٔ

$$-\Delta u - \varepsilon\, div(\varphi(x,\nabla u)\nabla u) = \lambda u + \varepsilon f(x,u)$$

با شرط مرزی دیریکله می‌پردازیم که در آن‌ها ε و λ پارامترهایی مثبت و $c < \mu_1$ که μ_1 کوچک‌ترین مقدار ویژه عملگر لاپلاس با شرایط مرزی دیریکله است. با بحث‌هایی مبتنی بر حساب تغییرات و تغییر صورت‌بندی وجود جواب به یک مسئله نقطه ثابت، با تکیه بر قضیهٔ نقطه ثابت باناخ، وجود جواب معادله به‌ازای هر $\lambda > 0$ در شرایطی که $\varepsilon \neq 0$ به‌صورت پدیده‌ای ناپیوسته در مقابل حالتی که $\varepsilon = 0$ و معادله لزوماً دارای جواب ضعیف نیست، مطرح می‌شود. هم‌چنین نشان می‌دهیم که اسکالر μ چنان موجود است که معادله زیر به‌ازای مقادیری به‌قدر کافی بزرگ λ و هر $\varepsilon > 0$ دارای جواب غیربدیهی است.

$$\Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon\, div(\varphi(x,\nabla u)\nabla u) = \lambda g(u) + \varepsilon f(x,u) + \mu u$$

هم‌چنین مثال‌هایی در راستای کاربردی بودن بحث‌های انجام شده، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلهٔ دیفرانسیل بیضوی، عملگر بای لاپلاسین، جواب ضعیف، مقدار ویژه، قضیه نقطه ثابت باناخ.

Mathematics Subject Classification (2010).35J60; 15A18; 35J30, 35D30.

مقدمه

معادلات بیضوی شامل عملگر مرتبهٔ دوم لاپلاسین Δ[1] و عملگر مرتبهٔ چهارم لاپلاسین Δ^2[2] که روی تابع N متغیره u بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} \text{ و } \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^4 u}{\partial {x_i}^4} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{\partial^4 u}{\partial {x_i}^2 \partial {x_j}^2}\text{،}$$

در مدل‌سازی پدیده‌های دینامیک بسیاری ظاهر می‌شوند. از جمله، مسائل زیادی در الکتروستاتیک و الکترومغناطیس وجود دارد که با معادلهٔ پواسن که شامل عملگر Δ است، توصیف می‌شوند. هم‌چنین معادلات مرتبهٔ چهارم که شامل عملگر Δ^2 باشند، عموماً رفتار حرکت استاتیک در جسم صلب را توضیح می‌دهند. از این رو، معادلات بیضوی، جزء

*نویسندهٔ مسئول ssaiedinezhad@iust.ac.ir

1. Laplacian operator
2. Bi-Laplacian operator

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.3.1]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.45]

دسته معادلات پرکاربرد در حوزهٔ فیزیک و مهندسی به‌شمار می‌روند که توجه پژوهش‌گران بسیاری به آن‌ها معطوف شده است. در این میان مسائلی که روش‌های تحلیلی عاجز از معرفی و یافتن جواب تحلیلی آن‌هاست، در حوزهٔ نظری توجه ریاضی‌دانان آنالیزکار را به‌خود جلب کرده است. مجموعه‌ای متنوع از راهبردهای آنالیز تغییرات از جمله روش مسیر کوهی[۳]، روش چشمه، روش جواب بالایی و پایینی و راه‌بردهای هندسی- تغییراتی از جمله روش خمینهٔ نهاری، نگاشت فایبرینگ و راهبردهای توپولوژیک از جمله روش درجه توپولوژیک مثال‌هایی از انبوه روش‌های موجود در باب بررسی وجودی معادلات است [۱]، [۲].

گفتنی است، شرایط مفروض شده بر جملات درگیر در معادله و نوع غیرخطی آن‌ها مزیت هر یک از روش‌های نام‌برده را در جای خود به اثبات می‌رساند. در این میان به مقالات [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، که هریک از روشی مجزا به بررسی وجودی معادله‌ای بیضوی پرداخته اشاره می‌کنیم.در ادامه برخی از مسائل بررسی شده مرتبط را با ذکر جزئیات بیش‌تر مرور می‌کنیم.

به‌طور مثال معادلهٔ $\Delta^2 u + c\Delta u = d[(u+1)^+ - 1]$ با شرایط مرزی ناویر که درآن $u^+ = \max\{u,0\}$، برای اولین بار در مقالهٔ [۷] در نظر گرفته شده است که مکنا[۴] و لازر[۵] در این مقاله اشاره می‌کنند، این نوع از معادلهٔ غیرخطی در مدل‌بندی حرکت موج در پل‌های معلق ظاهر می‌شود. بعد از آن مقالات متعددی به بررسی وجود جواب شکل‌های کلی‌تر از معادله به‌صورت$\Delta^2 u + c\Delta u = f(x,u)$ با شرایط مختلفی روی f و عموماً با شرط $c < \mu_1$ که μ_1 اولین مقدار ویژه عملگر لاپلاسین با شرایط مرزی دیریکله است، پرداختند.

در مقالهٔ [۸]، میشلتی[۶] و پیستویا[۷] یک ساختار هندسی مطابق با قضیه اتصال[۸] به‌منظور بررسی معادله $\Delta^2 u + c\Delta u = bg(x,u)$ با شرایط $2G(x,s) \le s^2$، $\limsup_{s\to -\infty} G(x,s) \le 0$ و$\lim inf_{s\to 0} \frac{G(x,s)}{s^2} = l(x)$ به‌وجود آوردند که $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$.

در مقالهٔ [۹]، با استفاده از قاعده اکلاند[۹] و روش مسیر کوهی چندگانگی جواب مسئله

$$\Delta^2 u + c\Delta u = a(x)|u|^{s-2}u + f(u(x))$$

با اعمال چندین شرط غیرخطی بر fتحت شرایط مرزی ناویر بررسی شده است.

در مقالهٔ [۱۰]، معادلهٔ$\Delta^2 u + c\Delta u = \lambda u + f(u(x))$ در نظر گرفته شده که f دارای شرط زیربحرانی[۱۰] است؛ یعنی $|f(s)| \le d_1|s| + d_2|s|^{p-1}$که$p \in [2,2^*)$ و$d_1, d_2 > 0$ و با تکیه بر تئوری درجهٔ توپولوژیک[۱۱] به بررسی وجود جواب آن پرداخته است.

در بحث تغییراتی راجع به‌وجود جواب معادلات دیفرانسیل، مسئلهٔ وجود جواب معادله به‌طور معادل با مسئلهٔ وجود نقطهٔ بحرانی تابع انرژی که نظیر معادله ساخته می‌شود؛ دنبال می‌شود و اما در روش نقطهٔ ثابت در مسائل وجودی، مسئلهٔ نقطه بحرانی داشتن تابع انرژی به مسئلهٔ نقطه ثابت داشتن عملگر مشتق تابع انرژی تبدیل می‌شود. این مقاله با

3. Mountain pass theorem
4. Mckenna
5. Lazer
6. *Micheletti*
7. *Pistoia*
8. Linking theorem
9. Ekeland principle
10. Subcritical
11. Topological degree theory

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.3.1]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.45]

اقتباس از روشی که در قضیهٔ $2.G$ از کتاب زیدلر[۱۲] [۱۱] و یا مقالهٔ آمپه [۱۲] است، به شکل جالبی مسئله نقطه ثابت داشتن یک عملگر انقباضی را با وجود جواب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبط می‌سازد.

در این مقاله مسائل بیضوی (P_1) و (P_2) را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$(P_1):\begin{cases}\Delta^2u+c\Delta u+\varepsilon\, div(\varphi(x,\nabla u)\nabla u)=\lambda u+\varepsilon f(x,u); & \mathrm{x}\in\Omega\\ u=\Delta u=0; & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

$$(P_2):\begin{cases}\Delta u+\varepsilon\, div(\varphi(x,\nabla u)\nabla u)=\lambda u+\varepsilon f(x,u); & \mathrm{x}\in\Omega\\ u=0; & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

که Ω زیرمجموعه کرانداری از $\mathbb{R}^N$، $N>4$، $c<\mu_1$ و$\lambda,\varepsilon>0$. هم‌چنین نگاشت‌های $\varphi:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ و $f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ در این شرایط صدق می‌کنند:

به‌ازای هر $\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$ و $x\in\bar{\Omega}$:

I $\quad\big(\varphi(x,\xi)\xi-\varphi(x,\eta)\eta\big).(\xi-\eta)\ge 0$

II $\quad$ به ازای$\kappa>0$ داریم: $\big|\varphi(x,\xi)\xi_i-\varphi(x,\eta)\eta_i\big|\le\kappa|\xi-\eta|$

III $\quad f\in Car(\Omega\times\mathbb{R})$ و به‌ازای $r\in L^2(\Omega)$ و $\alpha\in\mathbb{R}$؛ $|f(x,t)|\le r(x)+\alpha|t|$ به‌ازای هر $t\in\mathbb{R}$ و $x\in\bar{\Omega}$.

IV $\quad$ به‌ازای هر $x\in\bar{\Omega}$ ، $f(x,0)\ne 0$.

V. $\quad f$ نسبت به مؤلفهٔ دوم خود لیپ‌شیتس است؛ یعنی به‌ازای $h\in L^\infty(\Omega)$ و هر $u,v\in\mathbb{R}$ و $x\in\bar{\Omega}$داریم:

$$|f(x,u)-f(x,v)|\le h(x)|u-v|$$

مثال۱. تابع $f(x,u)=\cos u(x)$ در شرایط (III-V) صدق می‌کند.

اثبات. به‌ازای $r=1$ و $\alpha=0$ شرط (III) برقرار است و از آن‌جاکه $|f_u|\le 1$ طبق قضیهٔ مقدار میانگین شرط (V) به‌ازای $\mathrm{h(x)}=1$ برقرار است.

مثال۲. تابع$\varphi(\mathrm{x},\xi)=\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|}}$ *در خواص* (I) *و* (II) *صدق می‌کند.*

اثبات. صحت شرط (I) معادل است با این‌که$|\xi\eta|\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi|}}+\frac{1}{\sqrt{1+|\eta|}}\right)\le\frac{\xi^2}{\sqrt{1+|\xi|}}+\frac{\eta^2}{\sqrt{1+|\eta|}}$که نتیجه می‌دهد،

$$\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|}}-\frac{|\eta|}{\sqrt{1+|\eta|}}\right)(|\xi|-|\eta|)\ge 0; \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به این‌که تابع $p(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t}}$ به‌ازای t های مثبت صعودی است، پس رابطهٔ (۱) برقرار است.

به‌منظور تحقیق صحت شرط *(II)* قرار دهید، $\phi_i(\xi)=\frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|}}$. در این صورت به‌ازای هر $i\ne j\in\{1,\dots,N\}$، $\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial\xi_j}=\frac{-\xi_i\xi_j}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$; و اگر $i=j$، $\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial\xi_i}=\frac{2|\xi|+|\xi|^2-\xi_i^2}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$.

بنا براین

$$\left|\phi_i{}'(\xi)\right|=\Big(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial\xi_j}\right|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial\xi_j}\right|=\frac{2|\xi|+|\xi|^2-\xi_i^2}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{N}\frac{-\xi_i\xi_j}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$$

12. Zeidler

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.3.1]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.45]

$$\leq \frac{2+|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{|\xi_i|^2 + |\xi_j|^2}{|\xi|(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leq \frac{2+|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{2|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2+|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2N|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2+(2N+1)|\xi|}{(1+|\xi|)^{\frac{3}{2}}}$$

از آن‌جاکه با محاسبات مقدماتی داریم، $\max\left\{\frac{2+(2N+1)t}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}; t>0\right\} = \frac{(4N-2)(2N+1)^{\frac{3}{2}}}{(6N-3)^{\frac{3}{2}}} := C_0$ از این رو، $|\phi_i{}'(\xi)| \leq C_0$.

بنا براین با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع $\phi_i(\xi)$ خواهیم داشت، $|\phi_i(\xi) - \phi_i(\eta)| \leq C_0|\xi - \eta|$ که این نامساوی (II) را نشان می‌دهد.

در موضوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، کاملاً شناخته شده است که معادلات $-\Delta u = \mu u$ با شرایط مرزی دیریکله و $\Delta^2 u + c\Delta u = \lambda u$ با شرایط مرزی ناویر روی مجموعه‌ای هموار دارای دنباله‌های نانزولی $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ از مقادیر ویژهٔ مثبت هستند [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]. از طرفی در این مقاله با ارائه بحث‌هایی مبتنی بر حساب تغییرات و تغییر صورت‌بندی وجود جواب با تکیه بر قضیهٔ نقطه ثابت باناخ [۱۶]، وجود جواب معادلات (P_1) و (P_2) به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ در شرایطی که $\varepsilon \neq 0$ به‌عنوان یک پدیدهٔ ناپیوسته در مقابل حالتی که $\varepsilon = 0$ و معادله لزوماً دارای جواب ضعیف نیست، مطرح می‌شود.

قبل از بیان نتایج اصلی، برخی از مهم‌ترین تعاریف و احکام از پیش دانسته را بیان می‌کنیم.

جواب ضعیف یک معادله، تابعی است که مشتقات آن در ناحیه‌ای که معادله در آن تعریف شده است، ممکن است موجود نباشد؛ با این حال، به مفهومی که به شکل دقیق تعریف می‌شود، در معادله داده شده صدق می‌کند. این تعریف که در ادامه می‌آید مستلزم حداقل انتگرال‌پذیری تابع جواب و حاصل‌ضرب آن با توابعی به قدر کافی هموار است که تعریف فضای سوبولوف[۱۳] به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از توابع انتگرال‌پذیر این نیاز را مرتفع می‌سازد. در خصوص دریافت اطلاعات کاملی از خاستگاه تعریف فضاهای سوبولوف و ویژگی‌های آن کتاب‌های مرجع [۱۷]، [۱۸] را معرفی می‌کنم.

فضای سوبولوف $W^{1,2}(\Omega)$ بدین‌صورت تعریف می‌شود،

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u = u(x) \in L^2(\Omega);\ \exists g_1, \dots, g_N \in L^2(\Omega),$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega g_i v\, dx;\ \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega), 1 \leq i \leq N \}$$

13. Sobolevspace

$W^{1,2}(\Omega)$ با نرم $\|u\| = \|\nabla u\|_2$ که $\|.\|_2$ نرم فضای باناخ $L^2(\Omega)$ است، یک فضای باناخ انعکاسی است. علاوه براین، با ضرب داخلی $< u, v >= \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx$ ، $W^{1,2}(\Omega)$ یک فضای هیلبرت بوده است و به‌همین دلیل آن‌را با نماد $H^1(\Omega)$ نیز نمایش می‌دهند. هم‌چنین بستار مجموعه $C_c^\infty(\Omega)$در $H^1(\Omega)$ را با نماد $H_0^1(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

توجه داشته باشید که در واقع ∇u همان بردار $(g_1, \dots, g_N)$ در تعریف ارائه شده از فضای سوبولوف است که از آن با عنوان مشتق ضعیف[۱۴] نامبرده می‌شود. از این پس به‌جای g_i ازنماد $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ استفاده می‌شود. بدیهی است که مشتقات ضعیف مراتب بالاتر نیز به‌همین صورت تعریف می‌شوند.

هم‌چنین فضای سوبولوف $W^{2,2}(\Omega)$ با نرم $\|u\| = \|\Delta u\|_2$ بدین‌صورت معرفی می‌شود:

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)\}$$

که یک فضای باناخ انعکاسی است و با ضرب داخلی $< u, v >= \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx$ یک فضای هیلبرت است.

قابلیت‌های نشاندن فضاهای سوبولوف معرفی شده در فضاهای لبگ اهمیت اساسی در ادامه بحث خواهند داشت که به‌صورت خلاصه به آن‌ها می‌پردازیم.

درحالتی که $N > 2$، $H_0^1(\Omega)$ تحت یک عملگر فشرده درفضای $L^q(\Omega)$ می‌نشینند که درآن
$$1 \leq q < 2^* = \tfrac{2N}{N-2}.$$
وجود این نگاشت همانی فشرده را با نماد $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. بنا براین به‌ازای یک $c > 0$ که مستقل از انتخاب $u \in H_0^1(\Omega)$ باشد، داریم:

$$\|u\|_q \leq c\|\nabla u\|_2 \tag{۲}$$

به‌ازای $q = 2$،کوچکترین مقدار c که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند (ثابت نشاندن سوبولوف) همان مجذورمعکوس اولین مقدار ویژه عملگر لاپلاس با شرایط دیریکله است یعنی $\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$ که:

$$\mu_1 = \inf\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}; 0 \neq u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

هم‌چنین $H^2(\Omega)$ با نگاشت همانی فشرده در فضای $L^q(\Omega)$ می‌نشینند.

دراین مقاله با توجه به ضرورت معنادار بودن جملات موجود در معادله، اگر با مسئله مرتبهٔ چهار مواجه باشیم، فضای هیلبرت $X := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ را به‌منزلهٔ فضای زمینه برای تحقیق وجود جواب با نرم زیر در نظر می‌گیریم؛

$$\|u\| = \|u\|_X = (\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx)^{\frac{1}{2}}$$

که با توجه نتایج اولیه مقالهٔ [۷]، از آن‌جاکه

$$\inf\{\frac{\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}; 0 \neq u \in H^2(\Omega)\} = \mu_1(\mu_1 - c)$$

14. Weak derivative

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.3.1]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.45]

از این رو، ثابت نشاندن سوبولوف در نشاندن $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ عبارت است از $\frac{1}{\sqrt{\mu_1(\mu_1-c)}}$. یعنی به‌ازای هر $u \in X$

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_1(\mu_1-c)}}\|u\|. \qquad (۳)$$

علاوه بر این، واضح است که X به‌شکل پیوسته‌ای در $H_0^1(\Omega)$ می‌نشیند. از این رو، با در نظر داشتن نابرابری (۱) به‌ازای $q = 2$ و (۲) ، به ازای هر $u \in X$ داریم:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\mu_1 - c}\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx. \qquad (۴)$$

تعریف۱. تابع $u \in X$ را جواب ضعیف مسئله (P_1)گوییم، هرگاه به‌ازای هر $v \in X$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega (\Delta u\Delta v - c\nabla u\nabla v)dx + \varepsilon \int_\Omega \varphi(x,\nabla u)\nabla u\nabla v\, dx = \lambda \int_\Omega uv\, dx + \varepsilon \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \qquad (۵)$$

به طور مشابه $u \in H_0^1(\Omega)$ را جواب ضعیف مسئلهٔ (P_2)گوییم، هرگاه به‌ازای هر $v \in H_0^1(\Omega)$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v\, dx + \varepsilon \int_\Omega \varphi(x,\nabla u)\nabla u\nabla v\, dx = \lambda \int_\Omega uv\, dx + \varepsilon \int_\Omega f(x,u)v\, dx,$$

تعریف۲. مقدار $\lambda \in \mathbb{R}$ را مقدار ویژه مسئلG (P) می‌نامیم؛ هرگاه به‌ازای این مقدار از λ، دارای حداقل یک جواب ضعیف غیربدیهی مثل u باشد که در این صورت u را نیز بردار ویژه نظیر λ می‌نامیم.

نتایج اصلی

در ابتدا توابع a، b_ε، $e_{\lambda,\varepsilon}$ را به‌صورت نگاشت‌هایی از $X \times X$ به $\mathbb{R}$ با ضوابط زیر تعریف می کنیم:

$$b_\varepsilon(u,v) = \varepsilon \int_\Omega \varphi(x,\nabla u)\nabla u\nabla v\, dx,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\Delta u\Delta v - c\nabla u\nabla v)dx,$$

$$e_{\lambda,\varepsilon}(u,v) = \lambda \int_\Omega uv\, dx + \varepsilon \int_\Omega f(x,u)v\, dx.$$

بنا بر فرض(III) واضح است که عبارت $\int_\Omega f(x,u)v\, dx$ خوش تعریف است؛ در واقع،

$$\int_\Omega |f(x,u)v| dx \leq \int_\Omega (r(x)v + v^2)dx \leq (\|r\|_2 + 1)\,\|v\|_2 < \infty.$$

از آن‌جاکه توابع$a, b_\varepsilon, e_{\lambda,\varepsilon}$ نسبت به مؤلفهٔ دوم خود خطی و پیوسته هستند، بنا براین به‌ازای هر $u \in X$، $a(u,.), b_\varepsilon(u,.), e_{\lambda,\varepsilon}(u,.) \in X^*$. در نتیجه طبق قضیهٔ نمایش ریس روی فضاهای هیلبرت، به‌ازای هر $u \in X$ توابع $A(u), B_\varepsilon(u), E_{\lambda,\varepsilon}(u) \in X^*$ چنان موجودند که به‌ازای هر $v \in X$ داشته باشیم:

$$a(u,v) =< A(u), v >\text{،}\ b_\varepsilon(u,v) =< B_\varepsilon(u), v > \text{ و } e_{\lambda,\varepsilon}(u,v) =< E_{\lambda,\varepsilon}(u), v >\text{که}$$

$$< u,v >= \int_\Omega (\Delta u\Delta v - c\nabla u\nabla v)dx.$$

حال نگاشت به‌ازای اسکالر غیر صفر t،نگاشت $S_t: X \longrightarrow X$ را با ضابطهٔ (۶) در نظر بگیرید،

$$S_t(u) = u - t\Big(A(u) + B_\varepsilon(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(u)\Big). \qquad (۶)$$

گزارهٔ ۱. عدد حقیقی t چنان یافت می شود که نگاشت S_t تعریف شده در (۶) انقباضی باشد.

اثبات. برای هر $u, v \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}\|S_t(u) - S_t(v)\|^2 &= < S_t(u) - S_t(v), S_t(u) - S_t(v) > \\ &= \|u - v\|^2 - 2t < A(u) - A(v), u - v > +2t < E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v), u - v > \\ &\quad -2t < B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v), u - v > \\ &\quad -2t^2 < A(u) - A(v), E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v) \\ &\quad +2t^2 < A(u) - A(v), B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v) > \\ &\quad -2t^2 < E(u) - E(v), B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v) \\ &\quad +t^2\|A(u) - A(v)\|^2 + t^2\left\|E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v)\right\|^2 \\ &\quad +t^2\|B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v)\|^2;\end{aligned}$$

و علاوه بر این داریم،

$$< A(u) - A(v), u - v > = a(u - v, u - v) = \|u - v\|^2.$$

با استفاده از نامساوی هولدر، خاصیت (V) و نابرابری (۳) داریم،

$$\begin{aligned}< E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v), u - v > &= \lambda \int_\Omega |u - v|^2\, dx + \varepsilon \int_\Omega (f(x,u) - f(x,v)(u - v)\, dx \\ &\le \frac{(\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)} \|u - v\|^2;\end{aligned}$$

که $h^+ = esssup_{x\in\bar{\Omega}}(h(x))$.

هم‌چنین با توجه به خاصیت (I) می‌توان نتیجه گرفت،

$$< B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v), u - v >= \varepsilon \int_\Omega (\varphi(x,\nabla u)\nabla u - \varphi(x,\nabla v)\nabla v)(\nabla u - \nabla v) dx \ge 0.$$

از نامساوی (4) داریم،

$$\int_\Omega |\nabla \mathrm{u}|^2 dx \le \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega |\Delta \mathrm{u}|^2\, dx$$

و از این رو، $\|\Delta u\|_2 \le \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 - c}}\, \|u\|$؛ حال از این نتیجه و نامساوی (۴) تخمین زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\|A(u) - A(v)\| &= Sup_{\|w\|\le 1}|a(u - v, w)| \le \|\Delta u - \Delta v\|_2\|\Delta w\|_2 + c\|\nabla u - \nabla v\|_2\|\nabla w\|_2 \\ &\le \left(\frac{\mu_1 + c}{\mu_1 - c}\right) \|u - v\|\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\left\|E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v)\right\| = Sup_{\|w\|\le 1}\left|e_{\lambda,\varepsilon}(u,w) - e_{\lambda,\varepsilon}(v,w)\right| \le (\lambda + \varepsilon h^+)\|u - v\|_2\|w\|_2$$

$$\leq \frac{(\lambda+\varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1-c)}\|u-v\|,$$

و علاوه براین بادر نظر داشتن فرض (II) داریم:

$$\|B_\varepsilon(u)-B_\varepsilon(v)\| = Sup_{\|w\|\leq 1}\int_\Omega |\varphi(x,\nabla u)\nabla u-\varphi(x,\nabla v)\nabla v|\,|\nabla w|dx$$
$$\leq \varepsilon\|\varphi(x,\nabla u)\nabla u-\varphi(x,\nabla v)\nabla v\|_2\|\nabla \mathrm{w}\|_2$$
$$= \epsilon\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^N\left|\varphi(x,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}-\varphi(x,\nabla v)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}\|\nabla w\|_2$$
$$\leq \varepsilon\kappa\sqrt{N}\|\nabla u-\nabla v\|_2 \leq \frac{\varepsilon\kappa\sqrt{N}}{\mu_1-c}\|u-v\|.$$

بنا براین

$$\|S_t(u)-S_t(v)\|^2 \leq \left(1-tp_{\lambda,\varepsilon}+t^2q_{\lambda,\varepsilon}\right)\|u-v\|^2 := \Theta_{\lambda,\varepsilon}(t)\|u-v\|^2; \quad (۷)$$

که در آن $p_{\lambda,\varepsilon}=2\left(1+\frac{\lambda+\varepsilon h^+}{\mu_1(\mu_1-c)}\right)$ و

$$q_{\lambda,\varepsilon}=2(\mu_1+c)\frac{(\lambda+\varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1-c)^2}+2(\mu_1+c)\frac{\varepsilon\kappa\sqrt{N}}{(\mu_1-c)^2}+2\frac{(\lambda+\varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1-c)^2}\varepsilon\kappa\sqrt{N}+\left(\frac{\mu_1+c}{\mu_1-c}\right)^2$$
$$+\frac{(\lambda+\varepsilon h^+)^2}{{\mu_1}^2(\mu_1-c)^2}+\left(\frac{\varepsilon\kappa\sqrt{N}}{\mu_1-c}\right)^2.$$

از آن‌جاکه $\Theta_{\lambda,\varepsilon}(0)=\Theta_{\lambda,\varepsilon}\left(\frac{p_{\lambda,\varepsilon}}{q_{\lambda,\varepsilon}}\right)=1$ از این رو، می‌توان t_0 را چنان یافت که $\Theta_{\lambda,\varepsilon}(t_0)<1$ و به‌ازای این مقدار t، S_t از انقباضی باشد.

قضیه۱. به‌ازای هر $\varepsilon,\lambda>0$ مسئلهٔ (P_1) دارای جواب ضعیف یکتا و نابدیهی است.

اثبات. طبق گزارهٔ قبل t_0 را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که S_{t_0} تعریف شده در(۶) انقباضی باشد. از این رو، طبق قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ، دارای نقطه ثابت یکتا مثل u_0 است یعنی $S_{t_0}(u_0)=u_0$ و بنا براین

$$A(u_0)+B_\varepsilon(u_0)=E_{\lambda,\varepsilon}(u_0).$$

در نتیجه برای هر $v\in X$ داریم: $<A(u_0),v>+<B_\varepsilon(u_0),v>=<E_{\lambda,\varepsilon}(u_0),v>$ که معادل با رابطهٔ (۵) بوده و لذا u_0 جواب ضعیف مسئله(P_1)خواهد شد و با توجه به فرض (V) در حالتی که $\varepsilon\neq 0$ این جواب غیربدیهی است.

تبصرهٔ ۱. باید توجه داشت که این نقطه ثابت مستقل از t است که به‌ازای آنS_t انقباضی است. در واقع اگر t_1 و t_2 پارامترهایی باشندکه S_{t_1} و S_{t_2} دارای به‌ترتیب نقاط ثابت u_1 و u_2 باشند یعنی $S_{t_1}(u_1)=u_1$ و $S_{t_2}(u_2)=u_2$ آن‌گاه $A(u_1)+B_\varepsilon(u_1)-E_{\lambda,\varepsilon}(u_1)=0$ و از این رو،

$$S_{t_2}(u_1)=u_1+t_2\left(A(u_1)+B_\varepsilon(u_1)-E_{\lambda,\varepsilon}(u_1)\right)=u_1.$$

که نشان می‌دهد u_1 نقطه ثابت S_{t_2} نیز هست که با یکتایی نقطه ثابت S_{t_2} در تناقض است مگر این‌که $u_1=u_2$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.3.1]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.45]

چنان‌که مشاهده شد، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، تمام اعداد بازهٔ $(0, +\infty)$ مقادیر ویژه مسئلهٔ (P_1) محسوب می‌شوند و این در حالی است که اگر $\varepsilon = 0$ کوچک‌ترین مقدار ویژه عبارت است از $\mu_1(\mu_1 - c)$. در واقع اگر $\varepsilon = 0$ تمام مراحل گزارهٔ ۱ باز هم برقرار است، اما در این حالت نمی‌توان در پایان اثبات قضیهٔ ۱ نتیجه گرفت که این جواب نابدیهی است.

مثال ۳. معادلهٔ $\Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon\, div\left((1 + |\nabla u|)^{-\frac{1}{2}}\nabla u\right) = \lambda u + \varepsilon \cos u$ در حالت $\epsilon \neq 0$ با شرایط مرزی ناویر، دارای جواب ضعیف یکتا نابدیهی است. صحت خواص (I) و (II) در مورد تابع φ در نظر گرفته شده در این مثال، در مثال‌های ۱و ۲ از بخش ۱ به اثبات رسید.

قضیه۲. به‌ازای هر $\varepsilon, \lambda > 0$ مسئلهٔ (P_2) دارای جواب ضعیف یکتا و نابدیهی است.

اثبات. در روند بررسی این قضیه، فضای X را فضای هیلبرت $H_0^1(\Omega)$ با نرم $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ در نظر می‌گیریم و با تعریف نگاشت‌های b_ε و $e_{\lambda,\varepsilon}$ همانند قبل و قرار دادن $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ نگاشت S_t با ضابطهٔ (۶) را تعریف می‌کنیم. مشابه آن‌چه در اثبات گزارهٔ ۱، نشان داده شد؛ ثابت می‌کنیم به‌ازای یک t مناسب S_t انقباضی خواهد شد. برای این منظور با توجه به ملاحظات این قضیه داریم، $\|A(u) - A(v)\| \leq \|u - v\|$،

$$< E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v), u - v > \leq (\lambda + \varepsilon h^+)\|u - v\|$$

و علاوه بر این، $\|B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v)\| \leq \varepsilon\kappa\sqrt{N}\|u - v\|$. بنابراین در این حالت داریم،

$$\|S(u) - S(v)\|^2 \leq (1 - 2t\left(1 + \lambda + \varepsilon h^+\right) + t^2(2\left(\lambda + \varepsilon h^+ + \varepsilon\kappa\sqrt{N}\right) + 1 + (\lambda + \varepsilon h^+ + \varepsilon\kappa\sqrt{N})^2)$$

$$:= \left(1 - tp_{\lambda,\varepsilon} + t^2 q_{\lambda,\varepsilon}\right)\|u - v\|^2.$$

که استدلالی مشابه با قضیه ۱، اثبات را تمام می‌کند.

تبصره۲. اگر در مسائل (P_1) و (P_2) به‌جای جملهٔ λu جملهٔ $\lambda g(u)$ قرار گیرد که $g: X \to \mathbb{R}$ نگاشتی با خاصیت لیپ‌شیتس است، تمام استدلال و تخمین‌های صورت گرفته در اثبات قضایا و گزاره‌های قبل، تنها با تغییر λ به $\kappa_0\lambda$ برقرار خواهد بود؛ که در آن κ_0 ثابت لیپ‌شیتس تابع g است؛ یعنی، $|g(u) - g(v)| \leq \kappa_0|u - v|$.

قضیه۳. مفروضات (III)،(IV) و (V) را درنظر بگیرید. علاوه براین فرض کنید:

$$g: X := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

تابعی لیپ‌شیتس با ثابت لیپ‌شیتس κ_0 باشد، در این صورت اسکالرهای λ^* و μ چنان موجودند که به‌ازای هر $\lambda \geq \lambda^*$ و $\varepsilon > 0$، مسئله (P_3) دارای جواب نابدیهی باشد که،

$$(P_3): \begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u + \varepsilon\, div(\varphi(x, \nabla u)\nabla u) = \lambda g(u) + \varepsilon f(x,u) + \mu u; & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0; & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

اثبات. به‌ازای اسکالر غیرصفر t، نگاشت $T_t: X \longrightarrow X$ را با ضابطهٔ $T_t(u) = S_t(u) + u$ در نظر بگیرید که در آن S_t با ضابطه (۶) معرفی شده است. در این صورت،

$$\|T_t(u) - T_t(v)\|^2 = \|S_t(u) - S_t(v)\|^2 + \|u - v\|^2 + 2 < S(u) - S(v), u - v >. \quad (۸)$$

از طرفی داریم،

$$< S_t(u) - S_t(v), u - v >= \|u - v\|^2 - \mathrm{t} < A(\mathrm{u}) - \mathrm{A(V)}, \mathrm{u} - \mathrm{v} >$$
$$-\mathrm{t} < B_\varepsilon(u) - B_\varepsilon(v), u - v >$$
$$+\mathrm{t} < E_{\lambda,\varepsilon}(u) - E_{\lambda,\varepsilon}(v), u - v >.$$

که با توجه به محاسبات انجام شده در گزارهٔ ۱و با در نظر داشتن تبصرهٔ ۲ داریم:

$$< S_t(u) - S_t(v), u - v > \leq \left(1 - t + t\frac{\kappa_0\lambda + \varepsilon h^+}{\mu_1(\mu_1 - c)}\right)\|u - v\|^2. \qquad (۹)$$

لذا با اعمال تخمین‌های (۷) و (۹) در (۸) به‌دست می‌آوریم،

$$\|T_t(u) - T_t(v)\|^2 \leq 4 - 4tp'_{\lambda,\varepsilon} + t^2 q'_{\lambda,\varepsilon} \coloneqq \sigma_{\lambda,\varepsilon}(t)$$

که $p'_{\lambda,\varepsilon} = \frac{\kappa_0\lambda + \varepsilon h^+}{\mu_1(\mu_1 - c)}$ و

$$q'_{\lambda,\varepsilon} = 2(\mu_1 + c)\frac{(\kappa_0\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)^2} + 2(\mu_1 + c)\frac{\varepsilon\kappa\sqrt{N}}{(\mu_1 - c)^2} + 2\frac{(\kappa_0\lambda + \varepsilon h^+)}{\mu_1(\mu_1 - c)^2}\varepsilon\kappa\sqrt{N} + \left(\frac{\mu_1 + c}{\mu_1 - c}\right)^2$$
$$+\frac{(\kappa_0\lambda + \varepsilon h^+)^2}{{\mu_1}^2(\mu_1 - c)^2} + \left(\frac{\varepsilon\kappa\sqrt{N}}{\mu_1 - c}\right)^2.$$

با توجه به این‌که

$$\min_{\mathrm{t}} \sigma_{\lambda,\varepsilon}(t) = \sigma_{\lambda,\varepsilon}\left(\frac{2p'_{\lambda,\varepsilon}}{q'_{\lambda,\varepsilon}}\right) = 4\left(1 - \frac{{p'_{\lambda,\varepsilon}}^2}{q'_{\lambda,\varepsilon}}\right);$$

از این رو، $\min_{\mathrm{t}} \sigma_{\lambda,\varepsilon}(t) < 1$ اگر و فقط اگر $\frac{{p'_{\lambda,\varepsilon}}^2}{q'_{\lambda,\varepsilon}} > \frac{3}{4}$و از آن‌جاکه $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{{p'_{\lambda,\varepsilon}}^2}{q'_{\lambda,\varepsilon}} = 1$ پس به‌ازای λهای به‌قدر کافی بزرگ ($\lambda \geq \lambda^*$) داریم $\frac{{p'_{\lambda,\varepsilon}}^2}{q'_{\lambda,\varepsilon}} > \frac{3}{4}$.

در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که $t_0 > 0$ای موجود است که $0 < \sigma_{\lambda,\varepsilon}(t_0) < 1$ و بنا براین به‌ازای چنین t_0ای، طبق قضیهٔ نقطه ثابت باناخ نگاشت T_{t_0} دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند u_0 خواهد بود؛ یعنی $T_{t_0}(u_0) = u_0$ و لذا $S_{t_0}(u_0) = 0$. بنا براین طبق تعریف نگاشت S_t داریم،

$$A(u_0) + B_\varepsilon(u_0) - E_{\lambda,\varepsilon}(u_0) = \frac{1}{t_0}u_0.$$

در نتیجه به‌ازای هر $v \in X$ داریم،

$$< A(u_0), v > + < B_\varepsilon(u_0), v > = < E_{\lambda,\varepsilon}(u_0), v > + \frac{1}{t_0} < u_0, v >$$

که معادل با وجود جواب (P_3) به‌ازای $\mu \coloneqq \frac{1}{t_0}$ است.

مثال۴. می‌توان ثابت کرد اسکالرهای λ^* و μ چنان موجودند که به‌ازای هر $\lambda \geq \lambda^*$ و $\varepsilon > 0$، معادله مرتبهٔ چهار زیر با شرایط مرزی ناویر دارای جواب غیربدیهی باشد.

$$\Delta^2 u + \varepsilon\, div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|}}\right) = \lambda \sin u + \varepsilon \cos u + \mu u$$

تبصره۳. نتیجه مشابه قضیه ۳ برای معادله مرتبهٔ دوم

[DOR: 20.1001.1.25882546.1396.3.1.3.1]
[DOI: 10.29252/mmr.3.1.45]

$$\Delta u + \varepsilon\, div(\varphi(x, \nabla u)\nabla u) = \lambda g(u) + \varepsilon f(x, u) + \rho u$$

با شرایط دیریکله و با مفروضات مشابه آن‌چه در قضیه ۳ بیان شد، درفضای $X = H_0^1(\Omega)$ قابل اثبات است.

منابع

1. Drábek, Pavel, Jaroslav Milota, "Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations", Springer Science & Business Media (2013).
2. Rabinowitz, Paul H., ed. "Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations", No. 65.American Mathematical Soc. (1986).
3. Agarwal, RAVI P., Ghaemi M. B., Saiedinezhad S., "The Nehari manifold for the degenerate p-Laplacian quasilinear elliptic equations", Advances in Mathematical Sciences and Applications 20.1 (2010) 37.
4. Bozhkov, Yuri, Enzo Mitidieri, "Existence of multiple solutions for quasilinear systems via fibering method", Journal of Differential Equations 190.1 (2003) 239-267.
5. De Nápoli, Pablo, María Cristina Mariani, "Mountain pass solutions to equations of p-Laplacian type", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 54.7 (2003) 1205-1219.
6. Ouyang, Tiancheng, "On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on the compact manifolds", Transactions of the American Mathematical Society 331.2 (1992) 503-527.
7. Lazer A. C., McKenna P. J., "Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis", *Siam Review* 32.4 (1990) 537-578.
8. Micheletti, Anna Maria, Angela Pistoia, "Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 31.7 (1998) 895-908.
9. Pu, Yang, Xing-Ping Wu, Chun-Lei Tang, "Fourth-order Navier boundary value problem with combined nonlinearities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 398.2 (2013) 798-813.
10. Xu, Jiafa, Wei Dong, DonalO'Regan, "Existence of weak solutions for a fourth-order Navier boundary value problem", *Applied Mathematics Letters* 37 (2014) 61-66.
11. Zeidler E., "Applied Functional Analysis: Applications in Mathematical Physics", Springer-Verlag, New York (1995).

12. Costea N., Mihailescu M., "On an eigenvalue problem involving variable exponent growth conditions", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 71.9 (2009) 4271-4278.

13. Brezis H., "AnalyseFonctionnelle: Théorieet Applications", Masson, Paris (1992).

14. Gilbarg D., Trudinger N., "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1983).

15. Micheletti A. M., Pistoia A., "Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem", NonlinearAnal. 31 (1998) 895-908.

16. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: III: Variational Methods and Optimization", Springer Science & Business Media (2013).

17. Attouch, Hedy, Giuseppe Buttazzo, Gérard Michaille, "Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization", Society for Industrial and Applied Mathematics (2014).

18. Evans, Lawrence C., "Partial differential equations, volume 19 of.", Graduate Studies in Mathematics (1998) 22.